

VERHANDLUNGEN

DES 2. INTERNATIONALEN KONGRESSES FÜR TECHNISCHE MECHANIK

COMPTES RENDUS

DU 2^{IÈME} CONGRÈS INTERNATIONAL DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

PROCEEDINGS

OF THE 2ND INTERNATIONAL CONGRESS FOR APPLIED MECHANICS

ZÜRICH 12.-17. September 1926

*Im Auftrag des Organisationskomitees
herausgegeben von*

DR ERNST MEISSNER

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich



1 . 9 . 2 . 7

LIBRARY
GARDNER

VERHANDLUNGEN

DES 2. INTERNATIONALEN KONGRESSES FÜR TECHNISCHE MECHANIK

COMPTES RENDUS

DU 2^{IÈME} CONGRÈS INTERNATIONAL DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

PROCEEDINGS

OF THE 2ND INTERNATIONAL CONGRESS FOR APPLIED MECHANICS

ZÜRICH 12.-17. September 1926

*Im Auftrag des Organisationskomitees
herausgegeben von*

DR ERNST MEISSNER

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

1 . 9 .  . 2 . 7

ORELL FÜSSLI VERLAG ZÜRICH UND LEIPZIG

LIBRARY
CARNEGIE INSTITUTE OF
TECHNOLOGY

600.1
I 612 P
2nd
1926

UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY
CARNEGIE INSTITUTE OF
LIBRARY

Alle Rechte vorbehalten

Copyright 1927 by Art. Institut Orell Füssli, Zürich (Switzerland)

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Kongresse sind Meilensteine am Wege der Wissenschaft, bei denen man anhält, um nach Ort, Weg, Ziel und Wandergenossen Umschau zu halten. Wenn dieser Band erscheint, ist der Zürcher Kongreß längst in die Vergangenheit gerückt und man ist ein gutes Stück weiter auf dem Weg zum nächsten Meilenstein in Stockholm. Werden die hier gesammelten Vorträge noch Interesse finden? Werden sie mehr sein, als ein Denkmal der Zürcher Veranstaltung und ein Rechenschaftsbericht über die dort geleistete Arbeit?

Wer will die Wirkungen eines Kongresses beurteilen? Sie liegen so sehr auf der Seite des Persönlichen, daß sie ihrer Natur nach verborgen und unsichtbar bleiben. Die Veranstalter müssen Glauben und Zuversicht haben, dass neben dem, was auf steinigem Boden fallen mag, auch etwas Dauerndes und Fruchtbringendes aus dem Zusammenarbeiten vieler Nationen und aus ihrer wissenschaftlichen Berührung entstehe.

Um die Früchte des 2. Mechanikkongresses zu erhalten und zu verbreiten, beschloß das Zürcher Organisationskomitee die Drucklegung der gehaltenen Kongreßvorträge. Es beauftragte mit der Herausgabe den Unterzeichneten. Der Stoff, der im vorliegenden Band zur Veröffentlichung kommt, umfaßt ein so weites Gebiet, daß er auf vielseitiges Interesse rechnen darf. Auch den Kongreßteilnehmern wird der Band mehr als Erinnerungen an gehörte Vorträge bringen. Konnte doch jeder von ihnen nur einen Bruchteil der während fünf Tagen gehaltenen 88 Vorträge anhören, die nunmehr mit reichem Figuren- und Bildermaterial ausgestattet, in seine Hand gelegt werden.

Nach einem Beschluß des Organisationskomitees werden die Diskussionen, die sich an einzelne Vorträge anschlossen, nicht publiziert. Es mag das in einzelnen Fällen einen wirklichen Verlust bedeuten. Aber dem zu veröffentlichen Stoff mußten Grenzen gesetzt werden. Auch schienen die Schwierigkeiten, eine vielsprachige Diskussion auf engem Fachgebiete getreu festzuhalten, beträchtlich und das schriftliche Fixieren des Gesprochenen mag auch gelegentlich die Kürze, Sachlichkeit und Ungezwungenheit der Aussprache beeinträchtigen. Endlich ist es des Herausgebers persönliche Ueberzeugung, daß die kurzen Minuten, die zur Darlegung der Ansichten an einem Kongreß zur Verfügung stehen, nur dazu dienen sollten, eine Aussprache anzubahnen, die sich nachher im privaten Gespräch ruhiger und bequemer fortsetzen läßt, als in der Versammlung selbst. Er glaubt gerade in der Fortsetzung der Aussprache über die offizielle Sitzung hinaus das Wertvollste an einer Kongreßversammlung zu erblicken.

Die Drucklegung der Vorträge ist dem Organisationskomitee nur möglich geworden, durch die tatkräftige materielle Unterstützung, deren es sich zu erfreuen hatte. Es fühlt sich vor allem zu Dank verpflichtet dem Schweizerischen Schulrate, insbesondere seinen Präsidenten Dr. R. GNEHM + und Dr. A. ROHN für die namhaften Mittel, die dem Unternehmen aus der *Barth-Stiftung* der E.T.H. bewilligt wurden.

Die Vorträge sind nach Sektionen und innerhalb einer Sektion nach der Reihenfolge geordnet, in der sie gehalten wurden. Die Manuskripte sind fast restlos von den Autoren zur Verfügung gestellt worden. Fast durchwegs war es möglich, die Korrekturen von den Autoren selber lesen zu lassen. Es liegt in der Natur der Sache, daß das Bildermaterial seinen heterogenen Ursprung nicht verläugnet.

Der Herausgeber dankt allen Autoren für ihre Mitwirkung aufs beste. Dank verdient auch der *Verlag Orell Füssli*, der keine Mühe scheute, um dem Band eine würdige äußere Form zu geben.

Zürich, den 21. Februar 1927.

E. MEISSNER

Dec 4 '33 - Stecher - 12.60

BERICHT

über den

2. INTERNATIONALEN KONGRESS FÜR TECHNISCHE MECHANIK

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 12.-17. September 1926

1. Die Vorarbeiten.

Der I. Internationale Mechanik-Kongreß in *Delft* (April 1924) beschloß, die Mechanik-kongresse fortzusetzen und den nächsten im September 1926 abzuhalten. Die Wahl des Kongreßortes wurde einem Komitee, bestehend aus den HH. BIEZENO, Delft, LEVI-CIVITA, Rom, und MEISSNER, Zürich, überlassen. Dieses entschied im Sommer 1924 einstimmig für Zürich. In Zürich bildete sich ein Organisationskomitee (O.C.), bestehend aus folgenden Dozenten der Eidgenössischen Technischen Hochschule (E.T.H.):

DEBYE, MEISSNER, MEYER-PETER, PRASIL, ROHN, STODOLA, mit MEISSNER als Vorsitzendem.

Es begann seine Arbeiten im Herbst 1925.

Eine seiner vornehmsten Aufgaben sah es darin, wenn möglich alle größern Nationen zur Teilnahme am Kongreß zu veranlassen, damit dessen wahre Internationalität erreicht werde. Zu diesem Zweck schien es wünschenswert, dem Kongreß den Charakter einer privaten Unternehmung möglichst abzustreifen. Der Präsident des Schweiz. Schulrates Dr. R. GNEHM hatte in entgegenkommender Weise sofort die Räume der E.T.H. dem Kongreß zur Verfügung gestellt. Durch Vermittlung des Schweiz. Schulrates suchte das O.C. bei der Oberbehörde um die Erlaubnis nach, den Kongreß offiziell unter das Patronat der E.T.H. stellen zu dürfen. Es ist Herrn Bundesrat CHUARD, dem Vorsteher des Departements des Innern, zu großem Dank verpflichtet, daß er diese Erlaubnis erteilte und ihm so ermöglichte, einen weiten Rahmen für den Kongreß zu schaffen.

Es schien dem O.C. ferner wünschenswert, das Internationale Kongreß-Komitee (I.C.C.), das in Delft gebildet worden war, auf etwas breitere Basis zu stellen. Seine Erweiterungsvorschläge wurden von allen Mitgliedern des I.C.C. gebilligt.

Das I.C.C., das die im März 1926 versandten Einladungen mitunterzeichnete, besteht aus folgenden Mitgliedern:

J. S. AMES, Baltimore
L. BAES, Bruxelles
L. BAIRSTOW, London
C. B. BIEZENO, Delft
V. BYERKNES, Bergen
J. M. BURGERS, Delft
E. G. COKER, London
PH. FORCHHEIMER, Wien
A. A. GRIFFITH, Farnborough
C. GUIDI, Torino
E. HAHN, Nancy
J. C. HUNSAKER, Washington
E. JOUGUET, Paris
TH. v. KÁRMÁN, Aachen

E. KOENIGS, Paris
T. LEVI-CIVITA, Rom
E. MEISSNER, Zürich
R. v. MISES, Berlin
C. W. OSEEN, Upsala
TH. PÖSCHL, Prag
L. PRANDTL, Göttingen
J. A. SCHOUTEN, Delft
R. V. SOUTHWELL, Teddington
A. STODOLA, Zürich
G. I. TAYLOR, Cambridge
P. VILLAT, Strasbourg
E. B. WOLFF, Amsterdam

Durch Tod verloren hat es Prof. FRIEDMANN, Leningrad.

Im Winter 1925/26 waren auch die Vorbereitungen für die allgemeinen Vorträge so weit gediehen, daß im März etwa 1800 Einladungen zum Kongreß versandt werden konnten. Die Delfter Kollegen, denen das O.C. manchen guten Rat verdankt, unterstützten es dabei durch Ueberlassung ihres Adressenverzeichnisses. Als Anmeldetermin für Vorträge war in der Einladung der 1. Mai 1926, als Termin für Teilnehmeranmeldungen der 1. Juni 1926 angegeben. Diese Termine wurden zwar selten eingehalten; man war aber doch gegen den Sommer hin in der Lage, den Umfang einigermaßen abzuschätzen, den die Veranstaltung annehmen würde.

Ende Juli wurde das O.C., das Prof. ROHN durch Rücktritt verloren hatte, ergänzt durch die HH. Prof. C. ANDREAE, Rektor der E.T.H., und Prof. M. ROŠ. Mitte August wurde das Kongreßprogramm an alle Angemeldeten versandt. Seine Herausgabe war durch die immer noch einlaufenden Vortragsanmeldungen verzögert worden. Es erlitt während des Kongresses einige nicht gerade zahlreiche Aenderungen, weil einige Vortragende nicht erscheinen konnten, andere neue sich in letzter Stunde einstellten.

2. Der Kongreß.

Am Sonntag, den 12. September 1926 nahm der Kongreß seinen Anfang.

Nachmittags versammelte sich das I.C.C. mit dem Zürcher O.C., um den Bericht des letztern über die Vorbereitungen entgegenzunehmen und die Vorsitzenden der Versammlungen zu ernennen.

Abends um 8½ Uhr versammelten sich die Kongreßteilnehmer im Auditorium Maximum der Technischen Hochschule.

Prof. MEISSNER, als Vorsitzender des O.C., eröffnete den Kongreß mit einer Ansprache.

In den drei Landessprachen und in Englisch richtete er Worte der Begrüßung an die zahlreich erschienenen Gäste und gab dem Wunsch Ausdruck, es möchte der schöne Zweck der Versammlung, die internationale wissenschaftliche Fühlungnahme, alle Teilnehmer in gegenseitiger Achtung und Freundschaft verbinden.

Er verlas Glückwünsche des am Erscheinen verhinderten Vorstandes des Eidg. Departements des Innern, des Herrn Bundesrat CHUARD, und begrüßte die anwesenden Ehrengäste:

Herrn Schulratspräsidenten Dr. A. ROHN als Vertreter der obersten Leitung der E.T.H., die Herren Regierungspräsident Dr. A. STREULI und Reg.-Rat Dr. MOUSSON als Vertreter des Kantons Zürich, den Rektor der Universität Zürich, Herrn Prof. Dr. L. GAUCHAT, Herrn Dr. BERTSCHINGER als Vertreter der städtischen Behörden, Herrn Prof. BÄSCHLIN als Vertreter der Gesellschaft ehemaliger Studierender der E.T.H., und die Vertreter der Presse.

Hierauf fuhr er folgendermaßen fort:

«Die Zusammenkünfte der Vertreter angewandter Mechanik, wie sie in Innsbruck vorbereitet und in Delft begründet worden sind und wie sie nun heute hier fortgesetzt werden sollen, entsprechen einem Bedürfnis. An wissenschaftlichen Tagungen war der Vertreter der Mechanik weder bei den Mathematikern, noch bei den Physikern, noch bei den Technikern ganz am rechten Platz. Ihm fehlte lange die Gelegenheit, sich im engern Fachkreise aussprechen zu können. Vielleicht war das Bedürfnis nach eigenen Mechaniktagungen noch nicht so groß, solange die Technik nicht mehr als einige Grundsätze der Mechanik und einige elementare mathematische Methoden derselben verwendete. Heute ist das anders. Durch die Technik der schnell laufenden Maschinen z. B. sind neue, nicht einfache kinetische und elastische Probleme gestellt worden; die Festigkeitslehre nähert sich mit eiligen Schritten einer Strukturlehre der

Materie. Hydro- und Aeromechanik stehen im Mittelpunkt des praktischen Interesses; sie sind nicht mehr nur Paradestücke der Potentialtheorie, die physikalisch-technische Betrachtungsweise steht auch hier voran und in den Arbeiten der Mechaniker vereinigen sich Mathematik, Physik und Technik zur Erforschung der so sehr verwickelten Gesetze der Mechanik der Kontinua. So darf man wohl sagen, daß die Mechanik zwar überall unentbehrlich bleibt, wo exakte Wissenschaft getrieben wird, daß sie aber im letzten Jahrzehnt selbständigere Bedeutung gewonnen hat und nach einer Berücksichtigung dieses Umstandes verlangt.

In der Tat, trotz der Ungunst der Zeiten und trotz der noch mangelhaften, jeder Tradition entbehrenden Organisation sind zu unserer Tagung über 250 Teilnehmer erschienen, trotzdem manche, und darunter recht bedeutende Vertreter unseres Faches, durch private Umstände in letzter Stunde am Kommen verhindert wurden.

Die Teilnehmer an unserem Kongreß kommen aus folgenden 22 Ländern:

Aegypten, Amerika (U.S.A.), Argentinien, Belgien, Bulgarien, Deutschland, England, Frankreich, Griechenland, Holland, Japan, Italien, Niederländisch Indien, Norwegen, Oesterreich, Polen, Rumänien, Schweden, Schweiz, Spanien, Tschechoslowakei, Türkei.

Wenn diese Liste auch noch einige Lücken aufweist, so darf doch gesagt werden, daß die Internationalität unseres Kongresses heute schon erreicht ist. Das erfüllt uns mit Freude und Genugtuung. Leider ist die Freude nicht ganz restlos. Unsere Kollegen aus Rußland sind ausgeblieben *). Die Ursache davon liegt in den politischen Verhältnissen. Ohne darauf einzugehen, möchte ich nur feststellen, daß es weder am Entgegenkommen unserer obersten Behörden noch am guten Willen der Beteiligten gefehlt hat. Wir hoffen, daß die russischen Vertreter am Kongreß von 1930 ihren Platz wieder einnehmen werden.»

Der Redner teilte sodann mit, daß 86 Vorträge angemeldet seien. Den großen Erfolg des Kongresses, der sich in dieser Zahl kundgibt, schrieb er dem Ansehen seiner Initianten zu und er benützte die Gelegenheit, die anwesenden Gründer, die HH. v. KÁRMÁN, Aachen, LEVICIVITA, Rom, OSEEN, Upsala, und PRANDTL, Göttingen, ganz besonders willkommen zu heißen, ebenso die Kollegen aus Delft, die sich um den 1. Kongreß verdient gemacht haben, insbesondere die HH. BIEZENO und BURGERS, denen man auch die Herausgabe des schönen Verhandlungsbandes zu verdanken hat.

Er schloß seine Ansprache mit folgenden Worten:

«Meine Damen und Herren!

Wir wissen, daß wenn Sie gerade Zürich zum Ort Ihrer Versammlung gewählt haben, dies neben der geographischen und politischen Eigenart unseres Landes vor allem den Naturschönheiten zu verdanken ist, welche die Schweiz und auch Zürich im besondern besitzt. Der Führer durch Zürich, der Ihnen soeben überreicht worden ist, soll Ihnen helfen, in der knappen Zeit, die zur Verfügung steht, die Sehenswürdigkeiten der Stadt und die schönen Aussichtspunkte der Umgebung aufzusuchen. Er ist ein Geschenk der Firma *Orell Füßli*, einer der ältesten Druckereien unserer Stadt. Möge er Sie veranlassen, Ihre freien Stunden angenehm zu verbringen.

Das Angebinde, das Ihnen das Organisationskomitee hat überreichen lassen, ist ein Stahlstich nach einem Bildnis des Mannes, den Sie alle kennen. Auch heute noch erfüllt der Ruhm LEONHARD EULER'S die Welt. Unser Bild stellt den alten Euler dar, aber freilich nicht den gealterten, sondern den Forscher in seiner fruchtbarsten Epoche. Er ist ein Kind unseres Landes nach Geburt, aber auch im geistigen Sinne. Können wir ihn uns doch nicht denken

*) Einige nicht in Rußland lebende Russen nahmen am Kongreß teil.

ohne die glänzende Dynastie der BERNOULLI, aus deren Milieu er hervorgegangen ist und deren strahlendes Sternbild er als hellster Stern vollendet. Wir nennen ihn den unsern, aber er gehört nach seinem Leben und nach seinem Wesen der ganzen Welt wie alles, was geistig und menschlich bedeutsam ist. Seine Vaterstadt Basel, die seiner Jugend das Beste gab, hat er früh verlassen, um ein langes Leben hindurch die Gastfreundschaft fremder und größerer Verhältnisse zu genießen und dafür mit dem Ruhm seines großen Namens zu bezahlen. Ein Symbol wahrer Internationalität der Wissenschaft, die die Grenzen nicht kennt, welche Völker zwischen sich aufrichten, möge dieses Bild Sie später von der Wand Ihrer Studierstube herab grüßen und Ihnen — so hoffen wir — frohe und liebe Erinnerungen an diese Zürcher Tagung wachrufen.

Meine Damen und Herren!

Ich erkläre den 2. Internationalen Kongreß für Technische Mechanik für eröffnet.»

Hierauf bestieg der Rektor der Eidg. Technischen Hochschule, Prof. C. ANDREAE, das Rednerpult, um etwa folgendes auszuführen:

«Mesdames, Messieurs,

Soyez les bienvenus dans notre Ecole qui est celle des Culmann, des Zeuner, Ritter, Tetmajer et autres. Leur souvenir vous entoure. Ce qui vous réunit ici, c'est l'attrait mutuel des esprits dirigés vers le même but, le besoin de mieux connaître et personnellement ceux qui cherchent la lumière sur un même point, et aussi le sentiment que la science et la vérité en général ne sont pas les privilèges d'une ou de certaines nations. C'est l'union des efforts, la critique mutuelle et bienveillante que vous cherchez et qui feront le succès de votre congrès. Les savants sont parmi les premiers qui ont renoué les liens cruellement déchirés et qui ont rendu de nouveau leurs congrès vraiment internationaux. Nous vous en félicitons ici, dans un pays où nous connaissons par l'expérience de notre histoire et de notre existence le bienfait de la fructification réciproque des différentes races et différentes langues en matières intellectuelles et morales.

Meine Damen und Herren!

Der Rhein, dieser alte, natürliche Verkehrsweg, dem von jeher nicht nur die materiellen, sondern auch die geistigen, kulturellen Güter aus Holland nach der Schweiz folgten, hat uns auch diesen Kongreß gebracht. Mein besonderer Gruß gilt unserer Schwesterhochschule Delft, wo vor zwei Jahren der erste dieser Kongresse stattfand. Daß Sie von Holland nun zu uns gekommen sind, dürfte auch dem Umstande zu verdanken sein, daß beide Länder «neutrale Staaten» sind. Dazu, daß dieser Ausdruck immer mehr seine Bedeutung verliere, möge auch dieser Kongreß beitragen. Die Wissenschaft, die nicht an Nation, politische Grenzen und Anschauungen gebunden ist, hat schon längst die alten Beziehungen wieder herstellen müssen und auch herstellen können, weil sie ihre Jünger einander auch menschlich näher bringt.

Die Wissenschaft braucht die Zusammenarbeit der verschiedenen Nationen mit ihren verschiedenen Mitteln, Auffassungen, Methoden und Temperamenten, die sich gegenseitig ergänzen und fördern sollen.

Der Lehrkörper der E.T.H. freut sich darüber, so viele Kollegen ausländischer und einheimischer Hochschulen hier begrüßen zu dürfen. Unser Haus ist vornehmlich der Ausbildung künftiger Ingenieure gewidmet. Unsere Technik ist Nutzenanwendung Ihrer Forschungsergebnisse. Mag Ihnen ob der Art, wie uns die Anforderungen der Technik mit Ihrer feinen Herzensarbeit umzugehen zwingen, auch etwa weh zumute werden, mit der Zeit versöhnen

Sie sich doch wieder mit unserem Schaffen, das in vielen Fällen erst der weitem Menschheit Kunde von Ihrem Wirken bringt und es ihr zur Wohltat und zum Bedürfnis werden läßt. Wir Techniker können anderseits nur dann unsere Kunst vollwertig ausüben, wenn wir Sie verstehen und Ihr Schaffen richtig würdigen.

Möge dieser Kongreß Ihre Erwartungen bezüglich Pflege der Wissenschaft erfüllen, mögen sich in unserm Hause aber auch die Menschen näher treten, das ist der Wunsch unserer Hochschule.»

Nach dieser Rede begaben sich die Teilnehmer in die Arkadenhallen des Mittelbaues, wo sie den Abend in reger Unterhaltung beschlossen.

Am folgenden Morgen begann die Abwicklung des fast überreichen Programms von Vorträgen, das bis zum Freitag in eifriger Arbeit bewältigt wurde. Montag, Mittwochvormittag und Freitagnachmittag waren allgemeinen Vorträgen gewidmet. In der übrigen Zeit tagte der Kongreß in 3 Sektionen (Allgemeine Mechanik, Festigkeit fester Körper, Hydro- und Aeromechanik. (Man vergleiche hierüber das Inhaltsverzeichnis am Schluß des Bandes.) Nur der Nachmittag des Mittwochs (15. September) war der Erholung gewidmet. Die Kongreßgäste besichtigten, einer lebenswürdigen Einladung von Prof. DE QUERVAIN folgend, bei herrlichem Wetter die im Wald auf dem Zürichberg gelegene *seismologische Station*, insbesondere das dort aufgestellte 20 Tonnen-Pendel. Der Abend vereinigte alle Gäste zu einem Essen im *Waldhaus Dolder*, das vom Organisationskomitee dargeboten wurde. Es nahm unter der Leitung von Rektor ANDREAE einen angeregten Verlauf. Prof. STODOLA sprach im Namen des O.C. die Begrüßungsrede, in der er insbesondere die Stellung des Technikers und Ingenieurs zur reinen Forschung präziserte. Prof. v. MISES, Berlin, und Prof. JOUGUET, Paris, dankten in freundlichen Worten dem Organisationskomitee für die gelungene Durchführung der Veranstaltung. Prof. BÄSCHLIN überbrachte den Gruß der Gesellschaft ehemaliger Studierender der E.T.H. Prof. v. KÁRMÁN hielt die Rede auf die Damen und hob launig hervor, daß der Kongreß sich nun auch ihrer aktiven Mitwirkung erfreuen darf. Erst gegen Mitternacht zerstreuten sich die Gäste.

Am Donnerstag abend nach Schluß der Sektionssitzungen fand in der von der Abendsonne vergoldeten Aula der Hochschule ein Empfang des Präsidenten des Schweiz. Schulrates, Prof. Dr. A. ROHN, am Kongreß statt. Prof. MEISSNER schilderte den Erschienenen die Verdienste, die sich der Schweiz. Schulrat und besonders sein Präsident um das Gelingen des Kongresses erworben haben. Er dankte Präsident Rohn vor allem für die materielle Unterstützung, die das O.C. seiner Initiative zu verdanken hat und die allein erlauben wird, an die Herausgabe der Kongreßverhandlungen und damit an die Erhaltung und Verbreitung der Ergebnisse der Tagung heranzutreten.

Im Namen und Auftrag der Gäste schloß sich diesem Dank an der Präsident des 1. Mechanikkongresses, Prof. BIEZENO, Delft. Er pries die Großzügigkeit, mit welcher die E.T.H. ihre Aufgaben auffaßt. Präsident ROHN bezeugte in seiner Erwiderung seine Freude darüber, daß der E.T.H. die Ehre geworden, den Kongreß zu beherbergen und daß sie so Gelegenheit fand, die Bestrebungen der wissenschaftlichen Mechanik zu unterstützen, die ja den Kern der Ausbildung der Ingenieure darstellt.

An diesen Akt schloß sich eine Vorstellung der Gäste an. Man genoß den herrlichen Rundblick über Stadt und Berge, welche eine prachtvolle Abendsonne verklärte.

Nachdem dann am Freitag mit einem allgemeinen Vortrag des Herrn LEVI-CIVITA das Programm sein Ende gefunden hatte, trat der Kongreß zu einer Schlußsitzung zusammen, die durch eine vorhergehende Sitzung des I.C.C. vorbereitet worden war.

KONGRESS-BERICHT

Prof. MEISSNER teilte die gefaßten Beschlüsse mit:

Da das I.C.C. sehr zahlreich geworden ist, soll die wissenschaftliche Vorbereitung künftiger Kongresse vorgenommen werden vom lokalen organisierenden Komitee in Verbindung mit einem Exekutivkomitee, das aus den Präsidenten früherer Kongresse bestehen soll (z. Z. aus den HH. v. Kármán, Biezeno, Meissner). Etwa $\frac{3}{4}$ Jahre vor dem Kongreß soll dagegen das I.C.C. um seine Wünsche und Bedürfnisse, das Programm betreffend, angefragt werden.

Herr Prof. C. W. OSEEN, Upsala, hat im Namen seiner schwedischen Fachgenossen und im Einverständnis mit dem schwedischen Kultusminister an den Kongreß die Einladung ergehen lassen, den nächsten Kongreß im *August 1930 in Stockholm* abzuhalten. Das I.C.C. hat mit Freude und Dank diese Einladung entgegengenommen und mit Einstimmigkeit beschlossen, sie anzunehmen.

Die Versammelten machten diesen Beschluß mit dem lebhaftesten Beifall zu dem ihrigen. Zum Schluß stattete Prof. G. I. TAYLOR, Cambridge, in sehr liebenswürdiger Weise dem Organisationskomitee und besonders seinem Vorsitzenden den Dank der Kongreßgäste für die geleistete Arbeit ab und beglückwünschte zum gelungenen Verlauf der Tagung. Prof. MEISSNER nahm den Dank entgegen, um ihn an seine Mitarbeiter weiterzugeben, besonders an seine Kollegen im O.C. und an seine Assistenten Dr. HONEGGER, FISCHER und GRIMM, deren Verdienste er hervorhob. Die Versammlung akklamierte.

Der Vorsitzende schloß hierauf den Kongreß mit dem Wunsch:

Auf Wiedersehen 1930 in Stockholm!

Extrazüge führten hierauf die Kongreßteilnehmer nach dem Hotel Uto-Kulm auf dem Uetliberg, wo sie vom Regierungsrat des Kantons Zürich und vom Stadtrat der Stadt Zürich zum Schlußbankett eingeladen waren. Dort begrüßte die Gäste Herr Regierungspräsident Dr. A. STREULI: Zürich und seine Behörden wissen es zu schätzen, wenn wissenschaftliche Tagungen von Bedeutungen dorthin verlegt werden. Für das O.C. dankte Rektor ANDREAE im Namen der Gäste Prof. HAHN, Nancy.

Trotz der Ermüdung, die sich nachgerade bei vielen eingestellt hatte, und trotz der Abschiedsstimmung, die in der Luft lag, nahm dieser Schlußakt einen angeregten Verlauf. Ein kurzer Blick noch auf das Lichtermeer der nächtlichen Stadt, eine rasche Fahrt talwärts, Händeschütteln und Lebewohl in vielen Sprachen am Bahnhof Selnau! Die Schar der Kongreßgäste stob auseinander und der 2. Mechanikkongreß hatte sein Ende gefunden.

I.

ALLGEMEINE VORTRÄGE

Vorsitzende in den Sitzungen die Herren

Taylor - Cambridge, Prandtl - Göttingen, v. Mises - Berlin,
Jouguet - Paris

Elastische Oberflächen-Querwellen

Von E. Meißner, Zürich

Die Vorstellungen über die Beschaffenheit des Erdinnern bewegen sich auch heute noch in Gegensätzen, trotz allen Bemühungen nach genauern Kenntnissen. Es gibt kaum ein Gebiet der Natur, das der Erforschung schwerer zugänglich wäre, als der Planet, auf dem wir unser Dasein verbringen. Wir haben eben heute noch kein wirksames Mittel, ihn zum Antworten auf unsere Fragen zu zwingen, und was er uns von selber offenbart, ist wenig und vieldeutig genug. Wenn wir von seiner Haut von einigen Kilometern Dicke absehen, die direkter Beobachtung zugänglich ist, so erfahren wir aus seinem Verhalten nach außen, andern Himmelskörpern gegenüber, nicht viel mehr als seine Gesamtmasse und seine Hauptträgheitsmomente; Schwere-messungen geben nur ein sehr diffuses und vieldeutiges Bild von Unregelmäßigkeiten der Massen-Verteilung in der äußersten Kruste. Es gibt nur zwei Erscheinungen, die uns etwas mehr Aufschluß geben: Die Verlagerungsgeschwindigkeit der Drehachse im Erdkörper (Breite-schwankungen) und die Größe der elastischen Fluten, wie sie neuerdings durch Horizontal-pendelbeobachtungen meßbar geworden sind. Sie zeigen, daß die Erde sich gegenüber relativ kurz wirkenden Kräften recht steif verhält, aber sie geben nicht mehr als zwei Mittelwerte für das Maß der Abweichung vom ganz starren Verhalten. Wenn wir aber versuchen, Festigkeits-schlüsse zu ziehen aus dem Umstande, daß hohe Gebirge und tiefe Gräben bestehen bleiben können, so zeigt sich, daß sich zwei Umstände gar nicht abschätzen lassen: der Einfluß sehr langer Zeiten und derjenige sehr großer Drucke. Schließlich bleibt als einzige Erscheinung, welche uns im einzelnen Aufschluß über das Erdinnere geben kann, übrig das *Erdbeben*, d. h. die Art, wie sich Gleichgewichtsstörungen, die ihren Sitz in einigen 10—100 km Tiefe haben, durch den Erdball hindurch fortpflanzen.

Völlig sicher gestellt erscheint da die Existenz von zwei Arten räumlicher Wellen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen; sie machen sich als die sog. *P*- und *S*-Einsätze im Bebildiagramm kenntlich. Wenn man zentrische Symmetrie des Erdballs voraus-setzt und die Laufzeiten als Funktionen der Herddistanz aufnimmt, so kann man ohne weitere Voraussetzungen rein kinematisch die Laufgeschwindigkeit als Funktion der Tiefe ermitteln. Es hat sich so herausgestellt, daß diese Funktion recht ausgeprägte Knicke aufweist, Unstetig-keiten, die sich wohl nur durch Materialunterschiede erklären lassen. Die Beobachtungen haben daher dazu geführt, im Bezug auf die elastischen Eigenschaften der Erde Schalenstruktur zuzuschreiben.

Die Frage liegt nahe, ob die beobachteten Erscheinungen sich mit der klassischen Elastizitätstheorie beschreiben lassen. Das ist keineswegs ausgemacht, denn das Material unter-liegt in großen Tiefen einer nach Millionen Atmosphären zählenden Vorspannung, über deren Einfluß auf das elastische Verhalten wir gar nichts wissen; Experimente, wie sie Herr BRIDGMAN an diesem Kongreß besprechen wird, gehen nämlich nur auf 12—20,000, höchstens einmal auf 40,000 kg/cm² hinauf. Außerdem haben wir die Gravitation als neues Moment zu berücksichtigen. Endlich muß die Annäherung der Erde an ihre hydrostatische Gleichgewichts-form und die Tatsache des isostatischen Ausgleichs zur Vorsicht mahnen.

Trotzdem scheint es, daß für die ganz kurzperiodischen Kraftwirkungen der Seismologie die elastischen Grundgesetze (eventuell unter erweiterter, Vorspannung und Gravitation berück-sichtigender Form) zutreffen. In der Tat, faßt man die Erde als isotropes, elastisches Medium auf, dessen elastische Moduln *E*, *ν* und *G* Funktionen der Tiefe *z* sind, so erscheinen die zwei erwähnten Arten von Bebenwellen als Kondensations- und Schiebungswellen, die durch die Beziehungen

Kondensations-
 Geschwindigkeit der
 Schiebungs-

Wellen gleich

$$\left[\frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right]^{1/2}$$

$$\left[\frac{G}{\rho} \right]^{1/2}$$

mit den Moduln und der Dichte ρ verbunden sind. Eindrucksvoll wird diese Tatsache dadurch erhärtet, daß die schon recht verwickelten Reflexionsgesetze elastischer Wellen sich insofern bestätigen, als die Einsätze mehrfach an der Erdoberfläche reflektierter Wellen oft beobachtet werden. Beide Geschwindigkeiten nehmen nach der Tiefe erst rasch, dann langsam zu. Die Poissonsche Zahl ν bleibt nahezu konstant.

Die Hauptergebnisse der Seismologie sind mit dem Gesagten schon gekennzeichnet. Wenig Nutzen hat sie bis heute ziehen können aus dem weitem Verlauf der Bebildiagramme in der Maximalphase der Bewegung. Das ist um so beachtenswerter, als diese Phase schön regelmäßige Oszillationen mit wenig veränderlicher Periode aufweist im Gegensatz zu der unregelmäßigen Zickzacklinie der Vorläufer. RAYLEIGH hat zwar schon früh darauf hingewiesen, daß dieser Phase Wellen entsprechen müssen, die sich wesentlich an der Erdoberfläche ausbreiten, also die Energie besser zusammenhalten, als räumliche. Er selber hat in einem homogenen Halbraum auch solche Wellen nachgewiesen. Sie schwingen in einer Vertikalebene durch die Fortpflanzungsrichtung. Aber fatalerweise zeigen diese «Rayleighwellen» keine Dispersion; sie laufen alle gleich schnell und sind zur Erklärung des schwingenden Verlaufs der Bewegung unbrauchbar. Zudem zeigt die Beobachtung, daß die Bewegung in der Maximalphase häufig normal zur Fortpflanzungsrichtung steht und daß sie vom Vertikalseismometer nicht registriert wird.

Wellen, die in dieser letztern Weise quer und horizontal schwingen, sollen in der Folge als *Querwellen* bezeichnet werden.

In einem homogenen elastischen Halbraum sind solche Wellen nicht möglich. Indessen hat 1911 A. E. H. LOVE¹⁾ gezeigt, daß Querwellen auftreten können, wenn man dem homogenen Halbraum eine ebenfalls homogene Rindenschicht mit andern elastischen Eigenschaften überlagert.

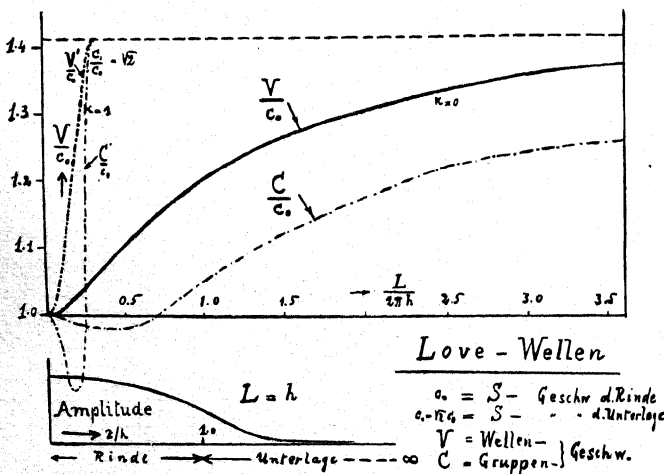


Abb. 1.

Unterlage genommen werden. Den praktischen Verhältnissen entspricht etwa $c_1 = \sqrt{2} c_0$, welche Relation der Abb. 1 zu Grunde gelegt ist. Die Loveschen Wellen klingen mit der Tiefe ab nach einem Exponentialgesetz (Abb. 1 links unten). Ist h die Dicke der

Es werde in der Folge mit c die Geschwindigkeit räumlicher Schiebungswellen bezeichnet; es ist $c = \sqrt{G/\rho}$ eine Funktion der Tiefe z , die sich grundsätzlich aus der Laufzeitkurve der S -Einsätze bestimmen läßt. Sie charakterisiert zusammen mit der Dichte $\rho(z)$ das Material vollständig, soweit nur kompressionslose Formänderungen auftreten, wie dies bei Querwellen der Fall ist.

Im Loveschen Beispiel (Abb. 1) muß der Wert $c = c_0$ für die Rinde kleiner als der Wert c_1 für die

¹⁾ A. E. H. LOVE. Some Problems of Geodynamics. Cambridge 1911.

Rinde, so laufen Wellen, die wesentlich kürzer sind als h mit Geschwindigkeiten wenig größer als c_0 , während sehr lange Wellen nahezu mit c_1 laufen. Die Dispersion ist normal. Es gibt Wellen mit $k = 0, 1, 2, 3$ etc. Knotenebenen; praktisch kommen nur die ersten in Betracht, weil Wellen mit Knotenebenen viel zu langsam nach der Tiefe abklingen, um bei Beben (deren Herd immer sehr oberflächlich liegt) miterregt werden zu können. Fig. 1 zeigt die Dispersionskurven für $k = 0$ und $k = 1$. V ist die Laufgeschwindigkeit der Welle, L ihre Länge. Die strichpunktierten Kurven geben den Verlauf der Gruppengeschwindigkeit C , die, wie bei Wasserwellen, eigentlich maßgebend ist; sie hat ein Minimum in der Gegend von $L = 2h$.

Dem Loveschen Beispiel von Querwellen habe ich 1921 ein zweites zugefügt²⁾, das zeigt, daß die bei Love vorausgesetzte Rindenschicht nichts wesentliches ist, daß Querwellen vielmehr auch möglich sind, wenn die elastischen Eigenschaften sich stetig mit der Tiefe ändern. Bezeichnet man mit ζ die von einem über der Oberfläche liegenden Niveau aus gerechnete Tiefe, so hatte ich angenommen

$$G = G_0 \zeta^2 \quad \rho = \rho_0 \zeta \quad \text{also} \quad c = c_0 \zeta^{1/2}$$

Durch asymptotische Entwicklung der Lösung ließ sich die Form der Dispersionskurve bestimmen; sie zeigte keine Asymptote und verlief ähnlich wie die der Abb. 9.

Von diesen beiden Beispielen hat die praktische Seismologie neuerdings Gebrauch gemacht. GUTENBERG³⁾ hat den Unterschied im Verhalten der Querwellen auf dem eurasischen Kontinent einerseits und unter dem pazifischen Ozean andererseits an Hand dieser zwei Fälle gedeutet. Nach ihm wäre eine Lovesche Rinde in Eurasien vorhanden, würde aber im pazifischen Ozean fehlen.

Diese Folgerung scheint mir wenig schlüssig, wenn sie auch in groben Zügen das Richtige treffen mag. Die Laufgeschwindigkeit der Querwellen, auf der sie beruht, hängt nicht allein von der Funktion $c(z)$ ab, sondern auch noch von der Tiefenverteilung der Dichte resp. des Schubmoduls. Zwei Funktionen, z. B. $c(z)$ und $\rho(z)$, bestimmen das Dispersionsgesetz und es stellt sich die grundsätzliche Frage, wie sie es beeinflussen. Dazu möchte ich im folgenden einen Beitrag liefern:

In einem elastischen Halbraum seien die Funktionen $G(z)$ und $\rho(z)$ und damit auch $c(z)$ gegeben. Die x -Richtung sei die Fortpflanzungsrichtung der Oberflächenwellen. Für die zur xz -Ebene normale Verschiebung η gelten dann die Gleichungen der Elastizitätstheorie:

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad \tau_{yx} = G \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

Für eine ebene Welle hat man den Ansatz

$$y = u(z) \cos(p t - f x)$$

wobei p die Frequenz, $T = 2\pi/p$ die Periode, L die Wellenlänge bedeutet und die Laufgeschwindigkeit durch $V = p/f$ gegeben ist. Es folgt für die Amplitudenfunktion $u(z)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left(G \frac{du}{dz} \right) + (p^2 \rho - f^2 G) u = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

und die Spannungsfreiheit der Oberfläche ergibt die Randbedingung:

²⁾ E. MEISSNER. Elastische Oberflächenwellen mit Dispersion in e. inhomog. Medium. Vierteljahrsschr. Nat. Forsch. Ges. Zürich LXVI (1921). Elast. Oberflächenwellen bei Mitschwingen e. trägen Rindenschicht. ibid. loc. LXVII (1922).

³⁾ GUTENBERG: Der Aufbau der Erde, Berlin 1925, S. 111.

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

Nun möge ein Beispiel illustrieren, wie das Problem weiterhin zu formulieren ist. Nimmt man für G und ρ dasselbe Exponentialgesetz und fordert, wie das bis jetzt geschah, nur Abklingen der Amplitude mit der Tiefe, so läßt sich dies bei ganz willkürlichen Werten von p und f erfüllen. Wellen von gegebener Länge könnten, je nach der Art, wie sie mit der Tiefe abklingen, mit jeder beliebigen Geschwindigkeit laufen. Von Dispersion im gewöhnlichen Sinn wäre keine Rede. Bei der Prüfung dieses zunächst etwas überraschenden Resultats stellt sich dann aber heraus, daß trotz des Abklingens mit der Tiefe die auf die Oberflächeneinheit bezogene Energie solcher Wellen unendlich groß wird, so daß derartigen Wellen physikalische Bedeutung nicht zukommt. Sinngemäß ist also die Forderung des Abklingens nach unten durch die schärfere zu ersetzen, daß jene Energie endlich sein muß. Dies gibt die Zusatzbedingung

$$\int_0^\infty \rho u^2 dz = \text{endlich} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Unter gewissen für das seismologische Problem zulässigen Voraussetzungen kann man durch die Transformation

$$\zeta = \int_0^z \rho dz$$

Gleichungen (1), (2), (3) auf folgende zurückführen

$$L(u) + \lambda u = 0 \quad (1^*) \quad \left(\frac{du}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} = 0 \quad (2^*) \quad \int_0^\infty u^2 d\zeta = \text{endlich} \quad \dots \quad (3^*)$$

wobei gesetzt worden ist

$$L(u) = \frac{d}{d\zeta} \left(G \cdot \rho \cdot \frac{du}{d\zeta} \right) - f^2 \frac{G}{\rho} \cdot u \quad \lambda = p^2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

Der Differentialausdruck $L(u)$ enthält also noch den Parameter f der Wellenlänge.

Man denke sich die Wellenlänge festgehalten. Dann ist durch diese Gleichungen für den Frequenzparameter λ ein *singuläres Randwertproblem* aufgestellt, wie es von H. WEYL⁴⁾ im Anschluß an das Hauptachsenproblem beschränkt quadratischer Formen behandelt worden ist.

Weyl unterscheidet zwei Fälle, den Grenzkreis- und den Grenzpunkttypus. Da im seismologischen Problem immer $\lim_{z \rightarrow \infty} c(z) > 0$ vorausgesetzt werden darf, so kommt dort nur der Grenzpunkttypus in Frage. Das Spektrum einer solchen Differentialgleichung besteht aus zwei Bestandteilen: einem abzählbaren Punktspektrum gewöhnlicher Art und einem kontinuierlichen Streckenspektrum, von denen jedoch der eine oder andere fehlen kann. Existiert ein Punktspektrum, so gehören zu dem entsprechenden Wert der Wellenlänge ebensoviel Werte der Frequenz resp. Laufgeschwindigkeit, als Eigenwerte vorhanden sind; die zugehörigen Wellen unterscheiden sich durch die Zahl der Knotenebenen. Praktisch kommen dann freilich wieder nur die kleinsten Eigenwerte in Frage, weil zu den höhern tief eindringende Wellenformen

⁴⁾ H. WEYL: Diff. Gleichungen mit Singularitäten. Math. Ann. 68 (1909).

gehören, die nicht erregt werden. Wenn man nun die Wellenlänge verändert, so wird jedem Eigenwert eine Dispersionskurve zugeordnet *). Die Theorie läßt die Möglichkeit offen, daß dabei Eigenwerte verschwinden oder neu auftreten. In der Tat zeigen die Abb. 1, 5, 6, daß Dispersionskurven plötzlich abbrechen; zur Umgebung der Abbruchstelle gehören dann Wellen, die sehr große Energie besitzen, praktisch also nicht vorkommen werden.

Wenn für ein Medium kein Punktspektrum existiert, so können in ihm Querwellen nicht auftreten. (Beispiel: der homogene Halbraum.) Als Gegenstück dazu gibt es Medien mit unendlich vielen Eigenwerten und -Funktionen; letztere zeigen ähnliche Oszillationseigenschaften, wie diejenigen gewöhnlicher Randwertprobleme. Hinreichend für diesen Fall ist die Bedingung, daß die Funktion $c(z)$ über alle Grenzen wachse. (Außer dem unter ²) erwähnten Beispiel der Fall der Fig. 9, wo allerdings bloß die zwei ersten Dispersionskurven gezeichnet sind.) Aber auch der mittlere Fall kommt vor, wo die Zahl der Eigenwerte endlich ist, aber mit abnehmender Wellenlänge mehr und mehr zunimmt (Beispiele der Abb. 1—7).

Soll die Abhängigkeit des Dispersionsgesetzes vom Untergrund geprüft werden, so genügt die hiemit erlangte theoretische Einsicht freilich nicht. Vielmehr sind die Dispersionskurven für möglichst verschiedenartige Medien zu ermitteln und miteinander zu vergleichen **). Da aus den Vorläufern die Funktion $c(z)$ ermittelt werden kann, so wird die Gegenüberstellung solcher Medien besonders interessant sein, die dasselbe $c(z)$, aber verschiedene Dichtegesetze aufweisen. Ist insbesondere in einem Gebiet c konstant, aber ρ (und $G = c^2 \cdot \rho$) veränderlich, so soll das Gebiet *kryptheterogen* heißen, da seine Heterogenität in den Laufzeitkurven der Vorläufer nicht zum Vorschein kommt.

Im Folgenden werden die neuen Fälle aufgezählt, in denen sich die Dispersionskurve ermitteln ließ.

I. Verallgemeinerung des Loveschen Beispiels

Die Abb. 2 zeigt die Dispersionskurve der Wellen ohne Knotenebenen für den oben besprochenen Loveschen Fall ($r = 0$), wo sich eine Rindenschicht über einem homogenen Untergrund befindet, und für zwei weitere Fälle, wo diese Schicht in die Unterlage mehr oder weniger versenkt wird, wie es die Figuren rechts anzeigen. Es ist dabei angenommen, daß der Schubmodul G überall derselbe sei und daß die Dichte in der Schicht 2 mal größer sei als im übrigen Halbraum.

Mathematisch ist eine «Frequenzgleichung» von der Form

$$\operatorname{th}(x) \cdot \frac{x}{ry} \left(1 + \frac{x}{ry} \operatorname{tg} y \right) = \operatorname{tg}(y) - \frac{x}{ry}$$

aufzulösen. Die Schwingungsamplitude wächst nach der Tiefe an, erreicht in der Schicht ein Maximum, um in größeren Tiefen abzuklingen. Bemerkenswert ist, daß auch bei tief liegender Schicht kurze Wellen die der Schicht entsprechende Laufgeschwindigkeit haben und daß auch sie erst unterhalb der Schicht abklingen, also verhältnismäßig tief greifen werden.

*) Man erhält die Gruppengeschwindigkeit C , und damit die Tangente an die Dispersionskurve aus der Beziehung:

$$VC = \int_0^\infty G u^2 dz : \int_0^\infty \rho u^2 dz$$

**) Das Angeben integrierbarer Fälle genügt dabei noch nicht; die Frequenzgleichung muss sich auch numerisch lösen lassen. Es lässt sich z. B. ein sehr interessanter Fall durch Besselfunktionen mit komplexem Index lösen, aber da die Unbekannte der Frequenzgleichung im Index auftritt, so ist eine numerische Lösung praktisch ausgeschlossen.

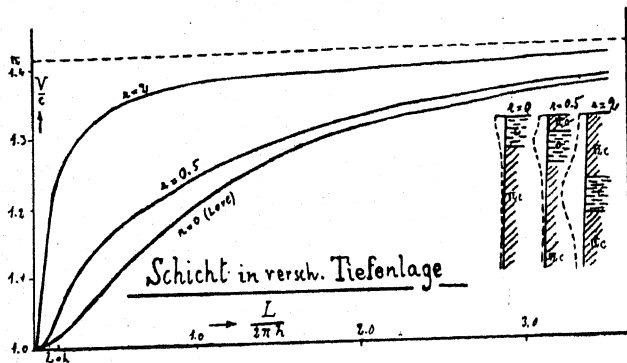


Abb. 2.

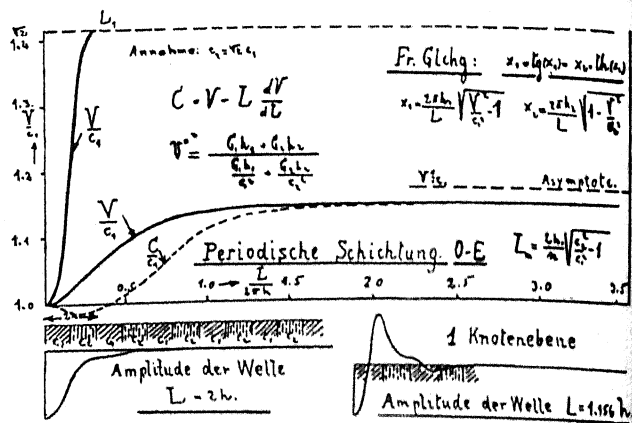


Abb. 5.

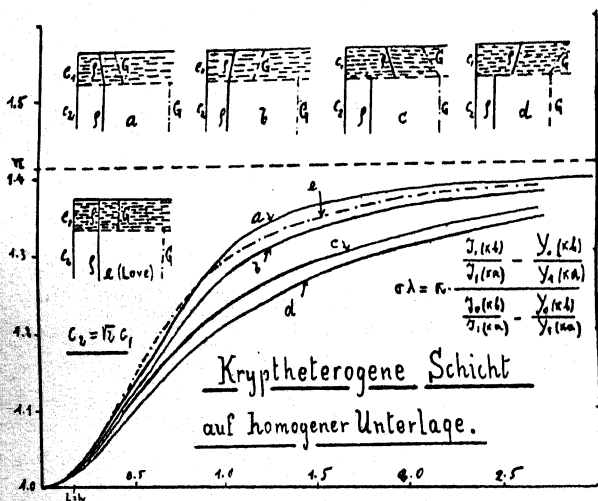


Abb. 3.

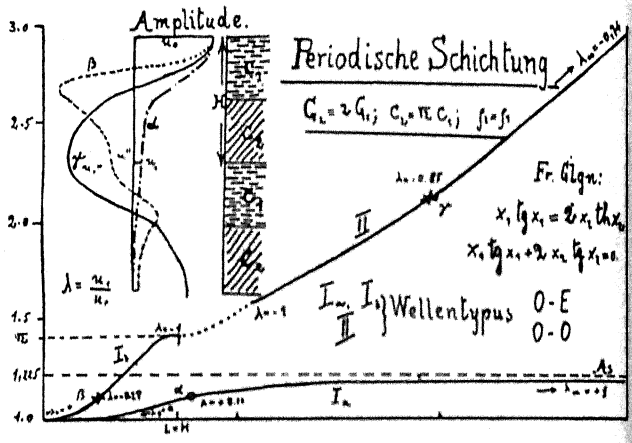


Abb. 6.

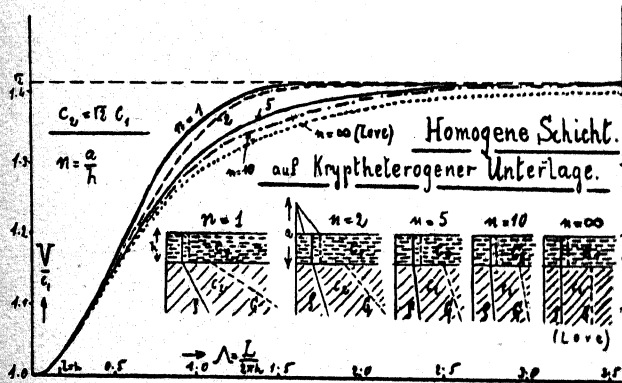


Abb. 4.

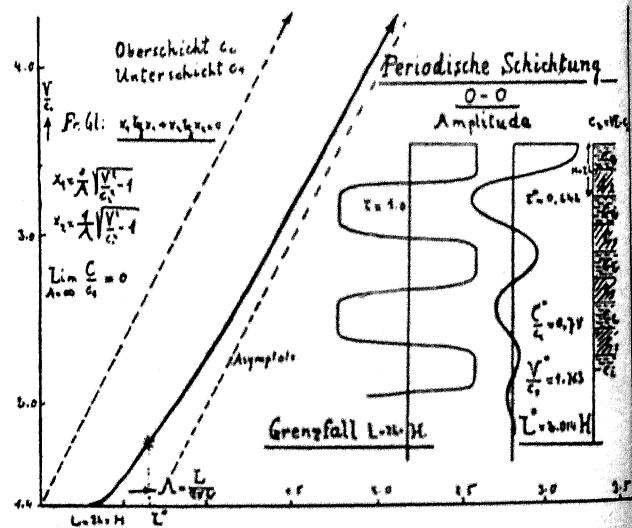


Abb. 7.

II. Kryptheterogene Schicht auf homogener Unterlage

An Stelle der Loveschen homogenen Rindenschicht wird eine kryptheterogene Schicht gesetzt, in der Dichte und Schubmodul linear ab- oder zunehmen. In Abb. 3 sind die Dispersionskurven der Wellen ohne Knotenebenen dargestellt für die 4 oben skizzierten Fälle $a-d$, während die strichpunktierte Kurve dem zum Vergleich herangezogenen Loveschen Fall entspricht. In den Fällen a und b verläuft die Dichte, in den übrigen der Schubmodul stetig. In den Fällen a und c nimmt die Dichte in der Schicht nach unten zu, in den andern ab. Die Dispersionskurven zeigen für alle diese Medien im Gebiet der praktisch vorkommenden kleinen Wellenlängen eine nur geringe Streuung, so daß aus dem Dispersionsgesetz praktisch nicht auf die Art des Mediums geschlossen werden könnte.

III. Homogene Schicht auf kryptheterogenem Untergrund

In Abbildung 4 sind die elastischen Eigenschaften von Schicht und Untergrund gegenüber Abb. 3 vertauscht. Die Dichte verläuft stetig; die vier dargestellten Fälle entsprechen verschieden großen Dichtegradienten. Der Fall von Love erscheint wieder als Grenzfall. Wie zu erwarten war, sind die Dispersionskurven in allen Fällen sehr ähnlich für kleine Wellenlängen bis zu etwa der dreifachen Schichtdicke; die Natur des Untergrundes ist für sie ohne Belang.

Die Lösung im Untergrund wird hier durch eine Besselfunktion nullter Ordnung mit rein imaginärem Argument dargestellt; sie klingt asymptotisch wie eine Exponentialfunktion ab. Die zu lösende Frequenzgleichung hat die Form

$$y \operatorname{tg} y = k \cdot x \cdot \frac{K_0'(x)}{K_0(x)} \quad 5)$$

IV. Periodische Schichtung

Die Figuren 5 und 6 zeigen Dispersionskurven und Amplitudenverlauf für den Fall, daß gleich dicke homogene Schichten mit verschiedenen c -Geschwindigkeiten miteinander abwechseln, wie dort skizziert ist. Die oberste und alle Schichten mit ungerader Ordnungsnummer haben dasselbe $c = c_1$, die Schichten gerader Nummer dasselbe $c = c_2 = \sqrt{2} c_1$; V bedeutet die Laufgeschwindigkeit der Wellen. Es sind die Dispersionskurven für Wellen mit 0 und 1 Knotenebenen dargestellt. Wie in den frühern Fällen nähert sich die Geschwindigkeit V der erstern einem Grenzwert V^* , der indessen weder mit c_1 , noch mit c_2 identisch ist, vielmehr durch

$$V^* = \frac{G_1 h_1 + G_2 h_2}{\frac{G_1 h_1}{c_1^2} + \frac{G_2 h_2}{c_2^2}}$$

gegeben ist. Die Wellen mit einer Knotenebene pro Doppelschicht brechen wie in den frühern Beispielen bei einer Wellenlänge L_1 ab, die der Laufgeschwindigkeit c_2 entspricht (Abb. 5), setzen indessen für größere Wellenlängen wieder ein, wie aus Abb. 6 ersichtlich ist (Kurve II), die z. T. die Resultate der Abbildung 5 wiederholt. Mit der Unterbrechung ist eine Veränderung des Amplitudengesetzes verbunden, und die langen Wellen klingen, wie aus den Angaben der Figur ersichtlich ist, recht langsam ab. Drei typische Wellen, die den mit α , β , γ bezeichneten Punkten entsprechen, sind links oben nach ihrer Amplitudenform herausgezeichnet.

Abbildung 7 zeigt den Fall, wo die größere c -Geschwindigkeit in den Schichten mit un-

5) Bezeichnungen nach WATSON: Theory of Bessel Functions. Cambridge. 1922, p. 78.

gerader Ordnungsnummer statthat. Die zugeordneten Wellen laufen verhältnismäßig schnell, klingen aber langsam mit der Tiefe ab.

V. Kryptheterogenes, periodisch geschichtetes Medium

Abbildung 8 zeigt die Resultate für ein durchwegs kryptheterogenes Medium. Die Dispersionskurven für die nach Zahl der Knotenebenen verschiedenen Wellenarten sind Hyperbeln. Das Medium besteht aus einer Schichtenfolge, in welcher sowohl Schubmodul wie Dichte von Schicht zu Schicht vom einfachen zum doppelten Wert hin- und hergehen. Außer den Laufgeschwindigkeiten $V^{(n)}$ sind hier auch noch die Gruppengeschwindigkeiten C eingezeichnet. Sie gehen für lange Wellen gegen null.

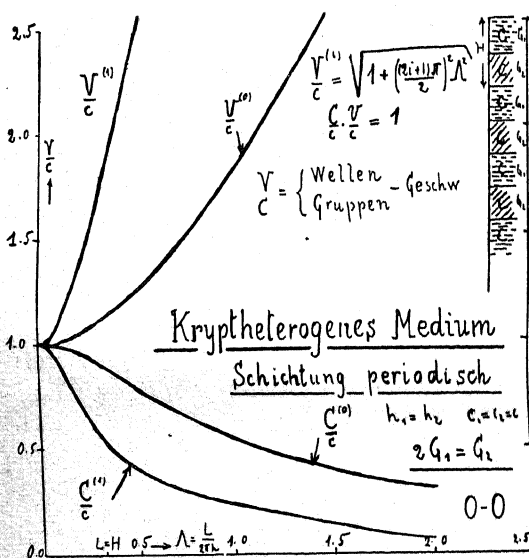


Abb. 8.

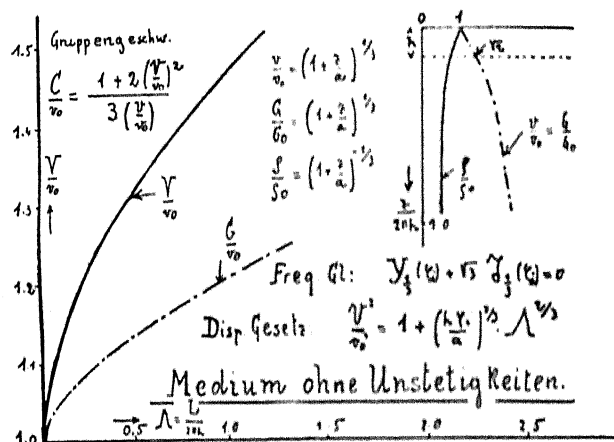


Abb. 9.

VI. Medium ohne Unstetigkeiten

Die Abbildung 9 betrifft ein Medium, das im Gegensatz zu den bisherigen keine Unstetigkeiten in seinen Eigenschaften aufweist. Es variieren G , ρ und c gemäß den Formeln

$$G = G_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^{1/3} \quad \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^{-1/3} \quad c = c_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^{1/3}$$

Das Integral der Gleichung (4) wird hier durch Besselfunktionen von der Ordnung $\frac{1}{3}$ gegeben. Die Frequenzgleichung nimmt die Form an:

$$Y_{\frac{1}{3}}(\zeta) + \sqrt{3} J_{\frac{1}{3}}(\zeta) = 0$$

Da für die hier auftretenden Besselfunktionen Tafeln vorhanden sind⁵⁾, so können die Lösungen ζ_i numerisch gefunden werden. Die zugehörigen Dispersionskurven sind algebraisch; man hat für die Laufgeschwindigkeit V und für die Gruppengeschwindigkeit C die Beziehungen

$$\left(\frac{V}{c_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{h}{a} \zeta_i\right)^{2/3} \Lambda^{2/3} \quad \frac{C}{c_0} = \frac{1 + 2 \left(\frac{V}{c_0}\right)^2}{3 \left(\frac{V}{c_0}\right)} \quad \Lambda = \frac{L}{2\pi h}$$

die in Abb. 9 dargestellt sind *). Das hier gegebene Beispiel ist das erste Beispiel eines durchwegs stetigen Mediums, für welches die Querwellengesetze elementar berechenbar sind.

Die hiemit vorgeführten neuen Beispiele zeigen, daß sehr ähnliche Dispersionskurven, die insbesondere für kurze Wellen fast genau übereinstimmen, zu sehr verschieden gearteten elastischen Medien gehören können. Selbst wenn die Genauigkeit der Beobachtung der Laufgeschwindigkeiten beträchtlich wäre, würde es schwierig sein, genaue Schlüsse auf das Medium zu ziehen. Wie es heute in Wirklichkeit in diesem Punkte aussieht, ist aus der Fig. 10 zu ersehen, die dem unter ³⁾ erwähnten Buch von GUTENBERG entnommen ist. Sie zeigt, daß die Streuung der Beobachtungen derart beträchtlich ist, daß von einer Dispersionskurve noch kaum gesprochen werden kann. Um so weniger ist es möglich, aus ihr bündige Schlüsse auf die Eigenschaften des Untergrundes zu ziehen.

Wenn die Zukunft einmal ein vor allem homogeneres und auch reicheres Material aus einem engmaschigeren Stationennetz liefern wird, so können möglicherweise die Veränderungen verfolgt werden, die eine Störung bei ihrer Fortpflanzung erleidet. Aus ihnen dürfte dann eine Charakterisierung des elastischen Untergrundes eher möglich sein.

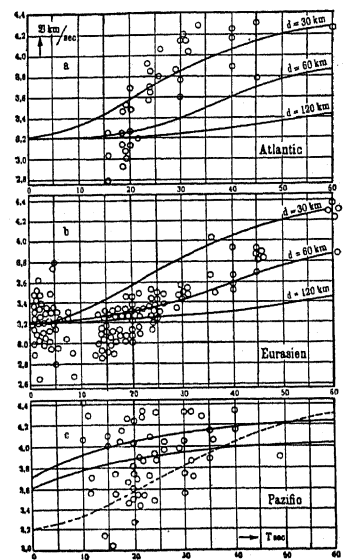


Abb. 10.

*) An Stelle von c_0 steht in der Figur v_0 .

La théorie thermodynamique de la propagation des explosions

Par E. Jouguet, Paris

1. — Les expérimentateurs ont établi que les explosions se propageaient suivant deux modes types, entre lesquels on peut d'ailleurs observer des intermédiaires, la détonation et la déflagration. Pour les mélanges gazeux, la détonation est l'onde *explosive* de BERTHELOT et VIEILLE, dont la vitesse est de plusieurs milliers de mètres par seconde. La déflagration type s'observe au contraire dans un bec BUNSEN ou aux premiers instants de la propagation d'une flamme allumée à l'extrémité ouverte d'un tube (mouvement uniforme de MALLARD et LE CHATELIER): sa vitesse est de l'ordre du mètre par seconde. Dans la détonation, les tranches successives du mélange sont portées à la température d'inflammation par la compression adiabatique; dans la déflagration, cet effet est produit par la conductibilité calorifique.

Une théorie mathématique de ces phénomènes a pu être faite grâce à deux idées: en premier lieu SCHUSTER a songé à utiliser, dans cette question, les travaux de RIEMANN et d'HUGONOT sur les ondes de choc (1893); en second lieu DUHEM a recherché comment le phénomène chimique modifiait l'élasticité du milieu (1896). L'union de ces deux idées se trouve dans une note de VIEILLE (1900) et surtout (et d'ailleurs antérieurement à la note de VIEILLE) dans un mémoire de CHAPMAN qui, grâce à elle, a pu donner une théorie satisfaisante de l'onde explosive (1899).

J'ai moi-même développé depuis 1901 une théorie analogue à celle de CHAPMAN, sans compléter sur quelques points, en me plaçant surtout au point de vue de leur confrontation avec par celles de MM. CRUSSARD, TAFFANEL et DAUTRICHE se trouve dans ma *Mécanique des Explosifs*, parue fin 1916. Je voudrais ici revenir sur les principaux résultats obtenus pour les compléter sur quelques points, en me plaçant surtout au point de vue de leur confrontation avec les expériences anciennes ou récentes.

Propriétés générales

2. — Je supposerai dans mon exposé qu'il s'agit de mélanges gazeux, me réservant de revenir plus tard sur les explosifs solides. L'état d'un mélange gazeux combustible sera défini par son volume spécifique σ , sa température absolue T et une variable chimique α , variant de 0 à 1, marquant le degré d'avancement de la réaction. La vitesse de réaction dépend de l'état actuel; donc

$$\frac{d\alpha}{dt} = g(\alpha, T, \sigma) \quad \dots \quad (1)$$

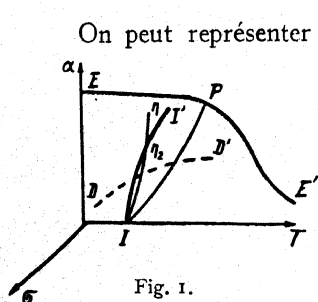


Fig. 1.

On peut représenter l'état du fluide par un point de l'espace T, σ, α (diagramme de DUHEM). Les états d'équilibre correspondent aux points d'une surface EE' . A chaque point de l'espace correspond une vitesse de réaction. Nous admettrons qu'on peut tracer une surface II' séparant les points où la vitesse de réaction est énorme, pratiquement infinie, de ceux où elle est finie. En fait la vitesse de réaction varie rapidement à la traversée d'une zone étroite et non brusquement au passage d'une surface. La notion de surface II' n'est donc qu'une approximation assez grossière, mais les recherches expérimentales sur la température d'inflammation montrent que, tout au moins pour

certaines problèmes, cette approximation est acceptable. Aux hautes températures, la surface II' vient se confondre sensiblement avec EE' .

Traçons encore la surface de DUHEM DD' séparant les points où une réaction adiabatique à volume constant est accélérée (points *intérieurs* à DD' , au-dessous de DD' sur la fig. 1) de ceux où une telle réaction est ralentie (points *extérieurs*). Cette surface coupe la surface II' suivant une ligne ε .

3. — Notre théorie des flammes les considère comme des *quasi-ondes de choc et combustion*, c'est-à-dire comme des zones très étroites où les variables α , T , σ subissent des variations très rapides. En première approximation, ces quasi-ondes seront regardées comme des surfaces d'onde rigoureuses où α , T , σ subissent une discontinuité. Etudions ici les mouvements par tranches parallèles normales à ox . Soient 1 et 2 les états du fluide avant et après le front de l'onde, U l'énergie interne spécifique, p la pression (fonctions connues de α , T , σ), u la vitesse du fluide, D_1 , D_2 les célérités de l'onde par rapport à la matière dans les états 1 et 2. Les équations des ondes de choc et combustion sont:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1} D_1 &= \frac{1}{\sigma_2} D_2 = \frac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1} \\ \frac{1}{\sigma_1^2} D_1^2 &= \frac{1}{\sigma_2^2} D_2^2 = \frac{p_2 - p_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Equations de RIEMANN} \\ \dots \dots \end{array} \quad (2)$$

$$(p_1 + p_2)(\sigma_2 - \sigma_1) + 2(U_2 - U_1) = 0 \quad \text{Equation d'HUGONIOT}$$

La transformation du fluide à l'intérieur de la quasi-onde est représentée par une ligne IP_2 qui pénètre forcément dans la région des vitesses de réaction infinies. Nous admettrons que le point final P_2 est situé sur la surface d'équilibre EE' , si bien que l'état du fluide en ce point vérifiera l'équation

$$g(\alpha_2, T_2, \sigma_2) = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

Nous dirons alors que l'onde de choc et combustion est *complète*, ce mot signifiant non pas que la combustion est rigoureusement totale, mais qu'elle amène en un point de la surface d'équilibre. D'ailleurs la dissociation est généralement faible, la combustion est généralement presque totale et α_2 est voisin de 1. Quelquefois cependant on peut être conduit à envisager des dissociations assez notables.

L'état 1 étant un état homogène de repos (α_1, T_1, σ_1 constants, $u_1 = 0$) (2) et (3) définissent les quantités D_1 , D_2 , α_2 , T_2 , σ_2 , u_2 (et par suite p_2) en fonction de l'une d'entre elles. Représentons, avec M. CRUSSARD, p_2 en fonction de σ_2 . La courbe (dite d'HUGONIOT) a l'allure $FPBCG$ (fig. 2). Un point M quelconque correspond à une onde susceptible de se propager dans l'état I et dont

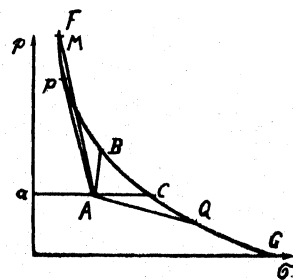


Fig. 2.

la célérité est $\sigma_1 \sqrt{tg M Aa}$. Toutefois les points de l'arc BC ne correspondent pas à des ondes possibles, car leur célérité est imaginaire. Les ondes possibles se groupent en ondes propageant une augmentation de pression (arc FB) et en ondes propageant une diminution de pression (arc CG). Les premières paraissent correspondre aux détonations, les secondes aux déflagrations. J'ai indiqué cette distinction dès 1906. M. CRUSSARD et moi l'avons précisée en 1913 et 1914¹⁾. Elle a été adoptée par M. BECKER en 1917²⁾.

¹⁾ Journal de Math. pures et appliquées T. II, p. 81; C. R. de l'Ac. Sc. Paris T. 157, p. 545; Technique moderne, août 1914.

²⁾ Z. f. Elektrochemie T. 23, p. 40.

4. — Dans le mouvement 2 qui suit l'onde, le fluide subit une transformation adiabatique au cours de laquelle nous supposons que son état reste sur la surface EE' ($g = 0$) avec α d'ailleurs voisin de 1. Il peut donc y avoir une combustion résiduelle, mais elle est généralement faible et en tout cas *réversible*. Soient E_2 la vitesse des ébranlements infiniment petits (vitesse du son) par rapport à la matière dans l'état 2, E_1 la vitesse du son dans l'état 1. On peut montrer que:

pour les ondes de l'arc	FP , on a	$D_2 < E_2$	$D_1 > E_1$
pour celles de l'arc	PB , „ „	$D_2 > E_2$	$D_1 > E_1$
„ „ „ „	CQ , „ „	$D_2 < E_2$	$D_1 < E_1$
„ „ „ „	QQ , „ „	$D_2 > E_2$	$D_1 < E_1$

La propagation des ondes des arcs PB , QG est indifférente aux conditions aux limites en arrière, les perturbations produites par les variations de ces conditions ne pouvant pas atteindre la flamme puisque $D_2 > E_2$. Il en est de même, à la limite, des ondes P et Q pour lesquelles $D_2 = E_2$.

Pour étudier l'altération des ondes se propageant dans un état homogène, désignons par δ la différentiation prise *en suivant le front de l'onde* et par $-\frac{\Delta^2}{\sigma_2^2}$ le coefficient angulaire de la courbe d'HUGONOT en un point M . On tire de (2)

$$\left. \begin{aligned} \delta \sigma_2 &= -\frac{\sigma_2^2}{\Delta^2} \delta p_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & (4a) \\ \delta u_2 &= \frac{\sigma_1}{D_1} \frac{D_2^2 + \Delta^2}{\Delta^2} \delta p_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & (4b) \\ \delta D_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\sigma_1}{u_2 - u_1} \frac{D_2^2 - \Delta^2}{\Delta^2} \delta p_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & (4c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

D'autre part les équations du mouvement adiabatique 2 derrière le front de l'onde donnent:

$$\left(3 + \frac{D_2^2}{\Delta^2}\right) \frac{\delta p_2}{\delta t} = \frac{2}{\sigma_2^2} \frac{d\sigma_2}{dt} \left(D_2^2 + \sigma_2^2 \frac{dp_2}{d\sigma_2}\right) \dots \dots \dots (5)$$

Avec nos hypothèses, $\sigma_2^2 \frac{dp_2}{d\sigma_2}$ est égal à $-E_2^2$, donc (5) s'écrit

$$\left(3 + \frac{D_2^2}{\Delta^2}\right) \frac{\delta p_2}{\delta t} = \frac{2}{\sigma_2^2} \frac{d\sigma_2}{dt} (D_2^2 - E_2^2) \dots \dots \dots (6)$$

Il y a d'ailleurs, entre Δ et E_2 , la relation suivante. Remplaçons la variable T par l'entropie s et considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial s_2} & \frac{\partial g_2}{\partial s_2} & \frac{\partial U_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial U_2}{\partial \sigma_2} \end{vmatrix}$$

Désignons par A, B, C les mineurs de la dernière ligne.

$$\text{On a } \frac{D_2^2 - \Delta^2}{D_2^2 - E_2^2} = \frac{2A}{2A + C(\sigma_1 - \sigma_2)} \dots \dots \dots (7)$$

et on peut montrer que ce rapport est positif pour les ondes de choc et combustion complètes.

A est négatif pour les points P_2 (fig. 1) extérieurs à la surface DD' de DUHEM, positif pour les points intérieurs. B est positif car cette condition exprime qu'une combustion adiabatique à volume constant fait croître la pression. C est probablement positif.

Les détonations

5. — M. CHAPMAN a annoncé le premier (1899) que l'onde explosive était l'onde P (fig. 2). Je suis arrivé indépendamment à la même idée en 1904. La vitesse de l'onde P pouvant se calculer à partir des données thermodynamiques des mélanges, cette idée est vérifiable. On trouvera dans mon mémoire du Journal de LIOUVILLE de 1905—1906 et dans ma *Mécanique des Explosifs* les calculs que j'ai faits pour 20 mélanges et on verra que l'accord de la théorie et de l'expérience est satisfaisant.

Mais j'ai employé dans mes calculs les chaleurs spécifiques de MALLARD et LE CHATELIER que l'on sait aujourd'hui varier trop vite avec la température. Aussi ai-je jugé utile d'en reprendre quelques-uns avec les formules de KAST déduites des expériences de PIER et BJERRUM. J'ai obtenu les résultats du tableau suivant en négligeant, pour la commodité du calcul, la combustion résiduelle *réversible* qui, dans le mouvement 2, fait déplacer un peu le point représentatif sur EE' . Mais j'ai vérifié que la correction à apporter de ce chef serait faible et ferait baisser légèrement les célérités calculées.

Calcul avec les chaleurs spécifiques de:

Mélanges	MALLARD & LE CHATELIER				KAST				Célérité observée (Dixon)
	Degré de dissociation (admis)	P_2	T_2	Célérité	Degré de dissociation (admis)	P_2	T_2	Célérité	
$2 H^2 + O^2$	0	17,5	3.956	2.629	0	21,1	4.780	2.907	2.821
$2 H^2 + O^2$	25 0/0	17,4	3.550	2.664	35 0/0	18,5	3.950	2.864	2.821
$2H^2 + O^2 + 5H^2$	0	14,4	2.596	3.526	0	16,15	2.940	3.767	3.530
$CO + O$	0	17,2	3.852	1.664	0	26,3	6.000	2.106	1.750
$CO + O$	35 0/0	17,35	3.350	1.687	45 0/0	21,0	4.000	1.910	1.750

Ce sont les résultats *avec dissociation* qui doivent être comparés à l'expérience: en effet les degrés de dissociation admis ne sont pas arbitraires mais résultent d'une extrapolation de ce que nous apprennent les chimistes. On peut voir que l'accord reste assez satisfaisant, étant donné qu'il s'agit d'une première approximation et que les calculs exigent une extrapolation très large des données numériques relatives aux chaleurs spécifiques et à la dissociation.

6. — Le choix de l'onde P pour représenter l'onde explosive ne résulte pas simplement d'une intuition heureuse. Pour ma part, j'y suis parvenu en remarquant que, expérimentalement, l'onde explosive se présente avec une vitesse constante, indépendante des conditions aux limites en arrière. Les formules (4) (6) (7) permettent de bien préciser ma pensée.

Pour que D_1 reste constant, il faut, ou bien que $\delta p_2 = 0$, ou bien que $D^2 = A^2 = E_2^2$. Mais (6) montre que, sauf le cas tout spécial où $\frac{d\sigma_2}{dt} = 0$, la condition $\delta p_2 = 0$ se confond avec $D_2^2 = E_2^2 = A^2$ qui détermine précisément l'onde P .

Allons plus loin et considérons, avec M. CRUSSARD, une onde M quelconque des arcs FP ou PB . Supposons $\frac{d\sigma_2}{dt} > 0$, ce qui est certainement le cas général. Les formules montrent que l'onde M se rapproche progressivement de l'onde P qui est donc stable. On explique très bien ainsi la permanence reconnue à l'onde explosive par les expérimentateurs. Et le raisonnement fait prévoir qu'on peut observer, dans certains cas, des flammes plus rapides que l'onde explosive, passant progressivement à celle-ci. M. LAFFITTE a effectivement observé de telles flammes en provoquant l'explosion de $CS^2 + 3 O_2$ par du fulminate de mercure (Annales de Physique, 10^e Série, Tome 4, 1925).

7. — En allumant les mélanges gazeux par l'étincelle électrique, M. LAFFITTE a observé une propagation moins rapide que l'onde explosive, se transformant en onde explosive avec une certaine discontinuité. Je pense que cette propagation, que j'appellerai *préliminaire*, est une quasi-onde de choc et combustion très-incomplète, suivie d'une combustion résiduelle *irréversible*. Cette interprétation expliquerait que l'onde préliminaire donne une luminosité moins forte et plus durable que l'onde explosive. Quand l'onde explosive se déclenche et est lancée en avant, la discontinuité proviendrait du passage d'un régime avec combustion résiduelle irréversible à un régime avec combustion résiduelle nulle ou tout au moins très faible et réversible. En même temps est lancée en arrière une onde que serait, elle aussi, à la fois mécanique et chimique et où la combustion, non encore terminée, s'achèverait.

Pour une onde de choc et combustion comme celle que nous imaginons, on peut encore écrire les formules (2) (4) (5) mais (6) doit être remplacée par :

$$\left(3 + \frac{D_2^2}{A^2}\right) \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{2}{\sigma_2^2} \frac{d\sigma_2}{dt} (D_2^2 - E_{2\alpha}^2) + \frac{2B}{T} g \quad \dots \quad (8)$$

où $E_{2\alpha}$ est la vitesse des petits ébranlements dans l'état 2 calculée dans l'hypothèse où la réaction ne joue pas. (4) et (8) montrent que, pourvu que la combustion résiduelle soit assez rapide (g assez grand) et que $D_2 < A$, la pression peut augmenter et la célérité D_1 s'accélérer comme le montre l'expérience.

Pour entrer davantage dans le détail, on peut faire plusieurs hypothèses. En voici deux.

Il y a, dans la quasi-onde, une combustion représentée sur la fig. 1 par une ligne $I\Gamma_2$ qui pénètre à l'intérieur de II' et qui aboutit en un point de cette surface. Au voisinage de Γ_2 , la réaction doit aller en se ralentissant puisqu'on revient sur II' . Cette condition s'exprime, dans le système de variables α, s, σ par

$$\frac{d\sigma}{dt} > \frac{A}{T} \frac{g}{\left(-\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)} \quad \dots \quad (9)$$

avec g et $-\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ positifs par les lois de la vitesse de réaction. Comme, dans la quasi-onde, $\frac{d\sigma}{dt}$ est négatif, A doit être négatif. Le point Γ_2 est donc forcément sur la partie $\varepsilon I'$ de la surface II' . La combustion résiduelle se fait ensuite suivant l'arc $\Gamma_2 \square$, avec une vitesse non infinie, mais encore grande, en raison de la température élevée. La condition (9) exprime que la compression dans la quasi-onde n'est pas trop rapide. Quand, au fur et à mesure de la propagation, la pression p_2 augmente, l'onde se raidit, la condition (9) cesse d'être vérifiée; on passe à l'onde de choc et combustion complète; l'onde explosive apparaît.

On peut aussi supposer qu'aucune combustion ne se produit dans l'onde de choc. Le point Γ_2 se trouve alors en I . Dans la combustion résiduelle, le point représentatif, ou bien sort à l'extérieur de II' , ou bien (si les vitesses de réaction à gauche de I sont trop faibles à cause de la

basse température) reste dans l'épaisseur de la zone II', car nous devons nous rappeler que la surface II' est en réalité une zone d'une certaine épaisseur. Il est nécessaire, pour cela, que la condition (9) soit vérifiée avec $A > 0$. Le fluide doit donc se dilater dans cette combustion résiduelle. Au fur et à mesure que p_2 augmente, l'onde de choc amène le fluide à une température de plus en plus élevée, en un point de la zone I où la vitesse de réaction g est de plus en plus grande. La condition (9) cesse alors d'être vérifiée, le point représentatif pénètre à l'intérieur de II' et l'onde explosive apparaît.

MM. DUMANOIS et LAFFITTE ont observé que le régime préliminaire durait moins longtemps quand la pression initiale était plus forte¹⁾. Les lois de la vitesse de réaction sont encore trop mal connues pour donner de ce fait une explication absolument certaine. Toutefois l'analyse qui précède montre qu'il n'est pas étonnant que la pression rende plus difficile la réalisation de la condition (9), peut-être en augmentant A .

Le régime préliminaire apparaît aussi quand l'onde explosive se propageant dans un tube rencontre un élargissement brusque. L'onde explosive s'éteint alors partiellement, fait place à une propagation du type préliminaire qui la régénère ensuite au bout d'un certain parcours.

8. — Nous nous sommes jusqu'ici occupés exclusivement des ondes planes. Pour voir comment une flamme se propage dans l'espace à 3 dimensions, étudions les ondes sphériques centrifuges. Les formules (2) (3) (4) (7) peuvent être étendues à ce cas, u désignant la vitesse suivant le rayon r . Mais (6) doit être remplacé par :

$$\left(3 + \frac{D_2^2}{A^2}\right) \frac{\delta p_2}{\delta t} = \frac{2}{\sigma_2^2} \frac{d\sigma_2}{dt} (D_2^2 - E_2^2) - \frac{4u D_2^2}{\sigma_2 r}$$

Ces formules montrent que la vitesse ne peut être uniforme que si $\delta p_2 = 0$, c'est-à-dire si on a à tout instant :

$$D_2^2 = E_2^2 + \frac{2u_2\sigma_2}{r} \frac{D_2^2}{\frac{d\sigma_2}{dt}} \dots \dots \dots (10)$$

La réalisation rigoureuse à tout instant de cette condition soulève évidemment des difficultés. Aussi avais-je dit autrefois qu'on ne pouvait probablement pas observer, en ondes sphériques, de propagation à vitesse uniforme. Or il semble bien que M. LAFFITTE en ait obtenu une en faisant détoner une amorce au fulminate de mercure au centre d'un ballon contenant $CS^2 + 3O^2$. Le principe de l'explication de cette expérience — principe qu'il serait intéressant de développer par de nouvelles recherches, expérimentales ou théoriques — me paraît le suivant. Quand on provoque, en propagation sphérique, l'onde P (et la vitesse mesurée par M. LAFFITTE montre bien que c'est d'elle qu'il s'agit) l'équation (10) n'est pas vérifiée au début et δp_2 n'est pas nul. Mais, par (4) et (7), $\delta D_1 = 0$ parce que $D_2 = E_2 = A$. Il est vrai que, la pression baissant, cette condition ne se maintient pas aux instants suivants. Mais on voit que D_1 peut rester sensiblement uniforme assez longtemps. Plus tard, r devient grand et (10) est approximativement vérifiée pour $D_2 = E_2 = A$.

M. LAFFITTE a aussi allumé le centre du ballon contenant $CS^2 + 3O^2$ en y faisant déboucher un tube où se propage l'onde explosive plane. Dans ce cas, l'onde explosive s'éteint partiellement au débouché du tube, comme elle s'éteint aux élargissements brusques; le régime de propagation qui s'établit est du type préliminaire et M. LAFFITTE n'a pas observé qu'il ait régénéré l'onde explosive sphérique. C'est qu'un mouvement par couches sphériques est en somme un

¹⁾ C. R. Ac. Sc. T. 183, p. 284, 26 juillet 1926.

élargissement continu; la détente du fluide en arrière du front est plus rapide qu'en tranches parallèles, ce qui s'oppose à la pénétration de la ligne $I\Gamma_2$ (fig. 1) dans la région des vitesses de réaction infinies.

M. DUMANOIS a utilisé l'extinction de l'onde explosive au passage des élargissements pour produire, dans les moteurs à combustion interne, le même effet que les antidétonants (Comptes-Rendus de l'Ac. des Sciences T. 182, p. 1378 — 7 juin 1920).

Les déflagrations

9. — La déflagration type est celle qu'on observe dans un bec Bunsen ou aux premiers instants de la propagation d'une flamme allumée à l'extrémité ouverte d'un tube. Pour la théorie, c'est une onde de choc et combustion représentée par un point X de l'arc CQ (fig. 2).

S'il en est ainsi, elle doit transporter une baisse de pression. Considérons alors un mélange gazeux combustible s'écoulant de la pression p à la pression p' , peu différente de p , à travers un ajutage parfaitement évasé. Si on enflamme le gaz à la sortie, c'est le cône acb qui constitue la surface d'onde de déflagration. Supposons la pression en β_2 égale à p' , malgré la présence de la flamme. Alors la pression en β_1 , et par suite dans toute la section ab , doit être légèrement plus grande que la pression p' qui régnerait dans cette section s'il n'y avait pas de flamme. Si on s'arrange pour que le débit

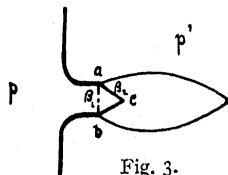


Fig. 3.

soit constant (si on le règle, par exemple, par un vase de Mariotte) l'allumage de la flamme doit donc se traduire par une légère augmentation de la pression p . J'ai calculé, dans le Journal de LIOUVILLE de 1920, cette augmentation dans les hypothèses que je viens de formuler. Elle est très faible. J'ai cependant essayé de la mettre en évidence expérimentalement. Malheureusement mes expériences ont été très imparfaites. Mais qualitativement, et abstraction faite de certaines anomalies, elles ont bien mis en évidence une augmentation de pression croissant avec la vitesse de l'onde, comme il le fallait. Cette augmentation était d'ailleurs notablement plus faible que ne l'indiquait le calcul, de l'ordre de quelques centièmes de millimètres d'eau, alors que le calcul donnait quelques dixièmes. Mais le calcul repose sur des hypothèses un peu grossières. Il n'est nullement sûr que la pression en β_2 soit égale à p' ; les effets d'échauffement troublent certainement le régime des pressions. D'autre part la combustion n'est sans doute pas complète dans la quasi-onde.

10. — On peut montrer que les ondes de l'arc CQ , loin de tendre vers l'onde Q , tendent plutôt à s'en éloigner. Dans la déflagration, on aura donc $D_1 < E_1$ et $D_2 < E_2$. Les perturbations venant de l'arrière atteindront la flamme et la devanceront, si bien qu'elle finira par se propager dans un milieu agité et que la régularité de sa vitesse disparaîtra. Cela est conforme à l'expérience, qui a montré que la déflagration était beaucoup moins stable que l'onde explosive.

11. — Dans la déflagration, c'est la conductibilité calorifique qui porte le gaz à sa température d'inflammation. Le phénomène se passe à l'intérieur de la quasi-onde et, pour l'étudier, il faut, pour ainsi dire, examiner la structure de cette quasi-onde avec un fort grossissement. Je me suis en conséquence posé le problème suivant.

Etudier le mouvement permanent, par tranches perpendiculaires à ox , d'un mélange gazeux dans les conditions suivantes. Une flamme est stationnaire dans le courant, sur la tranche $x = 0$; le gaz ne brûle pas de $x = -\infty$ à $x = 0$; il brûle de $x = 0$ à $x = +\infty$. La transmission de la chaleur se fait par conductibilité.

L'énoncé même du problème suppose qu'on admet, à titre d'approximation, que la vitesse de réaction est nulle au-dessous de la température d'inflammation τ du point I (fig. 1). D'autre

part, de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, la structure du fluide est l'image grossie de ce qui se passe en réalité dans une quasi-onde très étroite. A cette échelle, il ne faut pas considérer les vitesses de réaction à droite de I comme infinies. On les suppose définies par (1). On montre alors que, l'état initial $\alpha_1 = 0$, T_1, σ_1 (état du fluide pour $x = -\infty$) étant donné, l'onde permanente est déterminée. Il est naturel de penser que c'est elle qui constitue la déflagration type.

On peut aller plus loin en supposant la pression dans tout le fluide sensiblement la même et égale à p_1 . L'expression (1) sera remplacée par

$$\frac{d\alpha}{dt} = f(\alpha, T, p_1) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (11)$$

Soient R la constante du gaz, $n(\alpha)$ le nombre de molécules grammes contenues dans l'unité de masse, C la chaleur spécifique à pression constante, k le coefficient de conductibilité (k et C supposés constants), Θ la température de combustion à pression constante, D la célérité. Dans toute la région du fluide où celui-ci brûle, on montre que l'on a:

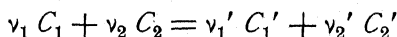
$$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{D^2}{\sigma_1^2} \frac{CR}{p_1} \frac{n(\alpha) T}{k f(\alpha, T, p_1)} [T - T_1 + \alpha(T_1 - \Theta)] \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (12)$$

Cette équation s'intègre sans difficulté si on suppose (a) que la réaction est monomoléculaire (b) que, au-dessus de la température d'inflammation τ , la vitesse de réaction est sensiblement proportionnelle à T (on verra dans ma *Mécanique des Explosifs* pourquoi cette hypothèse est grossièrement acceptable). La fonction f est alors $MT(1-\alpha)$ et on trouve, en négligeant la contraction (n constant):

$$D = \sigma_1 \sqrt{\frac{k p_1 M}{n R C}} \sqrt{\frac{\Theta - \tau}{\tau - T_1}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (13)$$

J'ai donné cette formule en 1913 (C. R. Ac. Sc. T. 156, p. 1052). En 1915, M. NUSSELT a cherché à la généraliser et à l'appliquer aux réactions plurimoléculaires (V. D. I., Bd. 59, S. 872). Son calcul, à propos du mélange H^2 + air, présente, je crois, une erreur pour le cas où l'hydrogène est en excès. C'est une simple inadvertance, mais qui modifie notablement la formule à employer dans ce cas. D'autre part, M. NUSSELT introduit une hypothèse sur la chaleur dégagée par unité de longueur qui me paraît peu satisfaisante. Il m'a donc paru intéressant de reprendre autrement la question.

Supposons que la réaction chimique transforme deux corps C_1, C_2 en d'autres corps C'_1, C'_2 suivant l'équation chimique:



Soient x_1, x_2 les proportions en volume des gaz C_1, C_2 dans le mélange non brûlé. Le corps C_2 sera celui qui est en excès, de sorte que $\frac{x_1}{\nu_1} < \frac{x_2}{\nu_2}$. La réaction chimique jouera $\alpha n(o)$ $\frac{x_1}{\nu_1}$ fois, α variant de 0 à 1. On posera $b = \frac{x_2 \nu_1}{x_1 \nu_2}$.

Si l'on accepte la loi d'action de masse des chimistes, on devra écrire:

$$\frac{d\alpha}{dt} = f(\alpha, T, p_1) = \frac{h(T)}{R T^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} p_1^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \left[\frac{x_1 n(o)}{\nu_1} \right]^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \nu_1^{\nu_1} \nu_2^{\nu_2} \frac{(1 - \alpha)^{\nu_1} (b - \alpha)^{\nu_2}}{[n(\alpha)]^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \quad (14)$$

la fonction $h(T)$ croissant avec la température. Conservons l'hypothèse (b) ci-dessus, c'est-à-

dire supposons que $h(T)$ soit tel que l'expression (14) soit de la forme $MT^{(1-\alpha)^{v_1}(b-\alpha)^{v_2}}$ avec M constant. L'équation (12) est alors linéaire en T . Posons

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{[n(\alpha)]^{v_1+v_2-1}}{(1-\alpha)^{v_1}(b-\alpha)^{v_2}} d\alpha$$

La célérité est déterminée par:

$$\int_0^1 e^{-\frac{D^2 RC}{M p_1 \sigma_1 k} F(\alpha)} d\alpha = \frac{\tau - T_1}{\Theta - T_1} \quad \dots \quad (15)$$

Cette formule permet des calculs numériques, d'ailleurs pénibles. D'autre part, on en tire la limite supérieure suivante, où n' est le minimum de $n(\alpha)$:

$$D < \sigma_1 \sqrt{\frac{M p_1 k b^{v_2}}{R C n'^{v_1+v_2-1}}} \sqrt{\frac{\Theta - \tau}{\tau - T_1}}$$

En remplaçant M par sa valeur tirée de (14) et en négligeant la contraction:

$$D < \sqrt{\frac{h(\tau)}{\tau^{v_1+v_2}} \frac{n p_1^{v_1+v_2-2}}{C R^{v_1+v_2-2}} \frac{T_1^2 k v_1 x_1^{v_1-1} x_2^{v_2}}{\tau - T_1}} \quad \dots \quad (16)$$

Cette limite coïncide avec la formule de M. NUSSELT corrigée. Pour le mélange H^2 + air, si l'air est en excès, le corps 1 est l'hydrogène, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$ et le produit $v_1 x_1^{v_1-1} x_2^{v_2}$ est $2x_H x_O$ (comme dans la formule de NUSSELT). Si au contraire H est en excès, le corps 1 est l'oxygène $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ et $v_1 x_1^{v_1-1} x_2^{v_2} = x_H^2$ (en désaccord avec Nusselt).

M. NUSSELT a comparé sa formule avec l'expérience en supposant que $\frac{h(\tau)}{\tau^{v_1+v_2}}$ est invariable quand la composition du mélange varie et en déterminant cette constante de manière

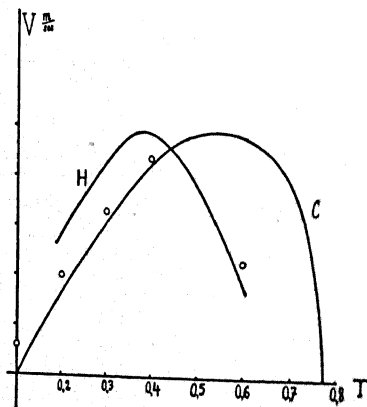


Fig. 4.

T = Teneur en Hydrogène %.
ooo = Expériences de Le Chatelier.
H = Expériences de Haward et Otagawa.
C = Vitesses calculées.

à avoir une bonne concordance. Nous avons repris ses calculs, d'abord pour corriger l'erreur signalée, ensuite pour nous servir de (15) et non de (16) qui ne donne qu'une limite supérieure. Nous avons d'ailleurs adopté les mêmes données que M. NUSSELT pour C , k , τ , Θ et nous avons

considéré, avec lui, $\frac{h(\tau)}{\tau^{v_1+v_2}}$ comme une constante à déterminer. La fig. 4 donne, pour le mélange H + air, la comparaison du calcul par l'équation (15) avec les expériences de HAWARD et OTAGAWA.

L'accord est loin d'être satisfaisant, surtout quand il y a excès d'Hydrogène. Mais il ne faut pas s'en étonner. Il ne serait pas surprenant, d'après ce que nous ont appris les expé-

riences de DIXON et de ses collaborateurs, que $\frac{h(\tau)}{\tau^{v_1+v_2}}$

diminuât quand l'Oxygène est en défaut. D'autre part plusieurs simplifications contestables

ont été faites dans les calculs, et notamment on a utilisé la notion de température d'inflammation, dont la précision n'est pas absolue. Comme nous le disions en 1913 quand nous avons donné la formule (12), il ne faut pas attacher aux formules de ce type une importance exagérée: les lois de la vitesse de réaction sont encore trop mal connues. Qualitativement, cependant, remarquons les deux résultats suivants. Nous obtenons un maximum de vitesse déplacé, par rapport au mélange de composition exacte, dans le bon sens; d'autre part, ce maximum ne correspond pas à un angle vif de la courbe et ce fait est d'accord avec les expériences anglaises corrigeant sur ce point l'opinion de M. LE CHATELIER.

Il doit être bien entendu que les parties de la courbe voisines de l'axe horizontal ne correspondent à rien de réel. La théorie indique (voir *Mécanique des Explosifs*) que les mélanges à la limite de déflagration donnent des célérités différentes de zéro, et ce fait est conforme à une observation de M. LE CHATELIER, complètement confirmée par les expériences plus récentes de M. WHEELER.

Les explosifs solides

12. — La théorie des ondes de choc et combustion a été étendue aux explosifs solides par MM. TAFFANEL et DAUTRICHE. On peut aussi citer sur ce sujet les travaux de M. BECKER. Mais la complication des explosions est ici beaucoup plus grande que pour les gaz. Aussi la théorie est-elle ici plus qualitative que quantitative. Je me bornerai à dire un mot d'un point particulier.

Avec les explosifs solides, il est nécessaire d'appliquer aux gaz dégagés, non pas les lois des gaz parfaits, mais la loi de compressibilité de VAN DER WALS ou une loi analogue. On est alors conduit, pour les fortes densités qui se présentent dans les ondes de choc et combustion, à une pression négative. Ce résultat absurde indique que, dans la quasi-onde, la combustion doit être incomplète.

Tout porte à penser qu'après le passage de l'onde, la réaction s'achève par une combustion résiduelle irréversible. M. AUDIBERT insiste beaucoup sur cette idée qu'il a étayée par des arguments chimiques. Montrons que d'autres arguments, tirés de l'examen des phénomènes de propagation, convergent vers la même conclusion.

M. BURLOT a étudié expérimentalement les effets produits dans l'atmosphère par des charges d'explosif petites ou grandes. Si la décomposition de l'explosif se faisait par ondes de choc et combustion complètes, avec combustion résiduelle nulle ou réversible, il résulterait de la théorie la loi suivante (*Mécanique des explosifs*, p. 441): En des points situés à des distances qui sont dans le rapport des racines cubiques des charges, les pressions seraient égales et elles varieraient de quantités égales en des temps qui seraient comme ces mêmes racines cubiques. Or M. BURLOT a observé que, dans les expériences en grand, la pression variait beaucoup plus vite que ne l'indiquait cette loi. A mon avis, cela s'explique par le rôle que joue la combustion résiduelle irréversible. Un autre théorème de la théorie (*Mécanique des explosifs*, p. 470) apprend alors que l'expérience en grand ne pourrait être semblable à l'expérience en petit que si on ralentissait la réaction. Il n'est donc pas étonnant que, dans la réalité, où la réaction conserve sa vitesse, les pressions produites soient moins soutenues.

D'autre part, M. AUDIBERT, étudiant les ondes de choc prolongeant dans l'air l'onde de détonation d'une cartouche, a obtenu le résultat suivant. Avec la grisou-naphtalite couche, pour laquelle les considérations chimiques font présumer une combustion résiduelle faible, la vitesse de l'onde de choc décroît rapidement avec la distance. Avec la grisou-dynamite couche, pour laquelle les arguments chimiques indiquent une probabilité de combustion résiduelle notable, la

vitesse de l'onde de choc reste presque constante sur un parcours assez long. M. AUDIBERT considère que la tendance à l'amortissement est ici compensée par l'effet de la combustion résiduelle.

Conclusion

13. — Tels sont, rapidement résumés, les principaux résultats de la théorie thermodynamique des explosions. La place m'a manqué pour développer les démonstrations. Comme on peut les trouver ailleurs ¹⁾, j'ai préféré insister sur les vérifications expérimentales. Puissé-je avoir montré que, à côté de la chimie et de la physique des flammes, il y a une Mécanique des flammes, fondée sur la Thermodynamique, qui donne déjà, en première approximation, une théorie assez satisfaisante des phénomènes.

¹⁾ Ce qui ne se trouve pas dans ma *Mécanique des Explosifs* sera détaillé dans un mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annales des Mines*.

Ueber elastische Grenzzustände

Von Th. v. Kármán, Aachen.

Unter der Bezeichnung «elastische Grenzzustände» wollen wir eine Reihe praktisch interessanter Spannungszustände in festen Medien zusammenfassen, bei denen zwischen den Hauptspannungen bestimmte feste Beziehungen bestehen. Insbesondere gehören hierher die Spannungszustände, die in elastisch-festen Körpern nach Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze auftreten — falls man die sogenannte Verfestigung, d. h. die Erhöhung der Elastizitätsgrenze durch die bleibende Formänderung vernachlässigt — und die Spannungszustände in sandartigen Medien, d. h. Medien, die keine Kohäsion besitzen und deren Formänderung nur durch die Reibung zwischen den Körnern gehindert wird, falls man die dabei auftretende Kraftverteilung durch eine stetige Spannungsverteilung ersetzt. Die Aufgaben, die auf die zuerst genannte Erscheinungsgruppe sich beziehen, hat man unter dem Namen «Plastizitätstheorie», die auf die sandartigen Medien sich beziehenden Probleme unter der Bezeichnung «Erddrucktheorie» zusammengefaßt.

Da über die speziellen Probleme der Plastizitätstheorie Herr PRANDTL — dem man in erster Linie die Neubelebung dieser Disziplin in den letzten Jahren verdankt — anlässlich des letzten Kongresses in *Delft* ausführlich berichtet hat, will ich bezüglich der Plastizitätslehre nur einige grundsätzlich wichtige und meiner Ansicht nach nicht genügend geklärte Punkte berühren, um dann mich vornehmlich mit der sogenannten Grundaufgabe der Erddrucktheorie zu befassen.

Ich will mich auf den Fall zweidimensionaler Spannungszustände beschränken.

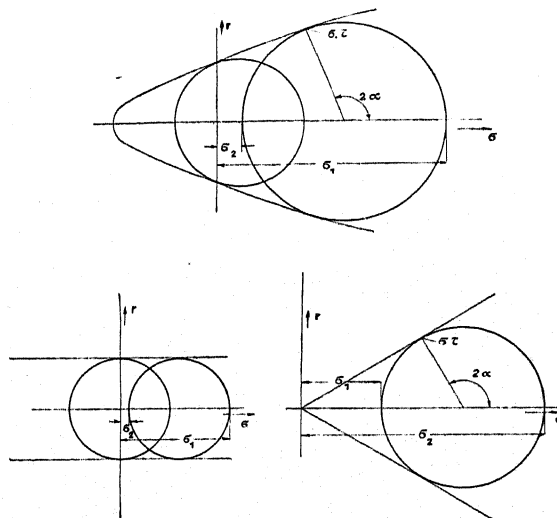


Abb. 1.

Die Ansätze der Plastizitätstheorie und der Erddrucktheorie kann man in folgender Weise vereinigen:

In einem kontinuierlichen Medium können nur Spannungszustände auftreten, bei denen die beiden Hauptspannungen in jedem Punkte der Ungleichung

$$f(\sigma_1, \sigma_2) \leq 0 \quad \dots \dots \dots (I)$$

(σ_1, σ_2 Hauptspannungen)

genügen. Ist die Gleichung $f(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ erfüllt, so befindet sich das Medium im «Grenzzu-

stand». In Bereichen, in denen die Ungleichung und nicht die Gleichung erfüllt ist, sollen bei elastisch-plastischen Körpern die Gleichungen der Elastizitätslehre Geltung behalten, während wir bei sandartigen Medien über den Spannungszustand außer den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nichts aussagen wollen.

Nach der bekannten Darstellung von O. MOHR kann man der Ungleichung (1) die Gestalt

$$\tau \leq g(\sigma) \quad \dots \dots \dots (2)$$

geben, wobei τ und σ ein zusammengehöriges Paar Schub- und Normalspannungen bezeichnen. Die Ungleichung (2) muß dann für alle Punkte des betrachteten Bereichs und für Flächenelemente jeglicher Orientierung gelten. Ist das Medium im Grenzzustand, so muß es ein Flächenelement bzw. im zweidimensionalen Falle ein Linienelement geben, für welches

$$\tau = g(\sigma)$$

gilt. Wir wollen eine mit den zugehörigen Spannungen belegte Linie als «Spannungstreifen», schlechthin als «Streifen» bezeichnen; ein Streifen, für welchen in jedem Punkte $\tau = g(\sigma)$ gilt, soll als ein «Gleitstreifen», die Linie, die den Gleitstreifen trägt, «Gleitlinie» bezeichnet werden.

Der spezielle Ansatz für elastisch-plastische Körper lautet: $\tau \leq K$, wobei K eine das Medium kennzeichnende Spannungsgröße (die Fließgrenze) darstellt. Für sandartige Medien setzt man $\tau \leq f \cdot \sigma$, oder $\tau \leq \sigma \tan \rho$, wobei f den Reibungskoeffizienten, ρ den Reibungswinkel bezeichnet.

Handelt es sich nun um Bestimmung von Spannungszuständen, die der Bedingung des Grenzzustandes genügen, so ist dies identisch mit der Aufgabe, mögliche Systeme von Gleitlinien zu ermitteln. In diesem Wege hat sowohl die ältere von ST. VENANT und M. LÉVY, als auch die neuere von PRANDTL, HENCKY, NADAI u. a. ausgearbeitete Plastizitätstheorie eine Reihe interessanter Ergebnisse hervorgebracht. Es scheint mir indessen eine grundsätzlich wichtige Seite der Aufgabe weniger erfolgreich geklärt zu sein: die Frage nach dem gemischten Spannungszustand oder die Frage nach dem Uebergang vom elastischen zum plastischen Zustand.

Sehen wir zunächst von der Beschränkung ab, die die Ungleichung (1) bzw. (2) mit sich bringt, so ist der Spannungszustand bestimmt durch die Differentialgleichung für elastische Spannungszustände — etwa durch die Gleichung $\Delta \Delta F = 0$ für die Airysche Funktion F — und durch die Randbedingungen, die entweder auf die Oberflächenspannung oder auf die Verschiebungen der Oberfläche sich beziehen. Wenn daher der Spannungszustand mit Berücksichtigung der Ungleichung (Fließbedingung) bestimmt sein soll, müssen wir zuerst die Frage der Randbedingungen klären. Diesen Punkt hat insbesondere Herr v. MISES mit Recht hervorgehoben und darauf hingewiesen, daß ohne Heranziehung der Verschiebungen eine präzise Fassung von Aufgaben nicht möglich ist.

Herr v. MISES hat in einer sehr bemerkenswerten Arbeit — dem Beispiel von St. Venant folgend — vollständige Bewegungsgleichungen für ein plastisches Medium aufgestellt, die auf der Annahme beruhen, daß der Spannungstensor mit dem Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten funktionell zusammenhängt. Geht man zum Falle sehr geringer Geschwindigkeiten bzw. zum Gleichgewichtszustand über, so verbleiben zwei Bedingungen:

- a) Inkompressibilität des Mediums (verschwindende Divergenz der Verschiebungen)¹⁾,
- b) parallele Orientierung des Spannungstensors und des Tensors der Deformationsgrößen.

Nun scheint es mir aber, daß die Berücksichtigung der Verschiebungen im allgemeinen über gewisse grundsätzliche Schwierigkeiten nicht hinweghilft.

¹⁾ Genauer ausgedrückt: zwischen Volumänderung und mittlerem Druck besteht dieselbe Beziehung wie im elastischen Zustand.

Zunächst muß es bemerkt werden, daß die Unterscheidung zwischen plastisch fließendem und elastischem Gebiet, wie sie schlechterdings gemacht wird, den Tatbestand nicht erschöpft.

Man muß allgemein drei Bereiche unterscheiden:

1. ein elastisches Gebiet, in dem die Verschiebungen klein sind und die Hookeschen Beziehungen zwischen Spannung und Deformation gelten.
2. Ein Uebergangsgebiet, in welchem zwischen den Spannungsgrößen die Fließbedingung gilt, indessen die Verschiebungen von der Größenordnung der elastischen Deformationen sind (Grenzzustand mit verhindertem Fließen).
3. Ein Fließgebiet, in dem die Fließbedingung für die Spannungen gilt und die Deformationen groß werden können.

Mathematisch äußert sich der Unterschied zwischen (2) und (3) darin, daß die Deformationen im Falle (3) nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt, verhältnismäßig beliebig vergrößert werden können, während sie im Falle (2) durch die oben erwähnten Bedingungen und durch die Stetigkeit der Verschiebungen eindeutig bestimmt sind.

Ich will das, was ich meine, an einem ganz einfachen Beispiel demonstrieren, welches zuerst von ST. VENANT, dann ausführlich von DOMKE behandelt worden ist.

Man denke sich ein dickwandiges Rohr aus elastisch-plastischem Material und unterwerfe es einem inneren Ueberdruck vom Betrage p . Der innere Halbmesser soll a , der äußere b heißen.

Bezeichnen wir die Hauptspannungen, die hier mit den radialen und den Umfangsspannungen zusammenfallen mit σ_r und σ_t , so gilt die Beziehung

$$|\sigma_r - \sigma_t| < 2K$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0$$

oder

$$\frac{d\sigma_r}{d(\log r)} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

Die Fließbedingung kann daher auch gesetzt werden

$$\left| \frac{d\sigma_r}{d(\log r)} \right| < 2K \quad \dots \dots \dots (4)$$

Wählen wir $\log r$ als Abszisse, so ist die Neigung der σ_r -Linie begrenzt. Im Grenzzustand ist σ_r durch eine Gerade mit der Neigung $\pm 2K$ gegeben.

Befindet sich der ganze Bereich innerhalb der Elastizitätsgrenze, so lautet die Lösung

$$\sigma_r = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2 - r^2}{r^2}$$

und

$$\frac{d\sigma_r}{d(\log r)} = -2p \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Die Elastizitätsgrenze wird daher zuerst am inneren Kreis überschritten und zwar sobald der Druck den Wert $p = p_1 = K \frac{b^2 - a^2}{b^2}$ erreicht.

Die rein plastische Lösung lautet offenbar

$$\sigma_r = p - 2K \log \frac{r}{a} \quad \dots \dots \dots (6)$$

und falls der ganze Körper fließen soll, muß für $r = b$, $\sigma_r = 0$ gelten, d. h. der Druck den Wert

$$p = p_2 = 2K \log \frac{b}{a}$$

erreichen.

Liegt der Druck zwischen den beiden soeben ermittelten Grenzen p_1 und p_2 , so ist ein Teil des Körpers (der äußere Ring) im elastischen, ein innerer Ring im Grenzzustand. Der Zusammenhang des Materials fordert indessen, daß die Verschiebungen nicht über die Größenordnung der elastischen Deformation hinauswachsen.

In Abb. 2 sind σ_r -Kurven für elastische und plastische Spannungszustände eingetragen, wobei als Abszisse $\log r$ gewählt ist. Die dem Grenzzustand entsprechenden σ_r -Linien sind parallele Geraden mit der Neigung $-2K$. Man sieht, daß wenn man nur folgende Forderungen stellt:

a) es soll Gleichgewicht herrschen,

b) im inneren Bereich soll die Fließbedingung, im äußeren die Elastizitätsbedingung gelten,

so bleibt die Aufgabe unbestimmt. Die Gleichgewichtsbedingung fordert nämlich für die Uebergangslinie offenbar die Stetigkeit von σ_r , indessen nicht die Stetigkeit von σ_r , d. h. von $\frac{d\sigma_r}{dr}$. Die Berücksichtigung der Ver-

schiebungen bringt auch keine Bestimmtheit in die Aufgabe. Es läßt sich vielmehr zu jedem Spannungsverlauf ein Verschiebungsverlauf bestimmen, der allen Forderungen genügt. Diese Unbestimmtheit wird jedoch selbstverständlich, wenn man sich überlegt, daß man durch Belastung über die Elastizitätsgrenze und Entlastung bis zu einem niedrigeren Druck die verschiedensten Spannungszustände herstellen kann.

Es scheint mir indessen richtig für die erstmalige Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze, für die sog. jungfräuliche Belastung, zu fordern, daß das Material an der Grenze des elastischen Bereichs die Fließbedingung gerade erreiche, daß sozusagen nur soviel Material in den Grenzzustand geraten soll, als es unbedingt erforderlich ist, wenn man nicht gegen die Fließbedingung verstoßen will. Dies ist in unserem Falle gleichbedeutend mit dem stetigen Uebergang für σ_r bezw. $\frac{d\sigma_r}{dr}$. Es gehören daher die Kurvenstücke zusammen, die sich im Anschlußpunkte berühren.

Ich will bemerken, daß diese Forderung gleichbedeutend ist mit einem Minimalprinzip, welches ich gemeinsam mit A. HAAR vor 17 Jahren aufgestellt habe und welches folgendermaßen lautet:

Von allen Spannungszuständen, die die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, tritt jene auf, die mit Berücksichtigung der Ungleichung (1) den kleinsten Wert für die elastische Formänderungsenergie des Gesamtkörpers liefert, falls man diese als Funktion der Spannungs-komponenten auffaßt.

Dieses Minimalprinzip liefert einerseits das Ergebnis, daß nur Bereiche auftreten können, die entweder die Elastizitätsgleichungen oder die Fließbedingung befriedigen, andererseits gewährleistet es den stetigen Uebergang der Spannungen. Ich will mich jetzt nicht darauf verbreiten, daß das Prinzip auch für dreidimensionale Fälle, die sonst ziemlich unklar sind, plausible Ergebnisse liefert. Es müßte, um dies zu begründen, der Inhalt des Variationsprinzips besser ausgeholt werden.

Dieses Minimalprinzip liefert einerseits das Ergebnis, daß nur Bereiche auftreten können, die entweder die Elastizitätsgleichungen oder die Fließbedingung befriedigen, andererseits gewährleistet es den stetigen Uebergang der Spannungen. Ich will mich jetzt nicht darauf verbreiten, daß das Prinzip auch für dreidimensionale Fälle, die sonst ziemlich unklar sind, plausible Ergebnisse liefert. Es müßte, um dies zu begründen, der Inhalt des Variationsprinzips besser ausgeholt werden.

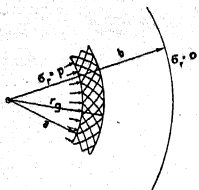
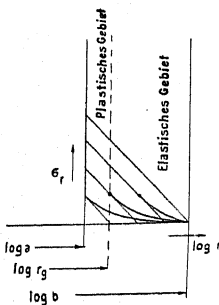


Abb. 2.

Der von Herrn NÁDAI und von Herrn TREFFTZ sehr schön in Einzelheiten durchgeführte Fall des allmählichen Uebergangs beim tordierten Stab reiht sich unter das Variationsprinzip zwanglos ein.

Es ist indessen die Berechnung des Uebergangs nicht in allen Fällen so klar durchzuführen.

Ein wichtiger Fall ist der idealisierte Druckversuch: ein elastisch plastischer Körper zwischen zwei starren, reibenden Platten. Ich beschränke mich wieder auf das zweidimensionale Problem und setze vollkommenes Haften an den Druckflächen voraus.

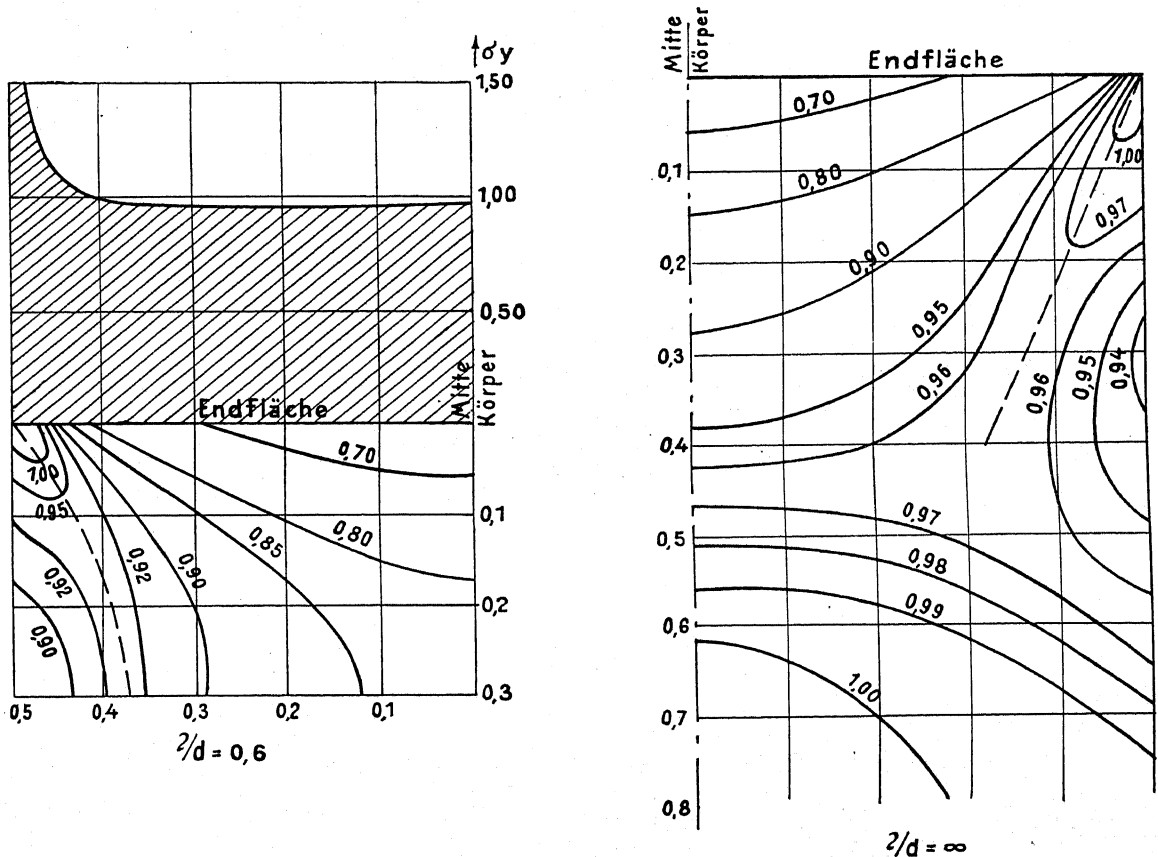


Abb. 3.

Der erste Schritt ist wohl das Aufsuchen der rein elastischen Lösung. Einer meiner Mitarbeiter, Herr KNEIN, hat diese Aufgabe in hübscher Weise durchgeführt, indem er zuerst die durch die Randbedingungen hervorgerufene Singularität an den Ecken untersuchte und durch ein Spiegelverfahren die Lösung für einen Streifen, wenn auch nicht in geschlossener Form, indessen mit einem verhältnismäßig geringen Aufwand von numerischer Rechnung ermittelte. In Abb. 3 ist die Druckverteilung an der Druckfläche eingetragen, fernerhin die Linien konstanten Wertes $|\sigma_1 - \sigma_2|$.

Man sieht, daß die Fließbedingung zuerst in unmittelbarer Nähe der Ecken, dann aber in einer Zone erreicht wird, welche von einer Ecke zu der andern sich hinzieht, wobei sowohl der innere Kern als der äußere Teil des Druckkörpers von der Fließgefahr weiter entfernt bleiben. Es tritt offenbar zunächst unser Fall (2), d. h. Grenzzustand mit verhindertem Fließen auf, bis der Grenzzustand sich quer durch einen Querschnitt verbreitet. Eine vollständige

Theorie des Druckversuches müßte wohl den oben angedeuteten Weg einschlagen und die gemischten Spannungszustände ermitteln. Auch in diesem Falle könnten wir unser Minimalprinzip anwenden, welches eindeutig die elastischen und plastischen Gebiete trennt.

Herr PRANDTL hat für den Fall, daß die Breite des Körpers gegen den Abstand der Druckplatten sehr groß ist, einen Spannungszustand ermittelt, den wir als den reinen Fließzustand bezeichnen können. Wir erhalten diesen Spannungszustand, indem wir für das Gesamtgebiet die Gleichgewichtsgleichungen und die Fließbedingung als erfüllt voraussetzen und die Begrenzung der Druckplatte als Gleitlinie annehmen. Der so bestimmte Spannungszustand liefert die Lösung einer neuen Extremalaufgabe: er liefert den größten Wert der Druckkraft, welche der fließende Körper überhaupt aufzunehmen vermag.

Die letztgenannte Extremalaufgabe führt uns zu den Problemstellungen der Erddrucktheorie über.

Die klassische Aufgabe der Erddrucktheorie ist die Ermittlung der Druckkraft auf Stützmauern und zwar wird nach dem kleinsten und dem größten Wert der Stützkraft gefragt, zwischen welchen mit Rücksicht auf die Fließbedingung Gleichgewicht bestehen kann.

Es ist unschwer, zu beweisen, daß wenn man Lösungen in der Weise konstruieren kann, daß die Fließbedingung im ganzen betrachteten Gebiet erfüllt ist und die Wand einen Gleitstreifen bildet, die so bestimmten Spannungszustände die gesuchten Grenzwerte liefern.

Wenn wir geradlinige Begrenzung des Erdreiches und das Eigengewicht der Erde als einzige Belastung annehmen, so können wir nach Boussinesq alle Spannungskomponenten proportional der Entfernung von der Krone der Stützmauer r und sonst nur als Funktion des Winkels ϑ ansetzen²⁾. Unter den Spannungszuständen, die diesem Ansatz entsprechen, finden wir die sog. RANKINESchen Lösungen mit geraden Gleitlinien; diese erfüllen indessen z. B. für vertikale Wand nur in den beiden Grenzfällen, daß die Begrenzung des Erdreiches unter dem Reibungswinkel ansteigt bzw. abfällt, die Forderung, daß die Wand selbst eine Gleitlinie bildet. Aber auch für den zweiten dieser Grenzfälle — abfallendes Gelände — liefert die Rankinesche Lösung ein Ergebnis für die Druckkraft, das offenbar physikalisch widersinnig ist (gleiche Größe als bei aufsteigendem Gelände und die Kraft unter dem Reibungswinkel nach oben gerichtet), bzw. nicht die richtige Lösung unserer Aufgabe sein kann.

Eine einwandfreie Methode, den Spannungszustand oder das Gleitliniensystem so zu bestimmen, daß die Wand bei beliebiger Begrenzung des Geländes und beliebiger Lage der Wand einen Gleitstreifen darstellt, ist bisher nicht gegeben worden. Unter Vernachlässigung des Eigengewichts und unter Annahme einer gleichmäßigen Belastung längs der freien Oberfläche ist die Lösung — wie es von M. LÉVY gezeigt wurde — sehr einfach zu finden, weil wir mit geradlinigen Gleitlinien auskommen. Für den Fall des schweren Erdreiches ist indessen von H. REISSNER, dem man auch eine sehr klare Darstellung des Problems mit Hilfe der AIRYSchen Funktion verdankt, gezeigt worden, daß die RANKINESchen Lösungen das einzige Gleitliniensystem mit geradlinigen Gleitlinien darstellen.

Ein Gleitstreifen ist im mathematischen Sinne dadurch ausgezeichnet, daß, während im allgemeinen eine mit Spannungen belegte Linie die Lösung in der Nachbarschaft eindeutig bestimmt, dies für Gleitstreifen nicht gilt. Mit anderen Worten: es kann im allgemeinen durch einen Streifen nur eine Lösung des Gleichungssystems durchgelegt werden; nur durch den Gleitstreifen gehen unendlich viele Lösungen hindurch.

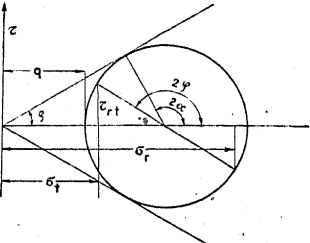
Es folgt daraus, daß wenn wir von der freien Oberfläche ausgehen, die gesuchte Lösung bis zu der Gleitlinie, die von dem Schnittpunkt der Geländeoberfläche und der Wand ausgeht,

²⁾ In der KÖTTERSchen Auffassung entspricht dieser Ansatz der Beschränkung der Beweglichkeit der Wand auf Drehung um die Kronenlinie.

mit der RANKINESchen Lösung identisch sein muß. An dieser Gleitlinie findet eine Verzweigung statt und unsere vornehmliche Aufgabe besteht darin, den mathematischen Charakter derselben zu finden.

Man kann unter der Annahme, daß alle Spannungskomponenten mit der von dem erwähnten Schnittpunkt gemessenen Entfernung r proportional sind, das System der Gleitlinien und den zugehörigen Spannungszustand durch zwei Größen festlegen, etwa durch den von r unabhängigen Neigungswinkel der kleineren Hauptspannung gegen den Fahrstrahl, wodurch auch die Richtung der Gleitlinie bestimmt ist, und durch eine Spannungsgröße; wir wählen als solche wieder die kleinere der beiden Hauptspannungen; sie soll durch den Ansatz $\sigma_2 = \gamma r q(\vartheta)$ ausgedrückt werden, wobei γ das spezifische Gewicht der Erde bedeutet.

Wir erhalten alsdann, indem wir die Spannungskomponenten durch φ und q ausdrücken (Abb. 4):



$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{r \gamma q}{2 \cos^2 \alpha} (1 + \cos 2 \alpha \cos 2 \varphi) \\ \sigma_\vartheta &= \frac{r \gamma q}{2 \cos^2 \alpha} (1 - \cos 2 \alpha \cos 2 \varphi) \\ \tau &= - \frac{r \gamma q}{2 \cos^2 \alpha} \cos 2 \alpha \sin 2 \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Abb. 4.

(ρ = Reibungswinkel, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$ ist der Winkel zwischen Gleitlinie und der kleineren Hauptspannung) und in das System der Gleichgewichtsgleichungen (Abb. 4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \vartheta} &= \gamma \sin \vartheta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2 \tau}{r} &= \gamma \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

einführen, die zwei folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für φ und q

$$\left. \begin{aligned} \frac{d q}{d \vartheta} (\cos 2 \varphi - \cos 2 \alpha) + q \sin 2 \varphi &= 2 \cos (\vartheta - 2 \varphi) \cos^2 \alpha \\ - \frac{d q}{d \vartheta} \sin 2 \varphi + q (\cos 2 \varphi + \cos 2 \alpha) - 2 q \left(\frac{d \varphi}{d \vartheta} - 1 \right) \cos 2 \alpha &= 2 \sin (\vartheta - 2 \varphi) \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} (9)$$

Die RANKINESchen Lösungen befriedigen naturgemäß diese Gleichungen. Sie sind durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R &= \varphi_0 + \vartheta \\ q_R &= \frac{1 + \cos 2 \varphi_0 \cos 2 \alpha}{1 - \cos 2 \alpha} \sin \vartheta + \frac{\sin 2 \varphi_0 \cos 2 \alpha}{1 - \cos 2 \alpha} \cos \vartheta = C \sin (\vartheta - i) \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

gegeben, wobei φ_0 durch die Beziehung $\sin (2 \varphi_0 + i) = - \frac{\sin i}{\cos 2 \alpha}$ bestimmt ist (i = die Geländeneigung nach unten positiv gerechnet).

Man sieht unmittelbar, daß man zu einem singulären Punkt gelangt, wenn φ den Wert α erreicht, d. h. die Gerade $\vartheta = \text{const.}$ selbst eine Gleitlinie wird. In diesem Falle ist der Faktor des Differentialquotienten $\frac{dq}{d\vartheta}$ in der ersten der beiden Gleichungen (9) Null. Wir schreiben die Gleichung in der Form:

$$\frac{dq}{d\vartheta} = \frac{q \sin 2 \varphi - 2 \cos (\vartheta - 2 \varphi) \cos^2 \alpha}{\cos 2 \alpha - \cos 2 \varphi} \dots \dots \dots (11)$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Zähler ebenfalls verschwindet oder von Null verschieden ist. Der erste Fall entspricht der Verzweigung von der RANKINESchen Lösung, der zweite Fall tritt auf, wenn wir eine Wand, die nach der RANKINESchen Lösung keine Gleitlinie bildet, zur Gleitlinie zu machen haben.

In der Tat beträgt für den Fall, daß die Gerade $\vartheta = \vartheta_0$ eine Gleitlinie bildet, d. h. $\vartheta = \alpha - \varphi_0$, $\varphi_0 = \alpha - \vartheta$ ist,

$$q_R \sin 2 \alpha = \frac{1 + \cos 2 \alpha \sin (2 \alpha - \vartheta)}{1 - \cos 2 \alpha} \sin 2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha (\sin 2 \alpha \sin \vartheta + \cos 2 \alpha \cos \vartheta),$$

so daß der Zähler in Gleichung (11) verschwindet.

Um den mathematischen Charakter der Verzweigung zu bestimmen, setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_R + g(t) \\ q &= q_R + f(t) \\ \vartheta &= \vartheta_0 + t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

und vernachlässigen höhere Glieder in t, f, g . Die Differentialgleichungen erhalten dann die Form:

$$\frac{df}{dt} = \frac{f - 2g \cot g 2 \alpha \sin (\alpha - \varphi_0 - t)}{2(g + t)} \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{df}{dt} \sin 2 \alpha + 2 \frac{dg}{dt} \sin (\alpha - \varphi_0 - t) \cos 2 \alpha = 2 f \cos 2 \alpha - 2 g \cos 2 \alpha \cos (\alpha - \varphi_0 - t)$$

Wir machen nun den Ansatz:

$$f = ag + \text{höhere Glieder in } t \text{ und } g \dots \dots \dots (14)$$

und schreiben die zweite Differentialgleichung in der Form:

$$\frac{df}{dg} \sin 2 \alpha + 2 \sin (\alpha - \varphi_0 - t) \cos 2 \alpha = 2 f \frac{dt}{dg} \cos 2 \alpha - 2 g \frac{dt}{dg} \cos 2 \alpha \cos (\alpha - \varphi_0 - t).$$

Diese Gleichung bestimmt offenbar die Konstante a zu

$$a = -2 \sin (\alpha - \varphi_0 - t) \cot g 2 \alpha \dots \dots \dots (15)$$

Führen wir nun den Ansatz (14) in die erste der Gleichungen (13) ein, so erhalten wir nach leichter Rechnung:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g + \text{höhere Glieder in } g \text{ und } t}{g + t + \text{höhere Glieder}} \dots \dots \dots (16)$$

Diese Gleichung bestimmt nun die Art der Verzweigung in dem singulären Punkt. Die Lösung lautet:

$$t = g \log |g| + Ag + \text{höhere Glieder} \dots \dots \dots (17)$$

Wir können die vollständige Lösung in der Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} f &= \log |g| \{b_1 g^2 + b_2 g^3 + \dots\} - 2 \sin(\alpha - \varphi_0 - i) \cotg 2\alpha g + a_1 g^2 + \dots \\ t &= \log |g| \{g + c_1 g^2 + c_2 g^3 + \dots\} + Ag + d_1 g^2 + d_2 g^3 + \dots \end{aligned} \right\} (18)$$

Es entspricht offenbar jedem frei gewählten Werte der Konstanten A eine Lösung; wenn wir A festlegen, können die weiteren Glieder der Entwicklung berechnet werden.

Wir haben nun jene Lösung auszuwählen, bei welcher eine vorgegebene Wand eine Gleitlinie bildet. Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Wand mit ϑ_w , so muß der Winkel φ für $\vartheta = \vartheta_w$ wieder den Wert α annehmen. Nun haben wir in dem Punkte $\vartheta = \vartheta_w$ den zweiten Fall des singulären Verhaltens der Funktionen φ und q , indem in Gleichung (11) wohl der Nenner, aber nicht der Zähler verschwindet. Es sei q_w der Wert von q an der Wand (q_w bestimmt den gesuchten Wert des Erddruckes), so haben wir

$$\frac{dq}{d\vartheta} = \frac{q_w \sin 2\varphi - 2 \cos(\vartheta - 2\varphi) \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha - \cos 2\varphi} \dots \dots \dots (19)$$

Wenn wir nun den Ansatz machen

$$\begin{aligned} q &= q_w + v(t), & \vartheta &= \vartheta_w - t \\ \varphi &= \alpha + u(t) \end{aligned} \dots \dots \dots (20)$$

und $v = au \pm$ höhere Glieder setzen, so bestimmt die zweite Gleichung die Konstante a zu

$$a = -2 q_w \cotg 2\alpha \dots \dots \dots (21)$$

und wir erhalten für u die Entwicklung:

$$u = \sqrt{\left[\frac{\cos^2 \alpha}{q_w \cos 2\alpha} \cos(\vartheta_w - 2\alpha) - \frac{\tg 2\alpha}{2} \right] (\vartheta_w - \vartheta)} + \dots \dots (22)$$

Führen wir den Wert $q_R = \cos(\vartheta_w - 2\alpha) \cotg \alpha$, der einer RANKINESCHEN Gleitlinie entsprechen würde, ein, so können wir schreiben

$$u = \sqrt{\frac{\tg 2\alpha}{2} \left(\frac{q_R}{q_w} - 1 \right) (\vartheta_w - \vartheta)} + \dots$$

Der Differentialquotient $\frac{du}{d\vartheta}$ ist an der Wand unendlich; dies bedeutet, daß die Wand die Enveloppe von Gleitlinien bildet. Die einzigen regulären geraden Gleitlinien, die durch den Ursprungspunkt gehen, sind die Rankineschen.

Ist man im Besitze beider Entwicklungen — an der Verzweigungsstelle und an der Wand —, so ist es leicht, durch bekannte numerische oder graphische Methoden die zusammen-

gehörigen Lösungen zu verbinden. Die Abbildungen 5 und 6 zeigen die so gewonnenen Gleitliniensysteme und zwar für horizontales und unter dem Reibungswinkel abfallendes Gelände, beide Fälle für vertikale Wand gerechnet. Die Gleitlinie besteht in dem ersten Falle aus einem

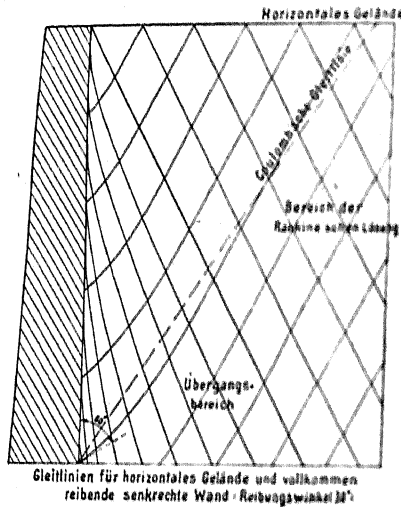


Abb. 5.

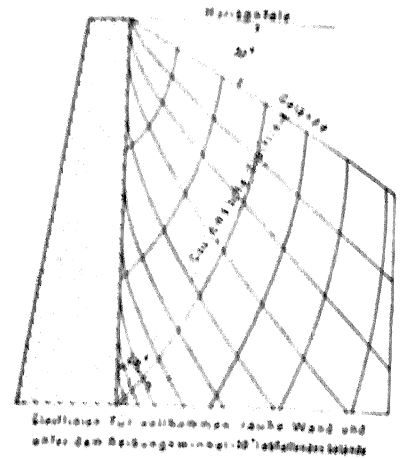


Abb. 6.

geraden und einem gekrümmten Stücke, in dem Grenzfall des abfallenden Geländes bleibt nur das Kurvenstück übrig. In beiden Fällen liefert die nach dem bekannten Coulombschen Verfahren gewonnene gerade Gleitlinie eine gute Annäherung.

Dasselbe gilt für die Größe des Erddruckes. Wir setzen den Wert des horizontalen Erddruckes auf eine Mauer von der Höhe h in Verhältnis zu der Größe

$$E_R = \frac{\gamma h^3}{2} K^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right)$$

die die Rankinesche Theorie für horizontales Gelände liefert, indem wir schreiben:

$$E = \beta E_R$$

Als dann erhalten wir für den Faktor β folgende Werte (Reibungswinkel = 30°):

	horizontales Gelände	Geländeneigung 30°
Coulombsche Theorie	0.79	0.70
Exakte Theorie	0.81	0.71

Die exakte Durchführung der Theorie liefert mithin für die Praxis keine wesentlich neuen Ergebnisse; immerhin darf damit eine vielbehandelte, klassische Aufgabe der technischen Mechanik als erledigt gelten.

Molekulare Kräfte und ihre Deutung¹⁾

Von P. Debye, Zürich

1. Die Zeiten, in denen es gestattet war, in den Theorien mit Molekülen wie mit harten Billardkugeln zu spielen, sind vorbei. Selbst die Verfeinerung dieser Vorstellung durch Einführung von Kraftgesetzen, die nach Analogie der NEWTONschen Gravitation etwa durch eine Potenz der Entfernung ausdrückbar sind, ist überlebt. Wir glauben heute zu viel über den Aufbau der Atome zu wissen, um befriedigt sein zu können, ohne daß wir den Versuch unternommen hätten, jene Kenntnisse in organischen Zusammenhang zu bringen mit unseren Erfahrungen über die Molekularkräfte.

Das erste, was wir über die Atome wissen, ist, daß sie elektrische Systeme sind, aufgebaut aus Ladungen, die nicht beliebig teilbar, sondern ganzzahlige Vielfache einer Elementarladung, derjenigen des Elektrons sind. Für die Kraft zwischen zwei makroskopischen elektrischen Ladungen hat COULOMB vor einem Jahrhundert experimentell das Gesetz gefunden, wonach sie sich gegenseitig anziehen oder abstoßen, umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung und proportional dem Produkte ihrer Ladungsmengen. Auf diesem Gesetze ist das übliche elektrostatische Maßsystem aufgebaut; es hat sich anderseits bis jetzt bewährt bis auf Abstände, welche etwa 10,000 mal kleiner sind als der Durchmesser eines Atoms.

Bedeutend weniger gut sind wir unterrichtet über die Bewegungsgesetze der Ladungen und über die Verknüpfung jener Bewegungen mit den elektromagnetischen Feldern, die wir als Strahlung empfinden. Zwar legen die großartigen Erfolge, z. B. in der Deutung der Spektren Zeugnis davon ab, daß die Einführung des Wirkungsquantums durch PLANCK und seine Verknüpfung mit dem RUTHERFORDSchen Atommodelle durch BOHR notwendige Schritte sind, die uns zu einer neuen Mechanik führen werden. Aber die wirklichen Gesetze dieser Atommechanik haben wir noch nicht vollkommen erfaßt.

So mag es trotz allem verfrüht erscheinen, Betrachtungen über Molekularkräfte anzustellen, die nichts anderes sein können als Betrachtungen über die Felder, die von einem Molekül ausstrahlend ein zweites erreichen. Aber wenn auch bei solchen Ueberlegungen nicht die letzte Wahrheit erreicht wird (etwa dadurch, daß mit der klassischen Mechanik operiert wird, wo wir doch wissen, daß wir eine neue Atommechanik verwenden sollten), so sind doch die Resultate deshalb nicht bedeutungslos. Genau so, wie wir wissen, daß die klassischen mechanischen Gesetze verbesserungsbedürftig sind, ebenso gut wissen wir, daß sie nicht ganz falsch sind. Sie stellen vielmehr denjenigen Grenzfall der richtigen Gesetze dar, den man erhalten würde, wenn das PLANCKsche Wirkungsquantum verschwindend klein wäre, und von dem, was wir mit ihrer Hilfe erschließen, werden wir erwarten dürfen, daß es eine gewisse Aehnlichkeit behalten haben wird mit den Naturgesetzen, oder anders ausgedrückt, daß eine Korrespondenz zwischen den errechneten und den wirklichen Gesetzen vorhanden sein wird. Ueberlegungen dieser Art wurden von BOHR zum «Korrespondenzprinzip» erhoben und mit Erfolg verwendet. Deshalb scheint es durchaus berechtigt, zunächst mit Hilfe der klassischen Gesetze

¹⁾ Die Kongreßleitung war der Meinung, daß Ausführungen über Molekularkräfte auch für Vertreter der technisch-mechanischen Richtung einiges Interesse haben könnten. Ich weiß wohl, daß der Raum, welcher hier meinem Vortrage eingeräumt wird, zu groß ist, verglichen mit dem Interesse, das die Kongreßteilnehmer naturgemäß dafür aufbringen. Ich möchte deshalb nicht unterlassen, der Leitung meinen Dank für ihr Entgegenkommen darzubringen, das sie durch den Abdruck bekundet in der stillen Hoffnung, daß in ferner Zukunft doch noch die Brücke zwischen technischer Mechanik und Molekularphysik begangen werden wird.

vorzugehen. Manches, was auf diesem Wege eingeführt werden muß, wird auch später seine Berechtigung behalten. Anderes wird durch Neues zu ersetzen sein. Aber gerade dort, wo sich die deutlichsten Widersprüche mit dem wirklichen Naturverhalten zeigen, wird der Punkt sein, wo man mit der besten Hoffnung an die Konstruktion oder Vervollständigung der Gesetze der Atommechanik herantreten darf.

2. Man wird von vornherein erwarten, daß man die elektrische Natur der Molekularkräfte in jenen Fällen am leichtesten erkennen wird, wo die Atome in Form von Ionen existieren und deshalb ihr Feld, entsprechend dem Coulombschen Gesetze, mit wachsender Entfernung nur wenig geschwächt, ausdehnen können. Die kleinste Ladung, die vorkommen kann, die eines einwertigen Ions oder des Elektrons, ist nach MILLIKAN im elektrostatischen Maßsystem $4,77 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten²⁾.

Man hat früher gelegentlich für die Erklärung der Molekularkräfte die allgemeine Gravitation heranziehen wollen. Indessen sieht man sofort, daß diese ungeheuer klein ist, verglichen mit den elektrischen Kräften. Beide Kräfte nehmen im einfachsten Falle umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ab, in jeder Entfernung stehen sie also im selben Verhältnis. Für die Wirkungen zwischen einem *Na* und einem *Cl*-Ion findet man zahlenmäßig, daß die elektrische Kraft 10^{33} mal so groß ist als die Gravitationskraft.

Wir können uns nun fragen, ob die soeben abgeschätzten elektrischen Kräfte von der richtigen Größenordnung sind, um die tatsächliche Stärke des molekularen Zusammenhalts etwa eines Steinsalzkrystalles zu erklären. Ehe man aber diese Berechnung macht, muß man sicher sein, daß wirklich auch im festen Steinsalz die Bausteine von den Ionen *Na* und *Cl* gebildet werden. Diese Sicherheit hat man nun heute in der Tat. Ueber die Anordnung der Einzelteilchen (jedes *Na*-Ion umgeben von 6 *Cl*-Ionen und jedes *Cl*-Ion umgeben von 6 *Na*-Ionen) haben uns die Beobachtungen von BRAGG über die Reflexion von Röntgenstrahlen im Sinne der LAUESchen Interferenzidee unterrichtet. Nicht ein hypothetisches Molekül *NaCl*, sondern die einzelnen Atome sind demnach die Bausteine. Daß ferner die Atome als Ionen vorkommen, erhellt am einfachsten aus der Tatsache, daß Steinsalz imstande ist, die RUBENSschen Reststrahlen zu erzeugen, d. h. daß dieses Salz im Ultraroten ein Gebiet sehr starker selektiver Reflexion aufweist. In der Tat versteht man, daß das elektromagnetische Feld der Strahlung an dem Kristall angreifen kann, wenn die Einzelteilchen geladen sind und begreift die Existenz einer ausgezeichneten Frequenz als die Eigenfrequenz des positiven *Na*-Gitters gegen das eingeschobene negative *Cl*-Gitter, ganz so, wie das MADELUNG noch zeitlich vor den BRAGGSchen Beobachtungen geschildert hat.

Aus den Röntgenstrahlenbeobachtungen kennt man den Abstand von *Na* zu *Cl* im Krystall, die Ladung jedes dieser Ionen ist die eines Elektrons; man kann also die potentielle elektrische Energie etwa eines Mols (58 gr) Steinsalz berechnen, unter der Annahme, daß die Atome in ihrer gegenseitigen Wirkung vollständig durch Punkt-Ladungen zu ersetzen sind. Damit ist allerdings noch nicht alles getan, denn wäre nur diese Energie vorhanden, dann würde kein Gleichgewicht in einem definierten endlichen Abstände möglich sein. BORN, der diese Rechnung zuerst ausführte, sieht sich deshalb gezwungen, noch abstoßende Zusatzkräfte

²⁾ Es ist von Bedeutung, sich klar zu machen, daß diese Ladung außerordentlich groß ist. Nimmt man z. B. 1 Mol, d. h. 58 Gramm Steinsalz (*NaCl*) so ist darin jedes *Na*-Teilchen als einwertiges, positives Ion und jedes *Cl*-Teilchen als einwertiges negatives Ion vorhanden. Man denke sich nun die *Na*-Ionen, im ganzen 23 Gramm, an den Nordpol der Erde, und die *Cl*-Ionen, im ganzen 35 Gramm, an den Südpol befördert. Es werden sich dann die beiden Teile gemäß dem Coulombschen Gesetze anziehen, und trotz ihrer großen Entfernung berechnet sich für die gegenseitige Anziehungskraft der Betrag von 52 000 Kilogramm.

zwischen den Ionen einzuführen, deren Ursprung dunkel bleibt, deren Existenz indessen nicht zu bezweifeln ist. Er setzt sie proportional einer Potenz der Entfernung und bemißt ihre Stärke so, daß der tatsächlich beobachtete Abstand resultiert, während der Exponent der Potenz durch die Forderung festgelegt ist, daß das Modell auch den Betrag der wirklichen Kompressibilität wiedergeben kann. Zum Glück erweist sich dieser Exponent relativ groß, entsprechend einem sehr steilen, an die «harten Kugeln» erinnernden Anstieg der Abstoßungskräfte bei der gegenseitigen Annäherung. Infolgedessen spielt die zu diesen Kräften gehörige Energie nur eine untergeordnete Rolle und ihre Fehler können das Hauptresultat nur wenig beeinflussen. Diesem Befunde entspricht außerdem die Tatsache, daß man, wie BRAGG und WASASTJERNA zeigen, jedem Atom und jedem Ion in den verschiedensten Kristallen stets denselben nur für das Atom oder Ion charakteristischen Raum zur Verfügung zu stellen hat.

Die Energie eines Mols NaCl in Krystallform läßt sich durch Kombination von Beobachtungen über Bildungs- und Sublimationswärme, sowie der Ionisationsenergie experimentell bestimmen. Sie ergibt sich zu 180 kg Cal. Born zeigt, daß diese Energie übereinstimmt mit der errechneten.

Der experimentelle Wert für die Energie eines solchen Krystallgebildes ist immerhin nur auf Umwegen, durch Kombination mehrerer Beobachtungen zu erzielen. Es scheint viel näher zu liegen, daß man fragt, ob es denn nicht möglich sein sollte, ein Maß für die Krystallkräfte zu bekommen durch Ausführung eines einfachen Zerreißversuches. Man kann in der Tat, wie es ZWICKY gemacht hat, berechnen, wie sich die Ionenebenen unter seitlicher Kontraktion voneinander entfernen, wenn man Zugkräfte in Richtung einer krystallographischen Achse an einem Steinsalzstück angreifen läßt. Man findet dann eine Kraft, welche mit zunehmender Dehnung immer langsamer anwächst, um bei einem bestimmten Werte der Verlängerung ein Maximum zu erreichen. Man wird offenbar diesen Maximalwert mit der Zerreißfestigkeit identifizieren müssen. Tut man das, so ergibt sich theoretisch, daß man an einem Stäbchen vom Querschnitt 1 mm^2 mit einer Kraft von 300 kg ziehen müßte, um es zu zerreißen. Das Experiment ist weit entfernt davon, diese Zahl zu bestätigen, das Stäbchen reißt schon, wenigstens bei der üblichen Anordnung, wenn man 0,5 kg anhängt. Soll man diesen Widerspruch als ein Beweis gegen die Richtigkeit der Grundvorstellungen ansehen? Vieles weist darauf hin, daß man besser daran tut, die Erklärung darin zu suchen, daß ein größeres Krystallstück in den allermeisten Fällen wesentlich abweicht von dem Bilde des über seine ganze Erstreckung mathematisch regelmäßigen Gitters und vielmehr einen Bau aufweist, den man mit dem sofort einleuchtenden Namen «Mosaikstruktur» benannt hat. Ist dem so, so ist keine Gewähr mehr dafür vorhanden, daß das Resultat der Rechnung mit der Wirklichkeit übereinstimmen wird. Das besonders technisch interessante Problem der Materialfestigkeit ist damit theoretisch als eine sehr schwierige Frage gekennzeichnet. Und obwohl ein endgültiges Urteil heute noch nicht erreicht ist, darf doch darauf hingewiesen werden, daß JOFFE bei geeigneter Anordnung des Versuches 80 % der theoretischen Zerreißfestigkeit praktisch erhalten hat bei Steinsalz, so daß ein triftiger Grund zur Beunruhigung nicht vorliegen dürfte.

3. Ein großes Gebiet, auf dem die Auffassung der Molekularkräfte als elektrische zu einem tieferen Verständnis zu führen scheint, ist das der Elektrolytlösungen. Das klassische Gebäude der Lösungstheorie wurde aufgebaut auf zwei Grundgesetzen. Das VAN T'HOFFsche Gesetz des osmotischen Druckes, wonach dieser und zugleich die verwandten Erscheinungen der Gefrierpunktserniedrigung und der Siedepunkterhöhung der Zahl der gelösten Teilchen proportional sind, ohne daß deren besondere Art eine Rolle spielt, führt ARRHENIUS zu der Auffassung der Existenz freier Ionen in der Lösung. Die Zahl dieser Ionen, der Dissoziationsgrad wird festgelegt durch das zweite Grundgesetz, das Massenwirkungsgesetz von GULDBERG-

WAAGE, welches das Gleichgewicht zwischen undissoziierten und dissoziierten Molekülen quantitativ regelt und hier speziell die Form des OSTWALDSchen Verdünnungsgesetzes annimmt. So groß war der Erfolg dieser Gesetze, daß man erst ganz allmählich dazu kam, die Fälle genauer zu betrachten, in denen sie für sich allein genommen offenbar versagen, obwohl die Schwierigkeiten an sich schon frühzeitig erkannt wurden. Diejenigen Salze, welche im Sinne von Arrhenius weitgehend in Ionen gespalten sind, fügen sich nicht den quantitativen Forderungen der Grundgesetze, ihr Verhalten wurde als die Anomalie der starken Elektrolyte registriert. Zu dieser Klasse gehören die meisten der gewöhnlichen anorganischen Salze.

Angesichts dieser Tatsache wird man versuchen, die notwendigen Grundlagen festzustellen, aus denen die Gültigkeit der klassischen Grundgesetze erschlossen werden kann. Man bemerkt dann sofort ihre Analogie mit den Gesetzen der idealen Gase und gleichzeitig wird klar, daß sie theoretisch nur so lange gelten können, als man berechtigt ist, die Molekularkräfte als nebensächlich überhaupt zu vernachlässigen. Bei der Diskussion über den Energieinhalt von Krystallen, die wie Steinsalz aus Ionen aufgebaut sind, sahen wir, wie stark die elektrischen Kräfte sind, welche zwischen Ionen entsprechend dem Coulombschen Gesetze auftreten. Bedenkt man dann, daß die auffälligen Abweichungen der klassischen Gesetze gerade in den Fällen auftreten, wo man auf eine sehr weitgehende Dissoziation in Ionen zu schließen hat, so liegt es nahe, an einen Zusammenhang zu denken zwischen der Anomalie der starken Elektrolyte einerseits und den Korrekturen der Grundgesetze, welche die Berücksichtigung der Ionenkräfte andererseits herbeiführen muß.

Aber auch ohne das Problem von diesem speziellen Gesichtspunkte anzugreifen, kann man sich zunächst, in Kontakt mit den allgemeinen Regeln der Thermodynamik, überlegen, in welcher Weise man wohl das Verhalten der Elektrolyte praktisch fassen konnte. Darin, daß es sich um eine praktische Fassung handelt, kommt gleich zum Ausdruck, daß das Resultat nicht eindeutig sein kann und es viele Möglichkeiten geben wird, unter denen man dann mehr aus Gefühlsgründen eine als praktisch bevorzugen wird. G. N. LEWIS hat das getan durch Einführung des thermodynamisch begründeten Begriffes der Aktivität.

Betrachtet man z. B. das Gleichgewicht zwischen NaCl Molekülen und den Ionen Na und Cl , so ist der einfachste Ansatz der von GULDBERG-WAAGE, wonach in der Zeiteinheit die Anzahl zerfallende Moleküle proportional ihrer Zahl sein wird, während gleichzeitig die Anzahl Moleküle, welche sich bildet, proportional gesetzt wird dem Produkte der Zahlen vorhandener Na , resp. Cl -Ionen. Die Thermodynamik zeigt indessen, daß im allgemeinen Falle bei Anwesenheit von Molekularkräften die Zahlen oder Konzentrationen selbst zu ersetzen sind durch kompliziertere Funktionen derselben, welche man dann Aktivitäten nennen und so einführen kann, daß das Massenwirkungsgesetz thermodynamisch richtig ist, wenn nur die Konzentrationen durch die Aktivitäten ersetzt werden. Das Verhältnis Aktivität zu Konzentration kann man noch mit dem Namen Aktivitätskoeffizient belegen und nun versuchen, aus den experimentellen Ergebnissen auf die Abhängigkeit der Aktivitätskoeffizienten der einzelnen Ionen von den innern und äußern Bedingungen der Lösung zu schließen.

Diesen Weg haben insbesondere BRÖNSTEDT und LEWIS konsequent verfolgt und letzterer hat 1921 zusammen mit RANDALL die Erfahrung zusammengefaßt in einer Regel, welche er die Hypothese der «independent activity coefficients of the ions» nennt. Nach dieser Regel soll für den Aktivitätskoeffizienten eines Ions nicht die Ionenkonzentration der Lösung, sondern viel mehr eine fiktive Konzentration, die sogenannte Ionenstärke, maßgebend sein, welche in ihrer Bildung auf Konzentration und Wertigkeit gleichzeitig Rücksicht nimmt. Das geschieht, indem man zunächst jede Ionenkonzentration multipliziert mit dem Quadrate der Wertigkeit des betreffenden Ions und dann erst die Produkte zur Bildung der Ionenstärke

der Lösung addiert. Offenbar wird somit der Einfluß der verschiedenen Ionen mit einem um so größeren Gewicht versehen, je höher ihre Wertigkeit, d. h. ihre elektrische Ladung ist.

So sieht man in dieser Regel in klarerer Form erneut einen Hinweis auf die Wirksamkeit der Ionenkräfte hervortreten, denn diese sind entsprechend dem Coulombschen Gesetze den Ladungen und damit den Wertigkeiten proportional. In der Tat führt eine eingehendere Betrachtung der Wirksamkeit der Ionenkräfte auf eine Begründung der Lewisschen Regel. Nimmt man z. B. eine NaCl -Lösung und betrachtet etwa ein Na -Ion und seine Umgebung. Es wird dann, eben infolge der Coulombschen Kräfte wahrscheinlicher sein, daß man in einem irgendwie herausgegriffenen Abstand ein umgekehrt geladenes Cl -Ion als ein gleich geladenes Na -Ion findet. Und trotzdem die Regelmäßigkeit in der Anordnung, welche sich herstellen möchte und die GHOSH in gar zu weit gehender Idealisierung mit der Anordnung in einem Steinsalzkrystall verglich, infolge der Temperaturbewegung nicht zustande kommen kann, so wird doch ein Rest von dieser Ordnung übrigbleiben, über deren Gesetzmäßigkeit zuerst MILNER Untersuchungen angestellt hat. Man wird behaupten können, daß jedes Ion im Mittel von einem Schwarm umgeben sein wird, in dem die entgegengesetzt geladenen um so stärker überwiegen, je näher man an das Ion herangeht. Unter vereinfachenden Voraussetzungen gelingt es nun zu zeigen, daß die mittlere Dichte der Ueberschußladung im Schwarm mit der Entfernung vom Ion so abnimmt, daß für diese Abnahme eine Strecke maßgebend ist, die nur von der oben eingeführten Ionenstärke abhängt, sofern die Kräfte zwischen den Ionen dem Coulombschen Gesetze genügen. Dieses führt dann ohne weiteres zu einer elektrostatischen Begründung der Lewisschen Regel.

Zugleich mit der Erklärung dieser Gesetzesmäßigkeiten erhält man die Erklärung für das ebenfalls merkwürdige Verhalten, welches die Leitfähigkeit der starken Elektrolyte in großer Verdünnung kennzeichnet und das schon von KOHLRAUSCH auf eine Form gebracht wurde, von der er feststellen mußte, daß sie mit dem klassischen Massenwirkungsgesetze keinen Zusammenhang haben könne.

BJERRUM hat seit vielen Jahren die Wichtigkeit der Ionenkräfte hervorgehoben und gibt seiner Ueberzeugung Ausdruck, daß in vielen Fällen der gewöhnlich angegebene Dissoziationsgrad von weniger als 100 % nur durch die Wirkung der Ionenkräfte vorgetäuscht sei. NERNST dagegen findet in neuester Zeit bei Beobachtungen über Verdünnungswärmen ein individuelles Verhalten der Ionen, welches ihm in Widerspruch mit der Lewisschen Regel zu stehen scheint und ihn veranlaßt, an der Bedeutsamkeit der Coulombschen Kräfte zu zweifeln. Die Diskussion wird vielfach unter dem Schlagwort: «vollständige oder unvollständige Dissoziation» geführt, was zur Folge hat, daß der eigentliche Kern der Frage verschleiert wird.

Um was es sich m. E. wirklich handelt, kann am besten illustriert werden an Hand einer Analogie. Bemerkt man, daß Joddampf nicht den idealen Gasgesetzen genügt, dann findet man dafür die Erklärung in der Tatsache, daß das Jodmolekül in Jodatome dissoziiert und man wendet zur Berechnung der Abweichungen das Massenwirkungsgesetz an. Es sei gestattet, diese Methode die «chemische Methode» zu nennen. Nun weiß man aber, daß alle Gase, auch solche, bei denen von einer Dissoziation nicht die Rede sein kann (wie etwa die einatomigen), Abweichungen von den idealen Gasgesetzen zeigen. Alle Gase lassen sich ja verflüssigen! Für die Erklärung dieser Abweichungen greift man nach VAN DER WAALS auf die Hypothese der Molekularkräfte zurück und wendet damit eine Methode an, welche die «physikalische Methode» genannt werden soll³⁾. Es besteht wohl darüber keine Uneinigkeit, daß für ein vollständiges

³⁾ Die Bezeichnungen sind gewählt im Zusammenhange mit der historischen Entwicklung; würden wir nur an die durch die moderne Atomtheorie geleistete grossartige Verschmelzung von Chemie und Physik denken, so müsste man die Wahl als unstatthaft bezeichnen.

Verstehen *beide* Methoden gleichzeitig herangezogen werden müssen. Während dieses nun im Falle der Gase durchweg geschieht, hat man für die Theorie der Lösungen lange Zeit hindurch die «chemische Methode» allein bevorzugt. Die Meinung ist, daß daneben eine Berücksichtigung der Ionenkräfte, die zu ihrer Behandlung die «physikalische Methode» erfordern, unerlässlich ist. Man kann nur noch fragen, welcher Gesichtspunkt praktisch der wichtigste ist. Das wird, wie bei den Gasen, in jedem Falle für sich entschieden werden müssen. Ich halte es immerhin für möglich, die allgemeine Feststellung zu machen, daß die «physikalische Methode», die bei den schwachen Elektrolyten nur eine praktisch wenig bedeutsame Korrektur bedingt, im Falle der starken Elektrolyte den weit überwiegenden Teil der Erklärung liefert.

Schließlich kann man sich noch die Frage vorlegen, ob zwischen den Kräften, mit denen beide Methoden operieren, in der Tat ein prinzipieller Unterschied existiert. erinnert man sich an eine Arbeit von BOLTZMANN, in welcher das dem Massenwirkungsgesetz entsprechende Dissoziationsgleichgewicht zwischen Jodmolekül und Jodatomen abgeleitet wird auf Grund der Annahme, daß die Jodatome an ihrer Oberfläche «kleine empfindliche Bereiche» haben, die den Sitz großer Kräfte sind, so sieht man, daß formal kein solcher Unterschied existiert. Indessen wissen wir heute, daß die in der Boltzmannschen Rechnung auftretende Größe der empfindlichen Bereiche, sich auf dem Umwege über die NERNSTschen chemischen Konstanten durch das PLANCKsche Wirkungsquantum ausdrücken läßt. Man darf daher vielleicht vermuten, daß zwischen einer wahren chemischen Bindung, wie sie der «chemischen Methode» zu Grunde liegt, und einer kontinuierlich und stetig veränderlichen «physikalischen Bindung», von der die andere Methode ausgeht, doch ein wesentlicher Unterschied existieren mag, indem man im ersten Falle die Bindung als Folge eines Quantensprunges mit endlicher Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endstadium ansieht.

4. Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich alle auf Atome oder Moleküle, welche durch Verlust oder Aufnahme eines oder mehrerer Elektronen zu Ionen geworden sind. Man könnte den Einwand erheben, daß hier die Existenz Coulombscher Kräfte selbstverständlich ist und das, was gewöhnlich als Molekularkraft bezeichnet wird, einfach durch die weit überwiegende Wirkung elektrostatischer Ladungskräfte überdeckt ist. Es ist deshalb unerlässlich, die Grundidee auch dort zu verfolgen, wo es sich um die gegenseitigen Wirkungen ungeladener Gebilde handelt.

Frägt man sich dementsprechend, wie man mit Hilfe elektrischer Ladungen ein neutrales Gebilde herstellen kann, so drängt sich als einfachste Möglichkeit das Bild eines Dipols auf: Eine positive und eine gleich große negative Ladung in gewissem Abstände voneinander fixiert. Das Feld, welches von einer solchen Kombination ausstrahlt, gleicht dem Felde eines Magneten. Seine Intensität nimmt proportional der dritten Potenz der Entfernung ab, eine Tatsache, welcher der verbesserten inneren Absättigung entspricht, die durch die Kombination zweier Ladungen erreicht wird. Stellt man die Ueberlegung in dieser primitiven Weise dar, so muß der Eindruck der Willkür sich aufdrängen. Dem ist aber trotzdem nicht so.

Hat man irgend ein statisches System von Ladungen, so wird das Potential desselben um so verwickelter werden, je näher man an das System herankommt. Der Mathematiker, der die Absicht hat, jenes Potential durch eine Formel darzustellen, wird deshalb eine Reihenentwicklung wählen, welche fortschreitet nach negativen Potenzen der Entfernung von irgend einem festgewählten Punkte am besten im Innern des Systems. Tut man das, so bekommt man in der Potentialdarstellung ein erstes dem reziproken Abstände proportionales Glied, welches als Faktor die algebraische Summe aller Ladungen aufweist. Das zweite Glied ist dem reziproken Quadrat jenes Abstandes proportional und erfordert zu seiner quantitativen Festlegung die Definition eines Vektors, des Momentenvektors, der bildlich durch zwei ent-

gegengesetzt gleiche Ladungen im endlichen Abstände dargestellt werden kann und dessen Größe durch das Produkt Ladung mal Abstand gemessen werden muss. Geht man zum dritten Gliede über, so ist dieses der dritten Potenz des reziproken Abstandes proportional und ist quantitativ gekennzeichnet durch Größen von der Dimension Ladung mal Quadrat eines Abstandes, die man als Quadrupolmomente oder als elektrische Trägheitsmomente des Ladungssystems bezeichnet. In dieser Weise kann man die Reihe fortsetzen, jedes weitere Glied erfordert die Einführung von Momenten höherer Ordnung.

Vom Standpunkte dieser Reihenentwicklung aus gesehen, ist demnach die Einführung von Molekülen, die ähnlich wie Magnete wirken und ihre Kennzeichnung durch elektrische Dipolmomente durchaus natürlich. Selbstverständlich wird nicht jedes neutrale Gebilde eine Dissymmetrie der Ladungsverteilung aufweisen, wie sie dem Dipolcharakter entspricht. Es kann auch die innere Symmetrie größer sein. Dann wird das Dipolmoment Null sein und das System wird sein Feld so konzentrieren, daß es proportional der vierten Potenz der Entfernung an Intensität abnimmt, während zu seiner Kennzeichnung nunmehr die elektrischen Trägheitsmomente dienen werden. Entsprechend der Reihenentwicklung kann das Einteilungsverfahren fortgesetzt werden. So verschwindet z. B. das Feld wieder, wenn die drei elektrischen Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, dann wird das Reihenglied wichtig, welches der vierten Potenz der reziproken Entfernung proportional ist, usw.

Für den Physiker handelt es sich nun zunächst darum, die Existenz von Dipolmolekülen experimentell nachzuweisen. Bringt man ein Ion in ein homogenes elektrisches Feld, so wird darauf eine Kraft ausgeübt und es entsteht unter geeigneten Umständen der elektrische Strom. Ein Dipolmolekül dagegen erfährt in einem solchen Felde im ganzen keine einseitig gerichtete Kraft; nur ein Drehmoment wird ausgeübt, welches bestrebt ist, das Molekül so zu drehen, daß seine Momentenachse parallel dem Felde zu liegen kommt, ähnlich wie das mit einem Magnetstäbchen im Erdfelde geschieht. Unter Einwirkung eines homogenen Feldes, etwa zwischen den Platten eines Kondensators, werden also die Moleküle einer Flüssigkeit oder eines Gases sich, sofern sie Dipolcharakter haben, orientieren und infolgedessen der Volumeneinheit ein elektrisches Moment erteilen. Die Größe des erzeugten Momentes steht in nahem Zusammenhange mit der Dielektrizitätskonstanten. Einfach ist indessen diese Beziehung nur bei Gasen. Sind die Moleküle so benachbart, daß sie sich gegenseitig merklich beeinflussen, dann kann von der Dielektrizitätskonstanten auf das Moment nur unter Heranziehung von Betrachtungen über die gegenseitige Wirkung geschlossen werden. Man benützt hier gewöhnlich eine schon von MOSOTTI und CLAUSIUS abgeleitete Beziehung. Diese ist indessen im allgemeinen nicht streng richtig, eine bessere Beziehung existiert aber zurzeit nicht. Diskutiert man das dielektrische Verhalten von Flüssigkeiten, so benutzt man also nebeneinander Hypothesen über die Erzeugung des Momentes und solche über die gegenseitige Wirkung. Es ist unmöglich, reinlich zu trennen. Auf die Nichtbeachtung dieser Tatsache sind gelegentliche schiefe Urteile zurückzuführen.

Wir wissen, daß die Dielektrizitätskonstante für alle Körper ohne Ausnahme größer als 1 ist. Alle Körper nehmen also unter Einwirkung eines elektrischen Feldes ein Moment an, das positiv ist. Sollen wir nun schließen, daß dieses Moment in allen Fällen durch Orientierung der Moleküle zustande kommt und demnach alle Moleküle Dipolcharakter haben? Dieser Schluß ist unberechtigt. Ebenso wie eine leitende Kugel in einem Felde ein Moment annimmt, dadurch, daß die frei beweglichen Ladungen sich verschieben, kann ein Molekül ein Moment erhalten, dadurch, daß es quasi elastisch deformiert wird und seine Ladungen kleine Verschiebungen erfahren. Diese Art der Influenz ist sogar die einzige, welche lange Zeit allein in Betracht gezogen wurde. Es genügt also nicht, die Dielektrizitätskonstante allein zu messen; es

muß vielmehr nach einer Eigenschaft dieser Konstanten gesucht werden, die wesentlich mit dem Dipolcharakter verknüpft ist. Wir wissen, daß die Moleküle eine höchst ungeordnete Bewegung, die Temperaturbewegung, aufweisen. Versucht man also Dipolmoleküle mit Hilfe eines elektrischen Feldes zu orientieren, so wird diese Orientierung nicht voll zustande kommen können, da sie fortwährend infolge der Temperaturbewegung durch die gegenseitigen Stöße der Moleküle gestört werden wird. Man wird offenbar um so weniger Orientierung bekommen, je intensiver die Bewegung, d. h. je höher die Temperatur ist. Schließt man daher etwa ein Gas von Dipolmolekülen in einem unveränderlichen Volumen ein, so wird man zu erwarten haben, daß die bei konstanter Dichte bestimmte Dielektrizitätskonstante mit zunehmender Temperatur abnehmen muß. Das Gesetz, nach welchem dieses geschieht, kann mit Hilfe des BOLTMANN-MAXWELLSchen Prinzips berechnet werden. Die Begründung ist vollkommen analog derjenigen, die LANGEVIN auf dem Gebiete des Magnetismus ausführte zur Ableitung des CURIESchen Gesetzes des Paramagnetismus. Diese innere und äußere Ähnlichkeit beider Fälle brachte SOMMERFELD neulich dazu, für die elektrische Erregung durch Orientierung den Namen Paraelektrizität vorzuschlagen. Während nun die Erregung auf Grund der Orientierung sich als temperaturempfindlich erweist, ist das mit der Erregung durch Deformation nicht der Fall. Durch Untersuchungen über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten bekommt man also die Möglichkeit, festzustellen, ob die betreffenden Moleküle Dipolcharakter haben, und kann dann durch Anwendung des Temperaturgesetzes die Größe des Dipols bestimmen.

Solche Untersuchungen wurden schon vor langer Zeit, als ihre Deutung noch nicht bekannt war, im NERNSTschen Laboratorium ausgeführt von BAEDERER. Später hat dann JONA und in neuester Zeit haben besonders ZAHN in Princeton und SÄNGER in Zürich solche Messungen mit modernen Hilfsmitteln gemacht. Das Temperaturgesetz hat sich bisher stets bestätigt. Die Werte, welche für die Dipolmomente gefunden wurden, sind von der Größenordnung 10^{-18} . Gerade diese Größenordnung ist es, welche das Zutrauen in die Richtigkeit der Voraussetzungen wesentlich bestärkt. Die Ladung eines Elektrons ist von der Größenordnung 10^{-10} C.G.S. Einheiten, die Abstände im Molekül sind von der Größenordnung 10^{-8} cm; wir haben also in der Tat von vornherein zu erwarten, daß das Moment (durch ein Produkt Ladung mal Abstand zu messen) die Größenordnung 10^{-18} aufweisen muß.

Unter den verschiedenen Anwendungen, welche man von der Annahme der Existenz von Dipolmolekülen machen kann, sollen zwei etwas näher betrachtet werden.

Die Formel, mit welcher der Chemiker ein Molekül bezeichnet, soll gestatten, das chemische Verhalten aus ihr abzulesen. Sie kann das, wenn sie wirklich die gegenseitige Lagerung der Atome darstellt. Genügt sie aber dieser Forderung, dann muß man erwarten, daß auch die elektrischen Eigenschaften des Moleküls durch die Formel wiedergegeben werden. So wird man die Symmetrieeigenschaften der Formel in Verbindung bringen wollen mit der elektrischen Symmetrie des wirklichen Moleküls und erwarten, daß ein unsymmetrisches Molekül Dipolcharakter haben wird, während ein symmetrisch gebautes kein Dipolmoment aufweisen dürfte. ERRERA hat von diesem Gesichtspunkte aus einige Isomeren in flüssiger Form untersucht; besonders einfach aber liegen die Verhältnisse bei einer Reihe von Gasen und Dämpfen, die SÄNGER in letzter Zeit behandelt hat. Als Versuchsobjekte wählte er die Reihe CH_4 , CH_3Cl , CH_2Cl_2 , CHCl_3 , CCl_4 ; die Substanzen wurden, um jede Komplikation zu vermeiden, in Dampfform und bei konstant gehaltener Dichte untersucht. Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten zeigte sich bei den drei mittleren Molekülen, während sie bei den beiden äußersten fehlte. Das ist genau, was man auf Grund des bekannten Tetraedermodells für die Valenzen des Kohlenstoffatoms erwarten würde. Sind die 4 Atome, welche am C-Atom gebunden sind, alle vier gleich, dann ist kein Dipolmoment vorhanden. Sind aber 1 oder 2, oder 3 der

H-Atome durch ein Cl-Atom ersetzt, dann tritt sofort eine Dissymmetrie auf, welche dem Molekül ein Dipolmoment verleiht, das im Verhalten der Dielektrizitätskonstante zum Ausdruck kommt. Als zweite Anwendung sei die Erklärung der von DRUDE aufgefundenen anomalen Dispersien für elektrische Wellen besprochen. Die Verteilung der Dipolaxen im konstanten Felde stellt ein statistisches Gleichgewicht dar. Würde man nun das Feld plötzlich verschwinden lassen können, so würden trotzdem die Axen nicht momentan zu derjenigen Richtungsverteilung zurückkehren, die im Felde Null herrscht und bei welcher keine Richtung bevorzugt ist. Der Prozeß des Entstehens oder Vergehens der von der Feldstärke erzwungenen Einstellung wird zeitlich durch eine Relaxationszeit charakterisiert sein. Diese Relaxationszeit aber ist zu bestimmen mit Hilfe einer Gleichung, die eine Verallgemeinerung darstellt, der EINSTEINSchen Betrachtungen über die BROWNSche Bewegung, welche sich im vorliegenden Falle auf die Drehungen der Moleküle zu beziehen haben. Nehmen wir an, daß diese Relaxationszeit bestimmt ist, so wird das Medium auf Wellen, deren Schwingungszeit groß ist, gegen die Relaxationszeit so reagieren, daß diese sich mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen, die der statischen Dielektrizitätskonstanten entspricht. Ist dagegen die Schwingungszeit kurz verglichen mit der Relaxationszeit, so können die Moleküle sich nicht mehr einstellen und reagieren nur noch wegen ihrer Polarisierung, die der quasi elastischen Verschiebung der inneren Ladungen entspricht. Die Dielektrizitätskonstante hat dann um den Betrag des Orientierungseffektes abgenommen. Im Wasser entspricht das einem Abfalle von 80 auf 3. Die oben erwähnte Gleichung, welche diesen Abfall als Funktion der Frequenz beschreibt, zeigt, daß gleichzeitig eine Absorption auftreten muß, die in demjenigen Frequenzbereich ein Maximum hat, wo der Abfall der Dielektrizitätskonstanten stattfindet und links und rechts davon verschwindet. Beide Erscheinungen: anomale Dispersion und Absorption können also nur dann auftreten, wenn das Molekül Dipolcharakter hat. Diesem entspricht der experimentelle Befund.

Um zu entscheiden, ob die Größenordnung der Relaxationszeit der Frequenz entspricht, für welche praktisch anomale Dispersion und Absorption von DRUDE gefunden wurde, muß man sich eine Vorstellung bilden über die Größe des Momentes der Reibungskraft, das in einer Flüssigkeit auftreten würde an einem Molekül, welches gezwungen wird, mit gleichmäßiger Geschwindigkeit zu rotieren. Ebenso wie sich gezeigt hat, daß man für die Diffusion die richtige Größenordnung findet, wenn die Moleküle der diffundierenden Substanz hinsichtlich der bei gleichmäßiger Fortbewegung auftretenden Reibungskraft wie Kugeln endlicher Dimensionen im STOKESSchen Sinne behandelt werden, wird man es hier wagen, das Molekül mit einer gleichmäßig rotierenden Kugel zu vergleichen. In der Tat folgt auf diesem Wege die Größenordnung der Relaxationszeit zu 10^{-10} Sec., einer Wellenlänge von einigen cm entsprechend. Wenn es auch zu viel verlangt wäre, absolute Uebereinstimmung der Erfahrung zu fordern mit den Schlußfolgerungen, bei denen die benutzte Idealisierung des Moleküls in wesentlicher Weise eingeht, so darf man doch vermuten, daß der Ansatz weiter trägt als bis zur bloßen Abschätzung der Größenordnung. Die Theorie zeigt, daß die Erscheinungen wesentlich abhängen von dem Verhältnis gebildet aus dem Produkte Reibungskonstante mal Frequenz einerseits, und dem Produkte Boltzmannsche Konstante mal absoluter Temperatur andererseits. Diese Kombination wächst bei konstanter Temperatur mit steigender Frequenz. Glaubt man aber, daß die auftretende Reibungskonstante im Sinne von Stokes der gewöhnlichen Zähigkeit der Flüssigkeit proportional ist, so kann man jenes Verhältnis auch vergrößern, indem man bei konstanter Frequenz die Temperatur erniedrigt. Man sollte also erwarten, daß ähnliche charakteristische Kurven, wie sie für den Brechungsexponent und den Absorptionsindex erhalten werden, wenn man bei konstanter Temperatur die Frequenz erhöht, auch auftreten müssen, wenn man bei konstanter Frequenz die Temperatur erniedrigt. Dieses aber ist in der Tat der Fall; hübsche

Versuche von SAN-ICHIRO MIZUSHIMA haben neuerdings die Erwartung bestätigt. Die Dielektrizitätskonstante von Dipolsubstanzen zeigt mit abnehmender Temperatur den anomalen Abfall und gleichzeitig wächst die anomale Absorption zuerst an, erreicht ein Maximum und fällt dann wieder ab.

5. Die dielektrischen Versuche, von denen oben die Rede war, haben uns in der Ueberzeugung gestärkt, daß das elektrische Bild des Moleküls der Wirklichkeit entspricht. Versuchen wir jetzt, ob die Molekularkräfte, wie sie z. B. bei der Verflüssigung eines Gases sichtbar werden, in Zusammenhang mit jenem Bilde gebracht werden können.

Als VAN DER WAALS zeigte, daß eine Kontinuität zwischen dem gasförmigen und dem flüssigen Zustande existiert und er das charakteristische Verhalten in großen Zügen durch eine berühmte Zustandgleichung wiedergab, war er ausgegangen von zwei Grundannahmen. Die Moleküle sollen sich erstens in größerer Entfernung stets gegenseitig anziehen, zweitens sollen sie in kleinerem Abstände abstoßende Kräfte aufeinander ausüben, die sehr rasch mit abnehmender Entfernung zunehmen und durch die Einführung wirklicher Moleküldurchmesser approximiert werden können. Diesen zwei Grundannahmen entspricht die Einführung zweier individueller Konstanten der Anziehungskonstanten a und der Volumenkonstanten b . Die kritischen Konstanten (der kritische Druck, das kritische Volumen und die kritische Temperatur) sind nach van der Waals durch die beiden Molekularkonstanten a und b ausdrückbar. Es hat sich gezeigt, daß die van der Waalssche Formel nur eine erste grobe Näherung darstellt, wenn es sich um die quantitative Darstellung des wirklichen Verhaltens eines Gases handelt, während dagegen das qualitative Verhalten aller Gase in ausgezeichneter Weise wiedergegeben wird. Es ist demnach als sicher anzunehmen, daß die von van der Waals postulierte universelle Anziehung existiert und wir haben uns nicht nur zu fragen, ob eine solche Anziehung aus unserem elektrischen Bilde folgt, sondern außerdem zu untersuchen, ob die elektrischen Kräfte groß genug sind, um die tatsächliche molekulare Anziehung zu erklären.

Man denke sich zwei Moleküle von Dipolcharakter in einer gewissen Entfernung voneinander. Sie werden dann noch alle möglichen Orientierungen ihrer Dipolachsen haben können. Die Frage ist, ob unter diesen Umständen im Mittel eine resultierende Kraft von einem auf das andere Molekül ausgeübt wird, als Folge der elektrischen Felder, die von einem Ladungssystem ausstrahlend am anderen angreifen. Nach den Grundgesetzen der Elektrostatik folgt leicht, daß überhaupt keine resultierende Kraft vorhanden ist, falls alle Orientierungen der elektrischen Momente im Raum gleichberechtigt sind. Ebenso aber, wie ein Moment in einem äußeren elektrischen Felde eingestellt wird und dadurch die paraelektrische Erregung zustande kommt, ebenso wird jedes Molekül bestrebt sein, sich im Felde des anderen zu orientieren. Auch diese Orientierung ist indessen durch die Temperaturbewegung gestört. Sie wird also um so weniger ausgesprochen sein, je höher die Temperatur ist. Aber so lange sie vorhanden ist, werden nach dem Boltzmann-Maxwellschen Prinzip die Orientierungen geringerer potentieller Energie bevorzugt, ähnlich wie die Luftmoleküle die Nähe der Erdoberfläche bevorzugen und infolgedessen unsere Atmosphäre nach oben an Dichte abnimmt. Im ganzen folgt also unter Berücksichtigung dieses Umstandes eine gegenseitige Energie, die als Anziehung in die Erscheinung tritt.

Bei der Besprechung der dielektrischen Eigenschaften sahen wir, daß die Substanzen in zwei große Gruppen zerfallen. Bei der einen Gruppe ist die dielektrische Erregung temperaturempfindlich, bei der anderen nicht. Nur die Moleküle der erstgenannten Sorte sind Dipolträger, nur auf diese Moleküle ist also die vorige Ueberlegung anwendbar. Für Argonatome z. B., die kein elektrisches Moment besitzen und die sich doch auch nach van der Waals gegenseitig anziehen, würde man scheinbar die Ueberlegung nicht benutzen können.

Indessen, das Wesentliche der Betrachtung liegt nicht darin, daß wir von Dipolmolekülen

ausgegangen sind, auch wenn die elektrischen Systeme der Moleküle symmetrischer sind und erst mit Hilfe von Momenten höherer Ordnung charakterisiert werden können, besitzen sie gegenseitige potentielle Energie. Die Orientierungen kleinster Energie werden nach wie vor bevorzugt und eine gegenseitige Anziehung stellt sich ein.

Insbesondere KEESOM hat Rechnungen durchgeführt über diese «Anziehung durch Orientierung». Wie nicht anders zu erwarten, wird die so errechnete Molekularanziehung temperatur-empfindlich. Aber auch die Experimente fordern diese Abweichung vom ursprünglichen van der Waalsschen Ansatz. Die elektrischen Trägheitsmomente, welche z. B. bei denjenigen Molekülen, die keine Dipolträger sind, nötig wären, um die Formeln quantitativ den experimentellen Ergebnissen anzupassen, ergaben sich von der Größenordnung 10^{-26} . Diese Größenordnung ist wieder in Uebereinstimmung mit dem, was wir erwarten müssen. Ein solches Moment hat nämlich die Dimension Ladung mal Quadrat eines Abstandes und da die Elektronenladung die Größenordnung 10^{-10} und die Moleküldimensionen die Größenordnung 10^{-8} haben, folgt der zu erwartende Wert ebenfalls zu 10^{-26} .

Bei näherem Zusehen ergeben sich indessen verschiedene Einwände, die von wesentlicher Bedeutung scheinen. Die Ansätze, welche im Sinne des Boltzmann-Maxwellschen Prinzips den Keesomschen Rechnungen zu Grunde liegen, erfordern implicite die Existenz einer relativ beträchtlichen kinetischen Rotationsenergie der Einzelteilchen. Diese Energie müßte sich in der spezifischen Wärme bemerkbar machen und wir wissen, daß dieses, wenigstens bei den einatomigen Edelgasen, die doch auch die van der Waalssche Anziehung zeigen, nicht der Fall ist. Nur eine Abänderung des Rechnungsprinzips, die vielleicht allerdings nicht von vornherein als unberechtigt abgetan werden kann, würde den Widerspruch beheben können. Ueberdies aber haben die bisherigen Versuche des Leydener Laboratoriums zwar gezeigt, daß die «Konstante» a keine Konstante ist, es hat sich indessen in allen Fällen ergeben, daß die Molekularanziehung bei zunehmender Temperatur einem festen Grenzwerte zustrebt und nicht verschwindet. Dieser Forderung kann die «Anziehung durch Orientierung» nie genügen. Wenn die kinetische Energie der Rotation groß wird im Vergleich mit der potentiellen Energie der Orientierung, werden alle Achsenlagen gleichberechtigt und damit verschwindet, wie oben bemerkt, die Anziehung nach den Grundgesetzen der Elektrostatik.

Eine Revision der Voraussetzungen zeigt bald, daß diese nicht in jeder Hinsicht einwandfrei sind. Schon bei der Besprechung der dielektrischen Eigenschaften fanden wir es nötig, auf die alte Idee von MOSOTTI zurückzugreifen, daß das Molekül nicht ein starres Gebilde ist, sondern durch ein elektrisches Feld deformiert werden kann. Die Tatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit in einem Gase eine andere ist als im Vakuum, liefert den experimentellen Beweis für diese Deformierbarkeit und der Brechungsexponent ist ein Maß für die Beweglichkeit der Ladungen im Molekül. Wenn dem aber so ist, dann muß schon ohne Orientierung eine gegenseitige Anziehung der Moleküle, die «Anziehung durch Polarisierung» existieren. Jedes Molekül wird mit Hilfe seines Feldes ein benachbartes beeinflussen, ähnlich wie eine kleine leitende Kugel influenziert werden würde. Infolge dieser Influenz entsteht eine gegenseitige potentielle Energie, welcher nach den Grundgesetzen der Elektrostatik Kräfte entsprechen, die das influenzierte Teilchen nach solchen Stellen treiben, wo die Feldintensität am größten ist. Was hier geschieht, ist dasselbe wie das, was wir beim Grundversuch in der Elektrostatik beobachten, wo wir feststellen, daß ein beliebig geladener Körper alle anderen neutralen Körper ohne Ausnahme anzieht. Eingehendere Rechnungen haben gezeigt, daß die Größenordnung der Polarisationskräfte in der Tat ausreicht, um z. B. das quantitative Verhalten der Molekularanziehung bei den Edelgasen wiederzugeben. Es ist also schließlich kein Grund mehr vorhanden, an der Möglichkeit einer elektrischen Deutung der van der Waalsschen Attraktionskräfte zu

zweifeln. Diese Ueberzeugung ist inzwischen sogar so stark geworden, daß in neuester Zeit BORN und einige Mitarbeiter die Polarisationskräfte als wesentlich herangezogen haben, um sogar den inneren Aufbau von heteropolaren Molekülen wie HCl und H_2O zu erklären.

6. Ueberblicken wir die Gesamtheit des bisher vorgebrachten Materials, so werden wir durch die Tatsache getroffen, daß die Erfolge immer dort erreicht wurden, wo es sich um Erscheinungen handelt, die wesentlich durch den Feldverlauf im größeren Abstände vom Molekül bestimmt werden. In der BORNschen Theorie der heteropolaren Krystalle müssen die bei größerer Annäherung wesentlichen Abstoßungskräfte durch einen phänomenologischen Ansatz mittels eines Potenzgesetzes gefaßt werden. In der Gastheorie spricht man nach wie vor von einem Moleküldurchmesser, der die gegenseitige Annäherung beschränkt. Von einer einleuchtenden Erklärung dieser in kleinen Abständen allein maßgebenden Kräfte ist keine Rede. Man darf daraus wohl schließen, daß das Problem diese Wirkungen ebenfalls auf bekannte einfache Erscheinungen zurückzuführen, wenigstens zur Zeit besonders schwierig sein wird. Infolgedessen wird man darauf geführt, die Fragestellung zunächst in der einfachsten möglichen Form anzugreifen. Das geschieht, indem man nicht den Zusammenstoß zweier Moleküle oder Atome, sondern den Zusammenstoß eines Atoms mit einem Elektron untersucht. Da man in einem elektrischen Felde den Elektronen beliebige Geschwindigkeiten erteilen und sie überdies bequem nachweisen kann, hat man nebenbei noch den Vorteil, daß man die Zusammenstöße unter stark variierten Bedingungen experimentell verfolgen kann. Solche Versuche sind zuerst von LENARD ausgeführt worden. Zunächst hat er festgestellt, daß die Atome Elektronen großer Geschwindigkeiten ohne starke Rückwirkung durchlassen, womit die Grundlage geschaffen wurde für unser heutiges Atombild. Eine Störung der Elektronenbewegung von derjenigen Größenordnung, wie man sie nach dem Bilde der harten Kugeln erwarten würde, stellt sich erst ein bei relativ kleinen Geschwindigkeiten. Das interessante Gebiet der mittleren Geschwindigkeiten, welches besonders von FRANCK und HERTZ sowie einer großen Reihe von anderen Gelehrten untersucht wurde, und das sein eigenes Gepräge erhält durch die Quantensprünge, welche die Elektronen erzeugen können, liegt außerhalb des hier zulässigen Rahmens. Für uns ist an dieser Stelle wesentlich, daß auch im Bereiche kleiner Geschwindigkeiten, die keine dauernden Änderungen im Atom verursachen, sehr merkwürdige und unerwartete Erscheinungen existieren, die vor einigen Jahren von RAMSAUER experimentell nachgewiesen und seitdem mehrfach bestätigt wurden.

Als Beispiel sei das Verhalten von Argon etwas näher betrachtet. Elektronen, welche eine Potentialdifferenz von etwa 40 Volt durchlaufen haben, werden ähnlich zerstreut, wie das auf Grund des gewöhnlichen gaskinetischen Atomdurchmessers zu erwarten ist. Geht man nun zu kleineren Geschwindigkeiten über, so wird zunächst die Zerstreuung größer. Sie steigt indessen nicht dauernd, sondern erreicht bei 13 Volt einen Maximalwert, welcher roh einem 2,5fach vergrößerten Atomquerschnitt entspricht. Von da an wird nun merkwürdigerweise mit abnehmender Geschwindigkeit die Zerstreuung wieder geringer und entspricht z. B. bei einer Geschwindigkeit von 1 Volt nur mehr einem Querschnitt, welcher ungefähr gleich dem dritten Teile des gaskinetischen Querschnittes ist. Gewisse Versuche legen die Vermutung nahe, daß bei ganz kleinen Geschwindigkeiten wieder erneut ein Anwachsen der Zerstreuung einsetzen dürfte, so daß die Kurve eine vielleicht nicht nur äußerliche Ähnlichkeit aufweist mit einer Dispersionskurve in der Nähe einer Absorptionslinie.

Glaubt man, daß ein Atom, welches nach BOHR ein dynamisches System ist, nicht von einem elektrostatischen, sondern von einem elektrodynamischen Wechselfelde umgeben ist, so kann man verstehen, daß die ankommenden Elektronen deshalb eine Abstoßung erfahren werden, weil sie bei der Annäherung kinetische Energie von der Art einer Schwingungsenergie aufspeichern werden. Auch die Tatsache, daß bei Verkleinerung der Geschwindigkeit eine

Vergrößerung der Zerstreuung zustande kommt, folgt, wenn berücksichtigt wird, daß das Atom vom Elektron polarisiert werden muß und deshalb das Elektron anzieht. In diesen Gedankengängen bewegen sich einige Arbeiten von ZWICKY. Aber es scheint kaum wahrscheinlich, daß man mit Hilfe der klassischen Vorstellungen verstehen kann, daß bei noch kleinerer Geschwindigkeit die Ablenkungen wieder abnehmen. Es ist deshalb von HUND versucht worden, die Regeln der Quantentheorie so zu formulieren, daß die Beobachtungen mit ihnen, wenigstens qualitativ, im Einklange sind. Obwohl man offenbar von einer wirklich quantitativen und einleuchtenden Theorie noch sehr entfernt ist, scheint es doch sicher, daß nur eine Abänderung der Grundgesetze im Sinne der Quantentheorie zum Erfolg führen wird. Heute ist man wohl trotz einigen bemerkenswerten Ansätzen noch nicht im Besitze einer genügend umfassenden Formulierung der Quantengesetze um das Problem der Zusammenstöße mit Aussicht auf einen durchschlagenden Erfolg in Angriff nehmen zu können. Indessen schon die Erkenntnis allein, daß die Quantengesetze wesentlich sein werden für den weiteren Fortschritt auf diesem Gebiete ist nicht gering einzuschätzen. Die stetig fortschreitende Entwicklung auf dem Gebiete der Quantentheorie, welche neuerdings durch die Namen HEISENBERG, BORN, DE BROGLIE, SCHRÖDINGER gekennzeichnet ist, läßt hoffen, daß auch das hier zuletzt behandelte Problem in nicht zu ferner Zeit gelöst werden wird.

The Distortion of Single Crystals of Metals

By G. I. Taylor, Cambridge (England)

(See plate I for figures 1—3, 9—13)

Our knowledge of the distortion of metallic crystals began, I think, with the work of ROSENHAIN and EWING who showed that when certain metals are strained and the polished surface examined under a microscope a number of straight lines appear. These lines appear to consist of steps, and the authors came to the conclusion that they represent the traces of crystal planes on the surface of the metal and that they are due to slipping on those planes. Very little advance beyond this was possible however till the discovery of methods for finding, by means of X-rays, the orientation of crystal axes in grains of metal which have no crystal faces but are crystals as far as their internal structure is concerned.

Simultaneously with the development of systems of analysis by X rays there has been a great development during the last few years of methods for producing large metallic crystals. Methods of slow crystallisation from the molten state and of crystallisation on to a nucleus have been developed in Germany, America, Russia and other countries while methods of growing large crystals from small ones in the solid state have been developed chiefly in England. As a result of these researches we are now in a position to develop the theory of distortion of metals to an almost unlimited extent. For this reason it seems opportune at the present time to discuss the methods that may most usefully be employed in the solution of problems of this type. This is specially so because the problems are essentially mathematical in character and most of the workers in this field are experimental physicists.

The simplest elements of the problem are the following:—A piece of metal which consists of a single crystal throughout its volume is subjected to a given distortion. Its shape and size can be measured before and after distortion and the orientation of its crystal axes determined in each case. In some cases lines due to the distortion appear on the surface. It is required to find the relationship between the distortion, the crystal axes and these slip lines.

In all cases except, I believe, in the work of Miss ELAM and myself on aluminium crystals, the principle of the methods used has been to begin by finding a kind of test which gives uniform distortion and also one set of slip lines on the surface. In cases like that of tin, zinc and bismuth these conditions are satisfied by a simple tensile test of a uniform bar. It is then assumed that the meaning of the slip lines is known (in many cases it is indeed obvious), and that they are the traces of planes of slipping on the surface of the specimen. The next procedure is to determine the orientation of the crystal axes and to show that one of the crystal planes coincides with the plane containing the slip lines. If this is done before and after the stretching it can be proved in most cases that the crystal axes remain fixed relative to the plane containing the slip lines. Then from the external measurements of the specimen (i. e., in the case of a round bar the major and minor axes of the strained elliptic section, and the orientation of lines originally marked on the specimen in a plane perpendicular to the axis) one can show (a) that the plane containing the slip lines is undistorted by the strain and (b) that the motion of the axis of the specimen relative to the plane of particles referred to in (a) during the strain is such as can be accounted for by slipping in a certain direction on that plane. This direction is then shown to coincide with one of the crystal axes.

By these and methods which are essentially though not in detail the same, POLANYI and his fellow workers have obtained some very interesting results. They have shown that certain metals, notably tin, are distorted under pure tensile stress by slipping parallel to a crystal plane, in the direction of a crystal axis. These methods however depend on the assumption that the distortion is always due to slipping parallel to a crystal plane and that the slip lines

mark out that plane on the surface of the specimen. They depend in fact on knowing the form which the answer will take before starting to solve the problem, and the work consists in verifying the correctness of the original assumptions. There are however many cases to which these methods do not apply. In the case of aluminium for instance Miss ELAM and I have shown that under certain definable conditions the distortion is due to simultaneous slipping on two crystal planes and she has extended that result to the cases of silver, copper and gold. Again the case of iron has proved an insoluble problem to metallurgists who have arrived at an enormous number of mutually contradictory results because, as I shall show later, the lines of slip, though definitely related to the distortion, are related only indirectly to the crystal axes. Then again one may want to experiment with metals under conditions where slip lines are not observable as for instance when aluminium crystals are tested under compression between parallel steel plates, a type of experiment to which I shall refer later.

To-day I propose to describe the general method which I have developed for dealing with all problems of this kind. The advantage of this method lies in the fact that it gives all information which can possibly be obtained from external measurements of a specimen uniformly distorted, and that it makes no assumptions in regard to the nature of slip lines. The method consists in determining all the directions which remain unchanged in length during a uniform distortion. I will not go into the details of how this is done. It is quite simple in idea though sometimes laborious in practice. I will content myself with a general description of the method.

In order to get the greatest possible accuracy special precautions are necessary in the experiment to ensure uniformity in the distortion. I need hardly go into the details of the experimental methods, but in order to illustrate the degree of uniformity which can be obtained, photographs of a circular disc cut from an aluminium crystal before and after compression between parallel steel plates are shown in figs. 1 and 2. It will be seen that the squares ruled on the surface before compression become oblique parallelograms after compression. The uniformity of the distortion may be judged by the remarkable straightness of the ruled lines in the distorted specimen.

Fig. 3 is a photograph after distortion of a flat piece cut from an iron crystal and compressed between parallel plates. This piece was originally marked in squares with the same pattern as the aluminium specimen shown in fig. 1. It will be seen that the uniformity of distortion is remarkable.

From measurements of the shape and size of similar elements in the material before and after distortion it is a simple matter to obtain formulae connecting the positions, of a particle before and after straining. For this purpose rectangular coordinate axes are chosen in some convenient manner, thus in the case of compression specimens marked as shown in fig. 1, the axis of z may be taken perpendicular to the surface of the specimen. The axis of x may be parallel to one set of ruled scratches and the axis of y also in the surface of the specimen but perpendicular to the axis of x so that before distortion it is parallel to the second set of scratches. With this choice of axes the formulae connecting the coordinates (x_1, y_1, z_1) of the particle in the distorted material with (x_0, y_0, z_0) the coordinates of the same particle before distortion are:—

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha x_0 + l y_0 + \mu z_0 \\ y_1 &= m y_0 + v z_0 \\ z_1 &= \gamma z_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

In these formulae $\alpha, l, \mu, m, v, \gamma$ are found by simple formulae from measurements of the specimen. It is now a simple matter to calculate the equation to the conical surface on which all

unstretched directions lie. The condition that the distance of the particle x, y, z from the origin, is unchanged by distortion is

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad \dots (2)$$

Substituting for x_1, y_1, z_1 from (1) and (2) we get as the equation to the unstretched cone in its first position, i. e., its position before distortion

$$(\alpha^2 - 1)x^2 + (m^2 + l^2 - 1)y^2 + (\gamma^2 + \mu^2 + \nu^2 - 1)z^2 + 2xy(\alpha l) + 2xz(\alpha \mu) + 2yz(l\mu + m\nu) = 0$$

It will be seen that the unstretched cone is necessarily a cone of the second degree. In order to connect the position of this cone with that of the crystal axes (the orientation

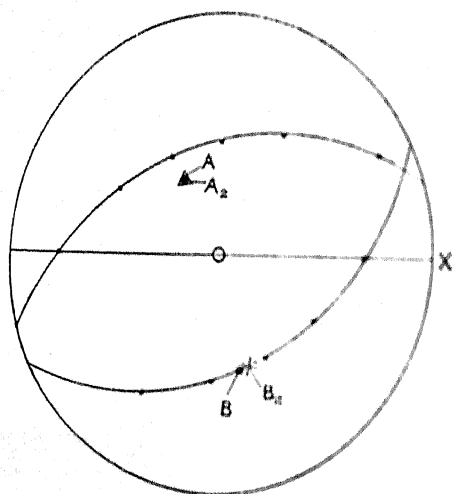


Fig. 4.

Stereographic diagram showing unstretched cone for Aluminium under compression.

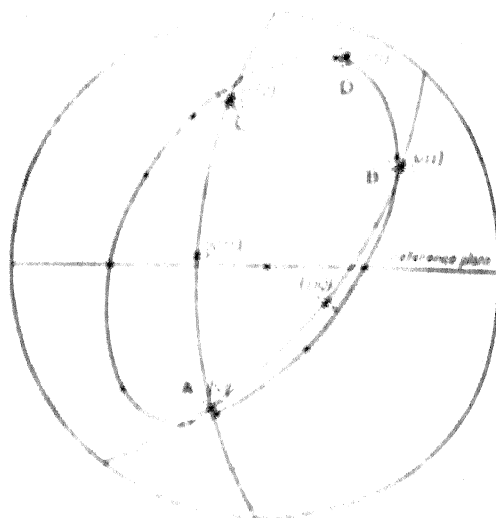


Fig. 5.

Stereographic diagram showing unstretched cone for Aluminium when slipping is on two planes.

of which was measured in our experiments by X rays), a stereographic diagram may be used. Fig. 4 is a diagram of this type. It shows the projection of the unstretched cone in the case of a compression experiment with a specimen cut from the same aluminium crystal as that shown in figs. 1 and 2. The calculated points are marked by round dots. This figure is characteristic of all such figures derived either from compression or extension experiments, except when the crystal axes happen to be in certain symmetrical positions with regard to the principle direction of stress.

On examining figures of this kind with a stereographic net it is found that the points of the unstretched cones lie almost exactly on two planes, shown in fig. 4 as two circular arcs. Simple considerations show that a uniform shearing or slipping of the material parallel to either of these planes and in a direction at right angles to their line of intersection would give rise to an unstretched cone of this kind.

At first sight it may seem a defect in the method that two alternative positions for the plane of slip are determined, but a moment's consideration will show that every conceivable method which attempts to find the plane of slip from external measurements of two states of the material only, must suffer from this disadvantage.

There are now three ways in which we can find out which of these two planes is the plane of slip.

(a) We can determine the crystal axes before and after straining and at the same time calculate the two corresponding positions of the unstretched cone. If it is found that

the crystal axes remain fixed relative to one of the planes and not relative to the other, the slip plane is clearly the one with respect to which they remain fixed. In addition to this the plane with respect to which the crystal axes remain fixed is usually, as in the case of aluminium, a crystal plane. In fig. 4 the pole of the slip plane is marked at A_2 , a (111) plane determined by X-rays at A the direction of slip at B_2 and the nearest (110) direction at B . It will be seen that this method of representation brings out very clearly the accuracy with which, in the case of aluminium under compression, the slip plane and direction of slip agree with a crystal plane and a crystal axis.

(b) We can examine the slip lines, if there are any. In many cases they are the traces of the slip plane and even if they are not marked clearly enough to permit of measurement they may indicate which of the two alternative planes to choose:

(c) We may carry out the distortion in two stages, so as to obtain measurements for 3 states of the material, (1) unstretched, (2) after first distortion, (3) after second distortion. We can then work out the second position A , of the unstretched cone for the transition from states (1) to (2), and the first position B , of the cone for the transition from states (2) to (3). Both these cones exist in the material in state (2). It is found that one of the planes in A coincides in position with one of the planes in B . This is the slip plane because it remains unstretched during both distortions. The other plane in A does not coincide with the corresponding plane in B , that is to say the second plane of particles which is unstretched by the first distortion does not remain unstretched in the second distortion. Hence from the external measurements alone we can determine which of the two parts of the unstretched cone is the slip plane.

Examples of the use of the method

Our first use of the method was to determine the plane and direction of slip for tension specimens of Aluminium. In this work we made no use of slip lines which in our experiments sometimes did not appear and were very indistinct when they did. The problem however may also be solved by the method first described in which the answer to the problem is first assumed and then proved to be correct. The result is similar to that of other workers with other materials, the distortion being entirely due, except in special cases, to slipping on one crystal plane in the direction of a crystal axis. Experiments with compression specimens give identical results.

Since most of us are familiar with this type of distortion I will pass on to the consideration of the cases in which the crystal axes have moved, as a result of distortion, into symmetrical positions with respect to the principal direction of stress. Here there is an *a priori* reason to suppose that the material might slip on two planes at once and an examination of the unstretched cones has enabled us to prove this to be the case.

The oval curve in fig. 5 is a stereographic projection of the unstretched cone for a small extension of a specimen when two possible slip planes were nearly symmetrically placed with respect to the axis. The two slip planes are shown as two arcs of circles AC and AB . The unstretched cone nearly passes, as it should if the hypothetical double slipping actually occurs, through the point of intersection of the two planes. From a consideration of the nature of the distortion due to slipping through two small, but not necessarily equal shears on the two planes AB and AC it can be proved that the unstretched cone must pass also through three other crystal axes, making 4 in all. These are marked in fig. 5 as A (101), B (011), C (110) and D (111). It will be seen that the cone passes very close to all these points. By choosing different ratios of the amount of slip on the two slip planes we can find a distortion of this type which will give rise to every possible second degree cone which passes through

the 4 points A, B, C, D . Hence we have a complete mathematical proof that the particular cone shown in fig. 5 can be due to simultaneous slipping on the two planes (111) and $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ in the directions (011) and (110) respectively.

A similar result has been obtained from compression tests but in that case the 4 crystal axes are not the same as those which apply to tension tests because the crystal axes during compression move till the axis of the specimen (normal to flat faces) gets into a (100) plane whereas in extension it moves to a (110) plane.

Distortion of Iron Crystals

The other application of the method to which I wish to direct your attention concerns iron crystals. The problem presented by the slip phenomena in iron crystals is one which has completely baffled everyone in spite of the immense amount of work which has been done on the subject. The slip bands in iron crystals are in most cases wildly irregular being curved, jagged and branched. On the other hand X ray analysis shows that the grains themselves have a very perfect crystal structure. The photograph fig. 3 shows that the distortion of such a crystal may be extremely uniform. We have experimented with tension specimens 1.5 mm. square in cross section and containing 4 cm. in the middle cut from a single crystal and we have used the compression method employing discs 6 or 7 mm. diameter and 1.4 mm. thick. The compression specimens are susceptible of greater accuracy of measurement than the tension specimens, but both give the same result

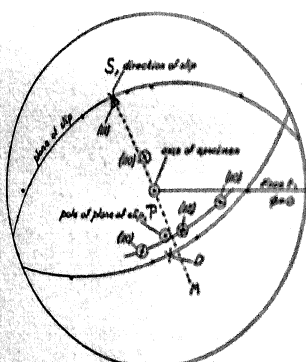


Fig. 6.
First position of an unstretched cone
for Iron crystal, stretched.

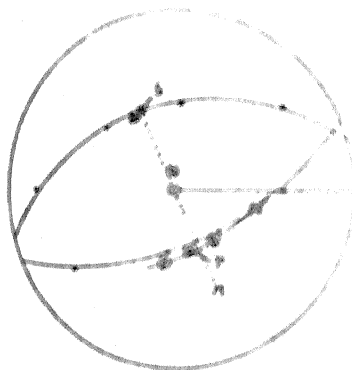


Fig. 7.
Second position of unstretched cone
for Iron crystal, stretched.

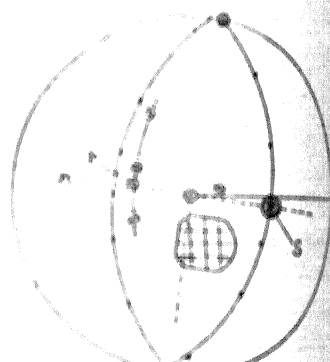


Fig. 8.
Second position of unstretched cone
for Iron crystal, compressed.

Fig. 6 shows the unextended cone for a tension specimen in the first position while fig. 7 shows the second, or distorted position of the same cone. Fig. 8 shows the second or distorted position of the cone for the compression specimen shown in fig. 3. It will be seen that in each case the points of the unextended cone lie almost exactly on the two planes represented by the two circular arcs in the projection. The distortion then is due to slip or shear parallel to one or other of these two planes.

In each of these cases and in seven others the crystal axes were determined by X-rays and their positions marked on the diagram. It was found that in every case one of the two possible directions of slip (S in fig. 6) coincided almost exactly with a (111) axis *) which is marked by a triangle in figs. 6 to 8. The other (D in fig. 6) had no connection with the crystal axes.

On examining figs. (6) and (7) it will be seen that during the distortion the crystal axes move relative to the reference axes so that they remain fixed relative to that one of the two possible slip planes which contains the (111) axis. These two facts taken together prove that this plane can be regarded as a plane of slip.

*) The term "axis" here used to indicate the normal to a crystal plane.

The direction of slip is therefore a crystal axis. To find how the plane of slip is related to the crystal axes the pole P of the plane of slip was marked on each diagram. It lies necessarily on or very close to the (111) plane because the direction of slip coincides with or is very close to the (111) axis. A portion of the (111) plane is drawn as an arc of a circle in each diagram figs. 6 to 8. This plane contains 3 (110) and 3 (112) axes. The positions of the two nearest (110) axes are marked by the symbol \odot while the position of the nearest (112) axis is shown as \otimes on the diagrams. It was found that P could occupy any position on the (111) plane. In different specimens with different orientations of the crystal axes in relation to the principal direction of stress, the position of P varied from coincidence with the (112) axis to 18° away from it. The point P was in fact always close to the direction of maximum slope in the slip plane and seemed therefore to be related chiefly to the direction of stress rather than to the orientation of the crystal axes.

The question now arises how it can happen that a material can slip parallel to a crystal axis, but on a plane which is related to the direction of stress rather than to the orientation of the crystal axes.

Two theories suggest themselves immediately (a) the material may slip simultaneously on two planes parallel to their line of intersection. It might for instance slip on two (110) planes or two (112) planes. (b) the particles of the material may stick together along the (111) directions and may not slip on crystal planes at all. The resulting distortion may be likened to that of a large bundle of rods which slide on one another. There is a strong inherent improbability that hypothesis (a) is true because the two slip planes would in general have different orientations to the principal direction of stress. Previous experience with metals of cubic symmetry has shown that under these conditions slip confines itself to that plane among crystallographically similar planes, for which the shear stress is the greatest so that if there is a tendency for the material to slip on crystal planes we should expect it to slip on one plane only. On the other hand it is not possible to distinguish between (a) and (b) from distortion and X-ray measurements alone. Both are capable of accounting fully for all the facts so far brought forward.

Observation of slip lines however furnishes us with the clue required. In our experiments it was found that the slip lines were much curved or jagged, but that when the distortion is *uniform* (i. e. when straight scratches on the surface of a specimen remain straight after distortion) they preserve a general direction which is constant all over a flat surface, and can be measured in most cases with a probable error of 3° . This direction was found to correspond with the trace of the slip plane found from distortion measurements. The error was never greater than 4° for the tension specimens and 3° for the compression specimens. These are both within the limits of our experimental error. The directions of the slip lines on the top face and on two flat faces ground on the curved edge of the compression disc shown in fig. (8) are shown in fig. 8 by means of the symbol \bullet . It will be seen that they are very close to the plane of slip. It appears therefore that the general direction of the slip lines marks out the trace of the plane of slip found in distortion measurements and has therefore no direct connection with the crystal axes.

These observations appear to offer conclusive evidence against hypothesis (a) because whenever we have observed slip lines on occasions when double slipping has been proved to occur, two sets have been visible crossing one another. In the case of our tests there was never more than one set in cases where distortion measurements showed a single direction of slip. Hypothesis (b) however offers a complete explanation of the slip lines. Fig. 9 shows a bundle of hexagonal rods standing vertically and photographed from above. Initially they were all

standing on a horizontal board and as they were all the same length the top surface was a horizontal plane and the traces of the faces of the rods could not be seen. In fig. 9 they have been given a shear by tilting the board on which they are standing. The general direction of the lines which appear are parallel to «crystal planes», i. e. parallel or perpendicular to the faces of the rods. The distortion represented by this however is an impossible one because if each rod is representing a molecular cell the slip of every rod on its neighbour represents a fraction of a molecular distance and the crystal lattice distances are changed, an effect which X-ray analysis proves to be unknown. Fig. 10 represents the same model distorted in the same way as the model shown in fig. 9, but the rods have been caused to stick together in such a way that they slip at least one «molecular distance» on their neighbours if they slip at all. The trace on the horizontal plane of the top of the rods of the slip plane which would be determined by external measurements is represented by the lines parallel to the bottom of the photograph, which will be seen at each side of the model. It will be seen that the «model slip lines» which appear are bent or jagged, and that the jagged elements of which they are composed are directly related to the crystal axes but that their general direction is parallel to the trace of the plane of slip determined by external measurements.

This conception of the nature of slip in iron crystals leads to a remarkable prediction, namely that if a face is cut and polished so that it contains the direction of slip, the slip lines, if they can be made visible, will all be straight, whereas they will be more and more jagged as the surface of the specimen is more and more inclined to the direction of slip.

The compression specimen shown in fig. 3 was first compressed by a small amount and the direction of slip calculated. Three flat faces were then cut parallel to the normal to the face. These can be seen in the photograph fig. 3 and their position relative to the slip direction is shown in fig. 8 where an outline drawing of the specimen is placed in position on the diagram.

A microphotograph of the slip lines on one of the faces cut parallel to the direction of slip is shown in fig. 11. It will be seen that the slip lines (horizontal in the figure, the diagonal marks are due to polishing) are remarkably straight. Fig. 12 shows a photograph of the slip lines taken on the face cut at the maximum possible angle (53°) with the direction of slip. It will be seen that they are jagged or curved but that they preserve a general direction which can be measured with a probable error of about 3° . Fig. 13 shows the slip lines on the top surface of the specimen which made an angle of 37° with the direction of slip.

It is remarkable that a conception based entirely on distortion and X-ray measurements should lead to a prediction about the character of slip lines which is capable of so striking a verification.

In conclusion I may say that I hope I have succeeded in making clear the advantages of using a general method in dealing with distortion of crystals instead of verifying particular hypotheses by special measurements.

References

- 1) The Distortion of an Aluminium Crystal during a Tensile Test. G. I. Taylor & C. F. Elam. Proc: Roy: Soc: A. Vol. 102, 1923, p. 643.
- 2) The Plastic Extension and Fracture of Aluminium Crystals. G. I. Taylor & C. F. Elam. Proc: Roy: Soc: A. Vol. 108, 1925, p. 28.
- 3) The Distortion of Crystals of Aluminium under Compression Part. 1. G. I. Taylor & W. S. Farren. Proc: Roy: Soc: Vol. 111, 1926, p. 529.
- 4) The Distortion of Iron Crystals. G. I. Taylor & C. F. Elam. Proc: Roy: Soc: A. Vol. 112, 1926, p. 337.

Some Mechanical Properties of Matter under High Pressure

By P. W. Bridgman, Cambridge U. S. A.

(For figures 8 and 9 see plate II.)

One does not ordinarily think of hydrostatic pressure as very important in affecting the properties of the solid and liquid bodies of our common experience. Thus it is only when special precision is sought that we specify that the measurements must be made under standard atmospheric pressure in, for example, defining the zero of the Centigrade scale, or in defining the calorie in terms of the thermal properties of water. The justification for customarily neglecting the effect of pressure is that the pressure range of ordinary experience is small. If, however, pressure is sufficiently increased, effects may be produced large enough to give useful information about the constitution of matter. For a good many years I have been experimenting with pressure high enough to produce such significant effects: pressure of the order of 10,000 to 20,000 kg/cm², and sometimes even considerably higher. The effect of such pressure on a large number of the physical properties of matter has been determined; in this lecture I propose to briefly summarize a few of these facts which are more distinctly mechanical in character.

Perhaps the simplest effect of hydrostatic pressure is to decrease volume. Ordinarily, changes of volume under pressure are not considered important—thus the error still persists in some books that water is incompressible. However, important changes of volume are produced by the pressures with which we are concerned, as may be realized from the fact that 12,000 kg/cm² will decrease the volume of many metals by an amount several fold greater than the volume contraction produced by cooling to 0° Abs. at atmospheric pressure.

It is perhaps worth while to mention in the first place a point on which there is sometimes considerable misapprehension; pressures of this order of magnitude never produce the slightest permanent change of volume, but volume changes under pressure are perfectly elastic. There is no reason to think that this is not also the case at pressures indefinitely higher than those yet reached; effects which at first seem to indicate a permanent change of volume can always be traced to flaws in the original material, or failure of the stress to be truly hydrostatic, so that plastic flow of the material results.

With respect to the effect of pressure on volume we may roughly divide matter into the two groups of solids and liquids, since under these high pressures there is no essential difference between a liquid and a gas. All the ordinary liquids, leaving out liquid metals, behave roughly alike at high pressure; the volume decrease under 12,000 kg/cm² varies from about 20 % for water to 30 % for ether, the most compressible organic liquid. The greatest volume decrease yet found in any substance is that of hydrogen and helium; the volume of these at 12,000 kg/cm² at ordinary temperature is less than one half the volume of the corresponding solids at atmospheric pressure at a temperature close to 0° Abs.

The compressibility of ordinary liquids is a very strong pressure function; typical organic liquids decrease in compressibility by a factor of about 15 from atmospheric pressure to 12,000 kg/cm²; for water, on the other hand, the corresponding decrease is by a factor of only 5. By far the largest part of the decrease of compressibility occurs in the first two or three thousand kg/cm². This we may take to indicate that initially the effect of pressure is mainly to squeeze out the empty spaces between the molecules. This effect is exhausted com-

paratively soon, thus accounting for the very rapid initial decrease of compressibility; after this effect is exhausted, further change of volume is provided by the actual change of volume of the molecules under pressure, and this effect is much smaller than the initial effect and persists with comparatively little change over a wide range. This change of volume of the molecules under pressure is not usually thought of as important, and is not suggested by experiments at low pressures. Thus practically all the equations of state that have been proposed for liquids on the basis of experiments to 2000 or 3000 kg/cm² do not take account of this phenomenon, so that these equations uniformly indicate too large a volume, that is, too low a compressibility, at high pressures.

Initially, different liquids show much greater individual differences than they do at high pressure. In fact, ordinary liquids approach so close to a common behavior at high pressures that it is possible to set up a sort of ideal liquid at high pressures, roughly typical of all liquids, in much the same way that we have an ideal gas at ordinary pressure.

The effect of pressure on the volume of solids (metallic elements) is markedly different from that on liquids. The volume changes are in general much less, being of the order of only a few per cent under 12,000 kg/cm². More important, the decrease of compressibility under pressure is much less than for liquids, so that the decrease of volume is much more nearly a linear function of pressure. This property is easy to connect with the difference of structure, for, of course, all these solid metals are crystalline and remain so at high pressure. This means that the atoms are always arranged on the same space lattice, so that the spaces between the corners of the atoms are never removed by pressure, and therefore the initial phase in the compressibility of liquids is absent. The compressibility is then from the first due only to a uniform distortion of the space lattice, and this in turn is doubtless connected with a distortion of the atoms themselves.

Although the compressibility of the average solid metal is much less than that of the average organic liquid, there are important exceptions. The alkali metals are by far the most compressible of the metals. In the series of the alkalis, compressibility rapidly increases with increasing atomic weight, until in caesium we have a metal whose volume decrease under 12,000 kg/cm² is as great as that of ether, one of the most compressible organic liquids. Initially the compressibility of caesium is much less than that of ether, but at 12,000 kg/cm² it is much higher, the average over the entire pressure range being about the same. This means that the compressibility of the atom of caesium is much higher than that of the molecule of ether. Among the alkali metals the most interesting is potassium. Under ordinary conditions its atomic volume is abnormally high, indicating a very open electronic structure of the atom. We would expect such a structure to have an abnormally high compressibility, and this in fact is the case. Under high pressure the abnormally high compressibility compared with the other alkali metals becomes very much accentuated, and all the evidence points to a great deformation of the potassium atom. In fact this deformation is so high as apparently to endanger the integrity of the atomic structure, for at the highest pressures there is a reversal in direction of some of the physical properties of such a character as to suggest the beginning of an atomic disintegration, such as we suppose we have in the stars, where the atoms are broken down into a gas of protons and electrons.

We have said that compressibility decreases with rising pressure. This is exactly what one could expect; it means that as the atoms or the parts of the atoms are pushed closer together the forces which resist further compression become greater. In fact this behavior seems so natural that it is sometimes assumed that compressibility must necessarily decrease when pressure increases, but that this is not necessary is shown by at least one exception.

The compressibility of amorphous quartz increases with rising pressure by a marked amount. This is a genuine effect; there is no hysteresis in the connection between volume and pressure, the effect is perfectly reversible, and the experiment may be repeated an indefinite number of times. One is at first inclined to see a connection between this and the amorphous condition, since quartz may also exist in the crystalline form with a smaller volume. But that the effect may be more intimately connected with the law of force between the molecules is suggested by the fact that crystalline quartz shows the same effect at high pressures along one of the directions in the crystal.

After compressibility, perhaps the most purely mechanical property of a liquid is its viscosity. I have measured the effect of pressure up to 12,000 kg/cm² on the viscosity of a large number of liquids, most of them organic, but including water and measurements not yet complete on mercury. In general, the effects of pressure on viscosity are higher than on any other physical property yet measured, and vary by a far greater amount with the character of the liquid. In every case except that of water, viscosity increases under pressure. Roughly, viscosity increases geometrically when pressure increases arithmetically, so that $\log(\text{viscosity})$ plotted against pressure is approximately linear. Fig. 1 shows a typical curve of

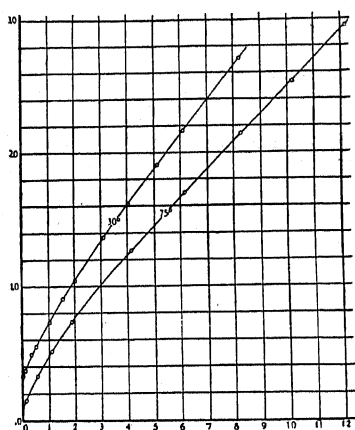


Fig. 1.

The common logarithms of the relative viscosity of methylcyclohexane at 30° and 75° C plotted as ordinates against pressure in thousands of kilograms per square cm.

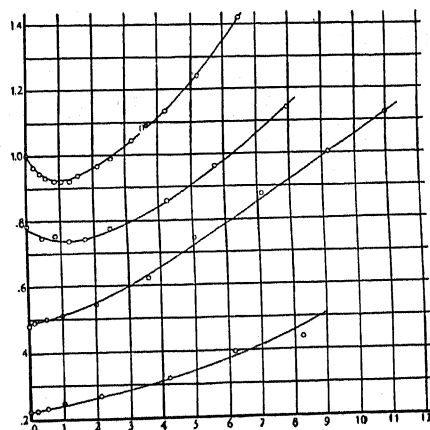


Fig. 2.

The relative viscosities of water at 0°, 10°, 30°, and 75° (reading downward) plotted as ordinates against pressure in thousands of kilograms per square cm.

this sort. At low pressures, however, there is usually a departure from this rule in that the initial increase of $\log(\text{viscosity})$ is less rapid than the increase of pressure, the graph being initially concave toward the pressure axis. There are also departures at high pressures from this rule; often $\log(\text{viscosity})$ of those liquids which show the highest pressure effects increases more rapidly than linearly with pressure. The increase of viscosity produced by 12,000 kg/cm² varies from something of the order of 20 % from mercury to more than 10⁷ fold for a complicated organic liquid. It seems then that some substances ordinarily liquid may be made to approach the behavior of a glass by high enough pressures. The change of viscosity under pressure is always perfectly continuous; there are no phenomena indicating freezing under pressure.

Water is an exception, as it is with respect to so many of its other properties. The results are shown in fig. 2. At low temperatures, the initial effect of increasing pressure is to decrease viscosity instead of to increase it. This abnormal decrease does not continue indefinitely, however, but presently the viscosity has a minimum and beyond this the normal

increase. As temperature increases, the initial abnormal negative pressure coefficient becomes smaller, until at 30° C. it reaches zero, and above this the sign changes to positive, as is normal. In general the effect of pressure on the viscosity of water is like that of the other properties, that is, initial abnormalities are wiped out at high pressures, and at pressures high enough water tends to become completely normal. The fact that under ordinary conditions the properties of water are abnormal, which is so essential to phenomena of life, we owe to the fact that atmospheric pressures are so extremely low.

The relations found between viscosity and pressure indicate that the mechanism of viscosity cannot be as simple as has been supposed in most of the theories hitherto proposed for the viscosity of liquids. There are not many such theories, but all are similar in supposing that the viscosity of a liquid is due to the same sort of momentum transfer that it is in a gas. It is a consequence of such a mechanism that viscosity must be a function of volume only, or at any rate must change only very slightly when volume changes. If, then, the temperature of a liquid is raised, and at the same time the pressure is increased so as to keep the volume constant, there should at most be a very small change of viscosity. That this is not the case is shown by fig. 3; viscosity decreases when temperature is increased at constant

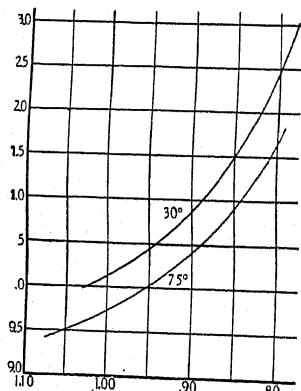


Fig. 3.

The common logarithms of the relative viscosity of i-amyl alcohol at 30° and 75° C plotted as ordinates against relative volume.

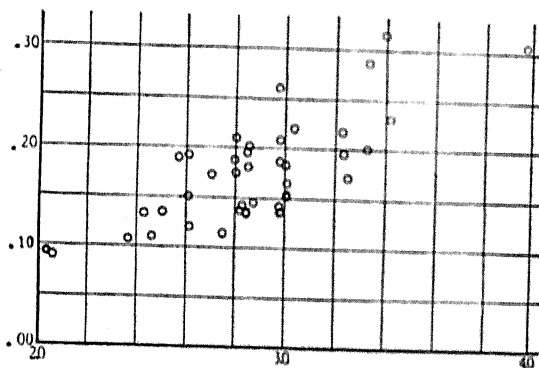


Fig. 4.

The common logarithm of the ratio of the viscosity at a pressure of 500 kg/cm^2 to that at atmospheric pressure at 30° for a large number of liquids plotted as ordinates against the common logarithm of the «complexity number». See the text for a definition of this number.

volume. In seeking for an alternative or supplementary explanation of the viscosity of liquids, the enormous variation of the pressure coefficient with the nature of the liquid seems significant. There is a rough parallelism between the magnitude of the coefficient and the complexity of the molecule. Thus the effect of $12,000 \text{ kg/cm}^2$ on the viscosity of mercury is 20%, on water perhaps twofold, on methyl alcohol four fold, up to 10^7 on the most complicated organic liquid. This is shown in fig. 4 in which the initial effect of a pressure of 500 kg/cm^2 is plotted against a number measuring roughly the complexity of the molecule. «Complexity of the molecule» is obviously a very rough concept. It may be thought to involve both the number of atoms in the molecule and the complexity of the individual atoms; we have arbitrarily chosen as a measure of complexity the product of the total number of electrons in all the atoms of the molecule by the number of atoms. The diagram now shows a very marked parallelism between the pressure coefficient of viscosity and molecular complexity. Such a thing of course is not suggested at all by any kinetic momentum transfer mechanism. The simplest interpretation seems to be that in a liquid there is some sort of interlocking mechanism which prevents the molecules freely sliding past each other. This view is consistent

with the fact that at constant volume viscosity decreases with rising temperature. Such an interlocking effect may perhaps be important in determining the properties of liquids as mechanical lubricants. In a liquid in which the interlocking is great we would expect that it would be comparatively easy to tear apart a film which has become very thin, as in the journal of a machine, and thus destroy the lubrication. Now it does seem to be an experimental fact that, other things being equal, a liquid is a better lubricant if it has a *small* pressure coefficient of viscosity, that is, a small interlocking effect.

The two effects hitherto described (compressibility and viscosity) are homogeneous effects, in that the substance is submitted to a stress the same in every direction, and unless we are dealing with a non-cubic crystal, the strain is homogeneous also. Besides simple effects of this kind, there are more complicated ones produced when part, not the entire, surface of a body is exposed to hydrostatic pressure, so that non-homogeneous conditions are produced. In this way, solids may be subjected to permanent deformations and eventually rupture. Results are to be obtained in this way which cannot be otherwise obtained, because the extreme uniformity of external conditions when stress is applied by a liquid makes it possible to reach higher stresses than can ordinarily be reached without rupture, and so to observe the deformation and rupture under extreme and instructive conditions. In my early pressure work I have observed many cases of this sort, and I have thought a description of them would be particularly appropriate to a Congress of Applied Mechanics.

We first discuss phenomena where there is no rupture, but only permanent deformation. The results here differ from those of ordinary experience chiefly with respect to stress-strain hysteresis, which presents many anomalies, such as abnormal directions and abnormally large values. Interesting results are found sometimes in minerals. A mineral need not be a homogeneous substance, so that even when the surface is exposed to a hydrostatic pressure all over so as to produce in the mineral a hydrostatic stress uniform from the macroscopic point of view, the strain on a microscopic scale may be non-homogeneous. Under these conditions there may be hysteresis between pressure and deformation. In fig. 5 is shown such a hysteresis

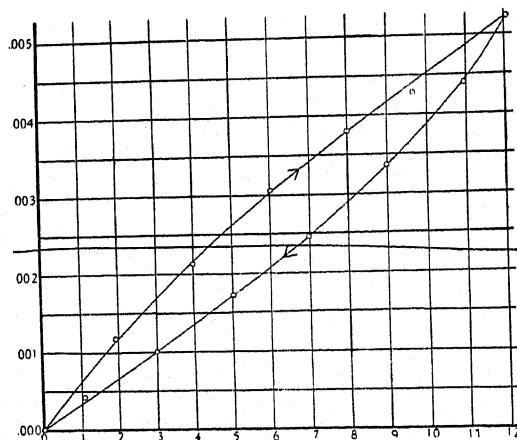


Fig. 5.

Hysteresis loop in pipe stone when subjected to hydrostatic pressure. The fractional decrease of length is plotted against pressure in thousands of kilograms per square cm.

loop for pipe-stone. The most surprising feature is the abnormal direction of the loop. Properly we do not have hysteresis here at all, for the deformation, instead of *lagging behind* the pressure, is in advance of it. Evidently a highly unusual type of mechanism must be

involved in such an effect as this, but there is nothing impossible in such a situation and mechanisms can be invented which show effects of just this kind.

Other unusual hysteresis effects are found when a hollow cylinder, closed on the ends, is exposed to hydrostatic pressure over the entire external surface so as to decrease the internal volume. The results of one such test are shown in fig. 6. Most of the features of this test are shown also by simple tension tests, such as the raising of the yield point by overstrain to the previous maximum stress, hardening by resting after overstrain, and hysteresis. But the particular character of the stress applied here, which does not tend to pull the metal apart and so ultimately produce rupture, but rather compacts the metal more closely as stress

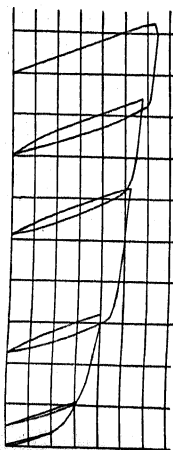


Fig. 6.

The relation between fractional decrease of internal volume (plotted as ordinates) of a hollow steel cylinder when subjected to cyclic applications of external pressure (plotted as abscissa, one division corresponding to 1000 kg/cm²).

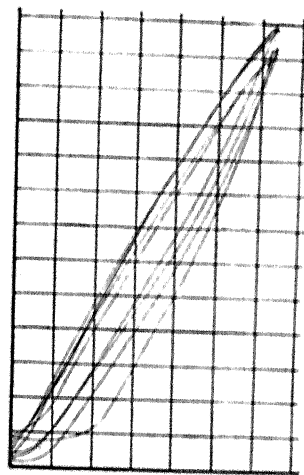


Fig. 7.

The same data as shown in Fig. 6 for another and thicker-walled cylinder. Notice that when the external pressure is at first increased the internal volume may increase also.

increases, permits reaching stresses after the initial yield point very much higher than is possible in other kinds of test, and so gives much exaggerated effects. Thus the yield point in collapsing tests of this sort may be raised by overstrain to ten times the initial value, and the width of the hysteresis loop may rise to one half that of the maximum deformation.

In addition to these effects, similar in character but different in magnitude from those of the usual tests, sometimes unique effects are obtained as shown in fig. 7. At one stage in the cycle of operations it was found that an increase of external pressure was followed by an increase of internal volume over a short range. Evidently the very great distortion of the metal far beyond the yield point has stored up in it a most complicated system of internal strains, which are responsible for this highly anomalous effect. Similar anomalous effects have been found also in thick cylinders stretched by internal pressure. In general, such effects are produced more readily in thick walled cylinders, in which there is a large mass of metal to store up a system of internal strains varying greatly from point to point. If the cylinder has thin walls, the internal strains are more nearly uniform from point to point, and such effects do not appear. The effects are also larger in a substance of complicated molecular structure, as for example such effects are larger in a high carbon tool steel than a steel of lower carbon content.

What now happens when the external pressure on such a hollow cylinder is increased indefinitely? Of course it is well known that a thin walled cylinder eventually becomes unstable, and folds into a star shaped figure. If however the walls are above a certain critical thickness,

instability does not occur, but instead the internal volume decreases regularly with increasing pressure until it vanishes and the hole is squeezed shut. The internal diameter is very nearly a *linear* function of pressure; the pressure at which the cavity is closed is a function only of the material of the cylinder, and is independent of the ratio of internal to external diameter. This pressure is about 10,000 kg/cm² for copper, and 20,000 kg/cm² for a mild steel. One important conclusion can be drawn from the linearity of the relation between internal diameter and pressure, namely that plastic flow of the metal is not determined by the maximum stress difference. It is easy to show that if the maximum stress difference is constant after flow begins, such a cylinder would support an indefinitely great pressure without completely closing, the internal diameter decreasing logarithmically as pressure increases. The fact that the cavity eventually closes shows that in the later stages of flow the maximum stress difference is less than in the initial stages; in other words we have here a weakening by excessive flow instead of a strengthening.

Suppose now we experiment with a brittle substance like glass, whose breaking stress in ordinary tensile tests is perhaps 500 kg/cm², instead of a metal, and subject a thick walled hollow cylinder of glass to hydrostatic pressure all over its external surface. Will the glass flow like the metal? Experiments show that nothing happens—pressures of 25,000 to 30,000 kg/cm² produce in the glass neither flow nor rupture, and such a cylinder recovers from the application of pressure unscathed. Now this failure to break is most instructive in what it tells us about conditions of rupture. At the internal surface of such a hollow cylinder, when exposed to 25,000 kg/cm² external pressure there is a maximum stress (compressive) of 25,000 kg/cm², a maximum stress difference of 25,000 kg/cm², a shearing *strain* corresponding to a stress difference of 25,000 kg/cm², and an elongation of the fibres in the radial direction equal to that produced by an ordinary tension of 12,500 kg/cm² (assuming Poissons ratio = $\frac{1}{4}$). This single example is sufficient to show, therefore, that rupture is not determined either by maximum stress, maximum stress difference (or strain), or maximum elongation, the three criteria which are most usually considered. Furthermore, these criteria fail to hold by enormous amounts. We notice, however, that the stresses in this case are never tensile in character, but are everywhere compressive, or at most zero. May it not be possible then that rupture occurs when the maximum tensile stress reaches a critical value? Imagine now a solid cylinder of glass, exposed to hydrostatic pressure over its curved external surface, but with no pressure on the ends, so that there is no stress across planes perpendicular to the axis. Experimentally we may realize such a stress distribution by leading a rod of glass into and out of a pressure chamber through two stuffing boxes. What now happens when pressure is increased indefinitely? The experiment is easily tried. The rod parts on some plane perpendicular to the axis in the region exposed to pressure, and the two pieces are expelled from the pressure chamber through the two stuffing boxes, exactly as if the rod were pulled lengthwise by a tensile force. This I call the «pinching off» effect. Here then we have rupture across planes on which there is approximately no stress (actually there is a slight *compressive* stress across this plane arising from the friction of the packing), so that it is perfectly evident that maximum tensile stress does not determine rupture. We would be inclined in this case to say that it is the maximum elongation which determines rupture, but the experiment above with the hollow cylinder disposes of this criterion. That maximum tensile stress is not intimately concerned in rupture we can show still further by experiments on hollow glass cylinders exposed to *internal* pressure. It is possible to raise the internal pressure on such a cylinder to a point where the maximum circumferential fibre stress is more than twice the fibre stress at rupture under ordinary tensile conditions.

These results just described with glass depend essentially on its amorphous character, and results entirely different in character may be obtained with a brittle crystalline material, such as quartz.

Thus a hollow cylinder of quartz, exposed to external pressure, is ruptured when pressure is pushed to high. In fig. 8 (Plate II) is shown one such cylinder ruptured by external pressure. Rupture takes the form of a microscopic disintegration of the inner surface. There are obviously interesting geological applications here.

Tests similar to those on glass may be made on metals capable of plastic deformation. Such metals show the pinching-off effect just like brittle materials. There is a difference of appearance in the ruptured surface, however, in that instead of a clean rupture on a single plane we get a drawing out and necking down, in appearance like an ordinary tensile specimen. This however is not an important difference, and the essential fact remains that we have rupture by simple parting of the fibres across planes on which there is no stress. The results of rupture tests on hollow cylinders subjected to internal pressure are, however, different for brittle and plastic materials. The rupture of a brittle material is sudden, and I have not been able to follow the details of it; there is every reason to think, however, that rupture begins at the internal surface where we would expect, where all stresses and strains have their maximum values. With plastic metals on the other hand, if the cylinder is sufficiently thick so that high pressures can be reached before rupture occurs, it will be found that the crack starts on the *outside* and travels inwards. In fig. 9 (Plate II) is shown a section of one such cylinder of steel which was burst by internal pressure. Besides the fact that rupture starts at the exterior surface, there are two important features to be emphasized. In the first place, the magnitude of the internal pressures which such a cylinder can support are much higher than ordinary considerations would lead one to expect; for example $40,000 \text{ kg/cm}^2$ was reached in the steel cylinder of fig. 9 although the normal tensile strength was only $10,000 \text{ kg/cm}^2$. In fact it is only this unexpected behavior which has made possible these high pressure experiments. In the second place, the very high deformations reached at the inner surface, where rupture does not occur, are significant. Circumferential elongations up to 300 % have been found, against 25 % in ordinary tensile tests. This very great elongation is accompanied by profuse slipping of the metal on itself at the inner surface, as careful examination of the diagrams will show. This slipping at the inner surface is, of course, a sort of rupture. The experiment shows that although rupture may *start* at the inside, the conditions are such that it can not propagate itself from the inside, and the ultimate destructive rupture has to start at the outer surface.

Finally, we describe another most amusing type of rupture. Around a cylindrical steel core place a closely fitting ring of hard rubber and subject the steel and rubber together to hydrostatic pressure over the entire external surface. When the pressure is raised high enough it will be found that the rubber ring is broken exactly as when a wedge is driven into the ring under ordinary conditions. In fact, reflection shows that the effect is much like driving in a wedge, because the volume compressibility of rubber is much higher than that of steel, so that under pressure the rubber is distorted by the steel core to a diameter greater than that of free rubber under the given pressure. But this explanation amounts to assuming that maximum shearing strain, or stress, determines rupture, and this we have seen is not true. Whatever the explanation, the fact is that here we have rupture in a substance whose every stress is compressive and every fibre is shortened.

These examples are sufficient to show that none of the usual criteria of rupture can apply, either to brittle or plastic materials. In comment on this situation, it seems that

at least one consideration not usually entertained is pertinent. It is evident that the hollow cylinder of glass under external pressure did not break for the reason that there was nowhere for the fragments to go if rupture did occur, because of the perfect symmetry, and similarly in the case of the metal cylinders under internal pressure, rupture did not occur at the inside because rupture could not propagate itself after starting. We must therefore add to our usual conditions geometrical considerations, such as those of the familiar problems of instability, which shall state that rupture can occur only if it is of such a nature as to *relieve* the applied stress and bring about a decrease of potential energy of the whole system. In these geometrical considerations symmetry relations must be involved, so that the conditions of rupture will in general be different for crystalline and amorphous substances.

But a much more serious consideration is whether properly speaking there is any such thing as a criterion of rupture. I believe we have no right to expect any general criterion in view of the extremely varied structure of different sorts of matter. It is sufficient in dealing with many phenomena to think of the molecules which compose matter as being to a certain degree like small rigid bodies, in which are located, according to more or less complicated patterns, centers of electrical and magnetic forces which hold the substance together and give it its properties. When such a substance is subjected to stress, the molecules must readjust themselves to each others irregularities in the most complicated ways, and according as one or another pair of the local centers of force are separated by more than the critical amount, we may have rupture under the most varied conditions.

The theoretical considerations, as well as the experimental facts summarized above, indicate therefore that we should attempt to establish general criteria of rupture only as a matter of practical convenience, as for engineering purposes, and that we should expect any such criteria to be valid only in a narrow range of conditions, both of stress and material.

LIBRARY
CARNEGIE INSTITUTION OF
TECHNOLOGY
PITTSBURGH, PENNSYLVANIA

Ueber die ausgebildete Turbulenz

L. Prandtl, Göttingen
(Hiezu Tafel III)

M. H. Was ich Ihnen hier über die Gesetzmäßigkeiten der ausgebildeten turbulenten Flüssigkeitsströmung vortragen will, ist, wie ich gleich sagen möchte, noch weit davon entfernt, etwas Abgeschlossenes darzustellen, es handelt sich vielmehr um die ersten Schritte auf einem neuen Wege, denen, wie ich hoffe, noch mancherlei weitere Schritte folgen werden.

Die Untersuchungen zur Frage der Turbulenz, die wir seit etwa 5 Jahren in Göttingen treiben, haben die Hoffnung auf ein tieferes Verständnis der inneren Vorgänge der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen leider sehr klein werden lassen; unsere photographischen und kinematographischen Aufnahmen zeigten uns nur, wie hoffnungslos verwickelt diese Bewegungen selbst im Falle kleinerer Reynoldsscher Zahlen sind. Abb. 1—4, Tafel III ¹⁾, zeigt Ihnen Aufnahmen einer Wasserströmung in einem sehr langen, tiefen, rechteckigen Gerinne, von oben mit einer auf einem Wagen mitfahrenden Kammer photographiert. Je nach der Wagengeschwindigkeit ergibt sich ein sehr verschiedenes Bild, aber alle Bilder sind unangenehm verwickelt. Kinematographische Aufnahmen derselben Bewegungen werde ich am Schluß des Vortrags zeigen. Derartige Aufnahmen sind bis jetzt nur zu statistischen Ermittlungen über die Verteilung des zeitlichen Mittelwertes der Geschwindigkeit und über die Größe der vorkommenden Geschwindigkeitsschwankungen benützt worden, sonst haben wir aus ihnen noch nicht viel lernen können. Das, was ich das «große Problem der ausgebildeten Turbulenz» nennen möchte, ein inneres Verstehen und eine quantitative Berechnung der Vorgänge, durch die aus den vorhandenen Wirbeln trotz ihrer Abdämpfung durch Reibung immer wieder neue entstehen, und eine Ermittlung derjenigen Durchmischungsstärke, die sich in jedem Einzelfall durch den Wettstreit von Neuentstehung und Abdämpfung einstellt ²⁾, wird daher wohl noch nicht so bald gelöst werden.

Es ist aber auch, wenn man auf ein tieferes Verständnis des Mechanismus der Turbulenz verzichtet, immer noch möglich, auf einem durch Versuche kontrollierten «phänomenologischen» Wege verschiedene Gesetzmäßigkeiten, besonders über die in einer vorgelegten turbulenten Strömung eintretende mittlere Bewegung, theoretisch zu verfolgen; gerade die Angabe der mittleren Geschwindigkeit als Funktion des Ortes ist ja eine technisch besonders wichtige Aufgabe. Der erste Schritt dazu kann so charakterisiert werden, daß die durch die Mischbewegungen hervorgerufenen scheinbaren Reibungskräfte in einer solchen Form dargestellt werden, daß sie in die hydrodynamischen Differentialgleichungen eingesetzt werden können und so Differentialgleichungen für die mittlere Bewegung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen liefern.

Diese Aufgabe hatte sich bereits BOUSSINESQ gestellt, auf ihn geht die heute vielfach verwendete Formulierung zurück, bei der eine mit der Zähigkeit μ parallel stehende «Austauschgröße» A ³⁾ eingeführt wird, wobei dann zu den von der Zähigkeit herrührenden Schubspannungen

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \text{ u. s. w.}$$

¹⁾ Entnommen aus der Dissertation von J. NIKURADSE, Forschungsarbeiten des V. D. J., Heft 281.

²⁾ Die rationelle Berechnung des Geschwindigkeitsabfalls in der Nähe einer glatten Wand und die Ermittlung der Größe der Wandreibung rechne ich mit zu diesen Aufgaben.

³⁾ Diese Bezeichnung habe ich der sehr lesenswerten und lehrreichen Schrift «Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen» von Prof. Dr. Wilh. Schmidt, Wien (Heft VII der Probleme der kosmischen Physik, Hamburg 1925) entnommen. Boussinesq und nach ihm andere Hydrauliker haben diese Größe mit ϵ bezeichnet.

die scheinbaren Schubspannungen

$$\tau' = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{u. s. w.} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

hinzutreten (\bar{u} = zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeitskomponente u). Diese Formulierung hat aber den Nachteil, daß der Austausch selbst wieder von der Größe der Geschwindigkeit abhängt, die doch erst gesucht werden soll.

Nach zahlreichen vergeblichen Versuchen ist es mir nun in letzter Zeit gelungen, für die scheinbare Reibung einen Ausdruck zu gewinnen, der, obschon auch nur eine grobe Näherung, doch die wesentlichen Eigenschaften der Strömungen in schwachreibenden Flüssigkeiten recht gut wiedergibt und dabei von dem oben erwähnten Mangel frei ist. Um den Impulsaustausch, der die scheinbare Reibung hervorbringt, zu formulieren, pflegt man nach dem Vorgang von O. REYNOLDS⁴⁾ die augenblickliche Geschwindigkeit in zwei Teile zu zerlegen, den zeitlichen Mittelwert und die Schwankung um diesen:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w'. \end{aligned}$$

Die Schwankungen verursachen dann im Mittel einen scheinbaren Spannungszustand, dessen Komponenten durch die Impulskomponenten

$$\overline{\rho u'^2}, \quad \overline{\rho u' v'} \quad \text{u. s. w.}$$

(ρ = Dichte, Ueberstreichen als Zeichen der Mittelbildung) gebildet werden. Diese Ausdrücke sind sehr bekannt, es handelt sich nun aber darum, für sie eine Form zu gewinnen, in der die mittlere Strömung («Grundströmung») $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ auftritt.

Hierbei ist nun die Einführung einer für den Turbulenzzustand charakteristischen Länge wesentlich, die hier eine ähnliche Rolle spielt, wie die freie Weglänge in der kinetischen Gas-theorie. Man kann sie als Durchmesser der jeweils gemeinsam bewegten Flüssigkeitsmassen deuten, aber auch als den Weg, den eine solche Flüssigkeitsmasse zurücklegt, bevor sie durch Vermischung mit Nachbarmassen ihre Individualität wieder aufgibt. Man findet unschwer, daß diese beiden Strecken, wenn die Reynoldssche Zahl⁵⁾ hinreichend groß ist, sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden (Widerstandsarbeit beim Vordringen in fremde Flüssigkeitsmassen = kinetische Energie der Masse). Wir wollen diese Länge, der zweiten Bedeutung folgend, *Mischungsweg* nennen und mit l bezeichnen. Nimmt man an, daß eine solche mit Eigenbewegung begabte Flüssigkeitsmasse, die sich in einer Strömung mit Geschwindigkeitsgefälle quer zur Strömungsrichtung befindet, eine Geschwindigkeit gleich der mittleren Geschwindigkeit derjenigen Stelle besitzt, aus der sie stammt, und daß sie sich um den Mischungsweg l quer zur Strömungsrichtung verschiebt, so wird sich ihre Geschwindigkeit von der an dem neuen Orte vorhandenen mittleren Geschwindigkeit unterscheiden und zwar ist dieser Unterschied, wenn die mittlere Strömungsrichtung zur X-Achse gewählt wird, in erster Näherung $= l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Man kann deshalb die durchschnittliche Schwankung u' proportional $l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

⁴⁾ O. REYNOLDS, Phil. Trans. Roy. Soc. T. 186 A, S. 123 = Scientif. Papers, Bd. 1, S. 535 vergl. auch H. A. LORENTZ, Abhandl. über theoretische Physik, Bd. 1, Leipzig 1907, S. 43.

⁵⁾ Und zwar die aus Durchmesser der Flüssigkeitsmasse und Relativgeschwindigkeit gebildete Reynoldssche Zahl.

setzen. Die Querbewegung v' kann man sich in der Weise entstanden denken, daß zwei Flüssigkeitsmassen mit verschiedenem u' , die sich vor einander befinden, zusammenprallen, oder sich voneinander entfernen. Die auf diese Weise entstehenden Geschwindigkeiten v' können daher proportional u' gesetzt werden. Die scheinbare Schubspannung $\tau' = \rho \overline{u'v'}$ wird also, wenn man die Proportionalitätsfaktoren von u' und v' und auch den Korrelationsfaktor, der bei der Bildung des Produktmittels hinzutreten würde, unterdrückt, indem man sie sämtlich auf das ohnehin noch unbekannte l wirft,

$$\tau' = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2.$$

Berücksichtigt man noch das Vorzeichen, das mit dem von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ wechseln muß, so wird richtiger geschrieben:

$$\tau' = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \dots \quad (2)$$

Der Vergleich mit der BOUSSINESQ'schen Form zeigt, daß Uebereinstimmung hergestellt wird, wenn man den Austausch

$$A = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad \dots \quad (3)$$

schreibt. Diese einfache Formel hat sich für den bei der Ableitung zugrundegelegten Fall, daß es sich um eine Strömung mit Geschwindigkeitsgefälle quer zur Strömungsrichtung handelt, trotz ihrer offenbaren Unvollkommenheiten recht gut bewährt. Vor allem liefert sie in Uebereinstimmung mit den hydraulischen Erfahrungen Widerstände proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, wie man aus ihrem Bau leicht erkennt. Man muß sich aber bei den Resultaten, die mit diesem Ansatz gewonnen werden, vor Augen halten, daß es sich um eine erste grobe

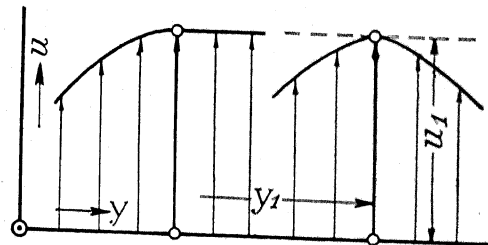


Abb. 5.

Näherung handelt. Die Lösungen von Strömungsaufgaben mit diesem Reibungsglied haben, wenn man das gewöhnliche Zähigkeitsglied als numerisch klein unterdrückt, etwas ungewöhnliche Eigenschaften. Statt eines asymptotischen Uebergangs zu konstanter Geschwindigkeit erhält man irgendwo im Endlichen eine Stelle, wo die endlich stark gekrümmte Kurve tangentiell an eine wagerechte Gerade anschließt; Geschwindigkeitsmaxima haben immer eine solche Form, daß dort der Krümmungsradius auf Null herabgeht. Es ist in der Nähe des Maximums $\bar{u}_{max} - \bar{u} \propto |y - y_1|^{3/2}$, vgl. Abb. 5. Dieses Verhalten hängt mit dem Umstande zusammen, daß für $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$ der Austausch nach unserer Formel zu Null wird. In Wirklichkeit trifft dies nicht genau zu, vielmehr hört durch die Unruhe der Nachbargebiete der Austausch an der

Maximumsstelle nicht völlig auf. Nimmt man zur Verfeinerung der Theorie eine Ausbreitung der Austauschgröße durch den Austausch selbst an, so ergibt sich an den Stellen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$ noch ein von Null verschiedener Austausch⁶⁾ und man bekommt nun wieder richtige Asymptoten, und Maxima mit endlicher Krümmung. Indes zeigen die Versuche, daß die Krümmung der Geschwindigkeitsprofile an der Stelle des Maximums häufig auffällig stark ist, woraus zu schließen ist, daß dort der Austausch, wenn auch nicht Null, so doch beträchtlich kleiner ist als in der Nachbarschaft, so daß der einfachen Formel (2) eine gewisse innere Berechtigung nicht abgesprochen werden kann.

Wir haben bisher nur die Spannungskomponente betrachtet, die in hydraulischen Aufgaben gewöhnlich die Hauptrolle spielt. Es ist aber nicht schwer, für vorkommende Fälle auch einen mit den Symmetrieeigenschaften verträglichen Ausdruck anzugeben, der einen vollen

Spannungstensor liefert. Man kann dazu z. B. den Faktor $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$ in Formel (2) durch das maxi-

male Geschwindigkeitsgefälle quer zur Stromlinie ersetzen, und den zweiten Faktor $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ durch den Tensor $\nabla \bar{u} + \bar{u} \nabla$ ⁷⁾; gewisse Versuche, auf die ich noch zu sprechen komme, deuten jedoch darauf hin, daß die Sache nicht immer ganz so einfach ist; der Austausch selbst muß vielmehr auch als ein Tensor angesehen werden, so daß in der Verallgemeinerung von Formel (2), sobald man über das ebene Problem hinausgeht, das Produkt zweier Tensoren auftritt. Eine nähere Verfolgung dieser Angelegenheit mag hier unterbleiben.

Der «Mischungsweg» l verlangt noch eine besondere Untersuchung. Er wird im allgemeinen als eine Funktion des Ortes angesehen werden können, von der zunächst festzustellen ist, daß sie bei Annäherung an Wände zu Null werden muß, weil hier die Querbewegungen behindert sind. Die Beobachtungen in Rohren mit glatten Wänden weisen allerdings darauf hin, daß die Zähigkeit nicht ganz ohne Einfluß ist. Im Bereich der Blasius'schen Widerstandsformel muß l proportional mit $y^{6/7} \cdot \left(\frac{\nu}{\tau_{\text{Wand}} \rho} \right)^{1/7}$ gesetzt werden, damit sich bei Anwendung von Gleichung (2) die richtige Abhängigkeit des Widerstands von der Reynoldsschen Zahl und gleichzeitig die Proportionalität der Geschwindigkeit mit der 7. Wurzel des Wandabstandes y ergibt⁸⁾.

Einfacher scheinen die Verhältnisse bei solchen turbulenten Bewegungen zu sein, bei denen keine Wände mitwirken, wie z. B. bei der Vermischung von Flüssigkeitsstrahlen mit der umgebenden ruhenden Flüssigkeit und bei der Abbremsung der Nachlaufströmung hinter einem bewegten Objekt. In diesen Fällen der «freien Turbulenz» kann, wenigstens für genügend große Reynoldssche Zahlen, angenommen werden, daß in vergleichbaren Fällen immer die Vorgänge in einem quer zur Längserstreckung gezogenen Querschnitt geometrisch und mechanisch ähnlich verlaufen. Dazu gehört, daß die Mischungswege bei wachsender Breite des Strahles oder des Nachlaufstromes immer proportional mit der Breite des Stromes bleiben, wodurch dann vermöge der Formel (2) zugrunde liegenden Ueberlegung auch die Quergeschwindigkeiten proportional der mittleren Relativgeschwindigkeit \bar{u} gegen die ungestörte Flüssigkeit

⁶⁾ Vergl. Z. f. angew. Math. u. Mech. 1925, S. 138.

⁷⁾ $\nabla \bar{u} =$ Deformationsaffinor, $\bar{u} \nabla$ konjugierter Affinor. Dieses Verfahren ist vor allem dann berechtigt, wenn eine Scherungskomponente weit über die anderen Deformationskomponenten überwiegt.

⁸⁾ Vgl. etwa V. KÁRMÁN, Z. f. angew. Math. u. Mechanik 1921, S. 233 oder «Hydraulische Probleme», Berlin 1926, S. 3—5 (Prandtl).

werden⁹⁾. Diese an sich plausible Annahme über l läßt sich übrigens, wenn man will, auch als eine Folgerung davon herleiten, daß die Abbremsung der mittleren Bewegung \bar{u} durch die in Formel (2) gegebenen Schubspannungen erfolgt, und daß andererseits das zeitliche Anwachsen der Breite eines Abschnitts des turbulenten Strahls usw. proportional der Geschwindigkeit der Querbewegungen vor sich geht; die verschiedenen Betrachtungsweisen sind also in bestem Einklang miteinander.

Unter Hinzunahme des Impulssatzes für die Hauptbewegung läßt sich dann leicht die Beziehung für das Anwachsen der Breite und für die Abnahme der Geschwindigkeit mit wachsender Entfernung vom Ort der Störung für zahlreiche Einzelfälle voraussagen. Bei der Ausbreitung von Strahlen ergibt sich bereits ohne Impulssatz ein Anwachsen der Breite proportional mit der Entfernung vom Loch und damit wegen des Impulssatzes eine Geschwindigkeitsabnahme umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung beim Strahl vom Kreisquerschnitt, bzw. umgekehrt proportional der Wurzel aus der Entfernung bei dem aus einem langen Spalt kommenden Strahl.

Bei der Nachlaufströmung hinter einem quer zur Strömungsrichtung stehenden Stab bzw. einem Rotationskörper wächst die Breite proportional der Quadratwurzel bzw. Kubikwurzel aus dem Abstand, die Geschwindigkeit nimmt umgekehrt proportional der Quadratwurzel bzw. $2/3$ ten Potenz des Abstandes ab. Bei allen diesen Regeln ist übrigens vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten, bzw. die Abweichungen der Geschwindigkeit von der der ungestörten Strömung bereits klein gegen die der Störungsstelle geworden sind.

Als Beispiel mag die Ausbreitung eines Strahles mit Kreisquerschnitt und die Nachlaufströmung hinter einem Rotationskörper behandelt werden. b sei die Breite des Strahls bzw. Nachlaufstromes; es sei $l = \alpha b$, so daß die Quergeschwindigkeit $v' = l \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{l u}{b} \sim \alpha u$ wird. Aus der Aussage^{9a)}

$$\frac{Db}{dt} \sim v' \quad \dots \dots \dots (a)$$

wird beim Strahl abschätzend

$$u \frac{db}{dx} \sim \alpha \bar{u}$$

also

$$b \sim \alpha x$$

Der in allen Querschnitten konstante Impuls wird $J \sim \rho u^2 b^2$; hieraus $u = \frac{\text{const}}{x}$. Beim Nachlauf ist $\frac{Db}{dt} \approx U \frac{db}{dx}$, wo U die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung ist, also wird aus (a)

$$U \frac{db}{dx} \sim \alpha u \quad \dots \dots \dots (b)$$

Der Impuls ist $J \sim \rho U u b^2$; ihm gleich ist der Widerstand $W = c_w \frac{\rho U^2}{2} F$ (F = Querschnitt des Körpers, c_w Widerstandsziffer). $J = W$ liefert

$$u \sim \frac{c_w U F}{2 b^2} \quad \dots \dots \dots (c)$$

⁹⁾ Aus $v' \sim l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ ergibt sich für einen mittleren Wert von v' Proportionalität mit $\frac{l \bar{u}}{b}$ (b = Breite, \bar{u} = Durchschnittswert der Relativgeschwindigkeit).

^{9a)} $\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$.

In (b) eingesetzt, wird

$$b^2 \frac{db}{dx} \sim c_w F, \text{ also}$$

$$b \sim \sqrt[3]{c_w F x}$$

und

$$u \sim U \sqrt[3]{\frac{c_w F}{x^2}}$$

Die experimentelle Prüfung der in dieser Weise gewonnenen Regeln ist, soweit es sich um die Strahlausbreitung handelt, bereits erbracht worden; bei den Nachlaufströmungen zeigen die bisher gemachten Vorversuche gewisse Abweichungen, die möglicherweise mit zu kleiner Reynoldsscher Zahl zusammenhängen. Die endgültige Entscheidung steht hier noch aus.

Nimmt man wie erwähnt, den Mischungsweg l in Formel (2) proportional der nach den eben erwähnten Regeln bestimmten Strahlbreite, und nimmt im übrigen an, daß er in ein und demselben Abstand von der Störungsstelle über die ganze Breite konstant ist, so sind genügend Angaben vorhanden, um die durch das Reibungsglied von Formel (2) ergänzten hydrodynamischen Differentialgleichungen in derselben Weise zu lösen, wie das bei den «Grenzschichtrechnungen» üblich ist (die Druckunterschiede quer zur Strömungsrichtung werden vernach-

lässigt, ebenso die Wirkungen anderer Deformationsglieder als $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$). Auf dieser Grundlage hat mein Mitarbeiter Dr. TOLLMIEH verschiedene Rechnungen durchgeführt, die demnächst in der «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik» erscheinen werden ^{9b)}. Die folgenden Bilder geben einige Resultate wieder. Dabei ist zunächst eine besondere, bisher hier noch nicht erwähnte Strömungsform, nämlich die Vermischung eines breiten gleichförmigen Luftstromes, der aus einer Oeffnung kommt, mit der angrenzenden Luft, behandelt, vgl. Abb. 6. Die Rechnung für diesen Fall mag als Beispiel etwas näher ausgeführt werden. Auch hier ist die Breite b der Vermischungszone und daher auch l proportional x zu setzen wie bei den anderen Strahlausbreitungsaufgaben (x = Entfernung von der Oeffnung) ¹⁰⁾. Eine Abhängigkeit von y soll nicht angenommen werden; damit kann $l = cx$ gesetzt werden. Der Ansatz ist hier $\bar{u} = f(\eta)$, wo $\eta = \frac{y}{x}$ ist. Am einen Rand des Gebietes ist $\bar{u} = U$, am andern $\bar{u} = 0$. Der Druck sei in dem ganzen Gebiet konstant. Es gilt nun

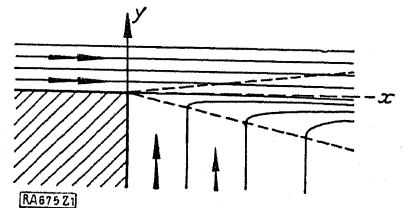


Abb. 6.

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'}{\partial y} = 2 c x^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

Durch Einführen der Stromfunktion $\psi = x F(\eta)$, wo $F(\eta) = \int f(\eta) d\eta$ ist, erhält man nach kurzer Rechnung die hier besonders einfache Differentialgleichung,

$$F F'' + 2 c^2 F'' F''' = 0$$

^{9b)} Inzwischen erschienen: Z A M M 7 (1927) S. 1.

¹⁰⁾ Da in den Daten der Aufgabe hier keine Länge vorkommt und aus ihnen auch keine gebildet werden kann, sobald die Zähigkeit außer Acht bleibt, ist hier x die einzige Länge, der man l proportional setzen kann. Die frühere Schlußweise ist natürlich auch anwendbar und führt zum selben Ergebnis.

die sowohl durch $F'' = 0$ ($u = \text{const}$) wie auch durch

$$F + 2c^2 F''' = 0$$

gelöst wird. Die letztere Differentialgleichung stellt eine Art gedämpfter Schwingung dar, von der eine Halbschwingung die für das Vermischungsgebiet in Betracht kommende Funktion darstellt. An dieses Gebiet, vgl. Abb. 7, schließt sich auf der einen Seite $u = U$, auf der anderen

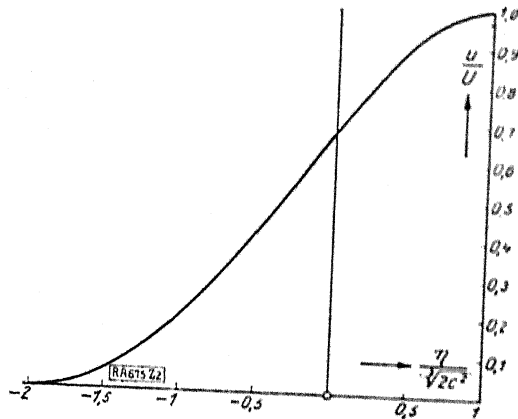


Abb. 7.

Geschwindigkeitsverteilung an der Strahlgrenze.

$u = 0$ tangential an. Dies als Beispiel solcher Rechnungen. In anderen Fällen ergeben sich ähnliche Differentialgleichungen, die aber meist weniger bequem zu lösen sind. Abb. 8 gibt die Geschwindigkeitsverteilung in einem Strahl, der aus einem kreisförmigen Loche kommt.

Nach Erhalt der Lösung lassen sich nachträglich aus den Querschleunigungen und den scheinbaren Querspannungen auch die Druckunterschiede quer zur Strömungsrichtung, die erst

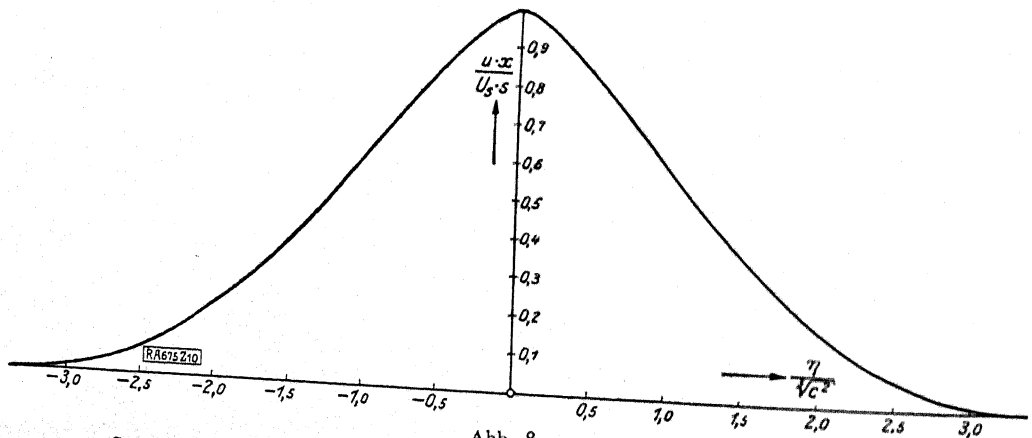


Abb. 8.

Geschwindigkeitsverteilung bei der Ausbreitung eines Strahles vom Kreisquerschnitt.

vernachlässigt wurden, berechnen; sie erweisen sich in den bisher nachgeprüften Beispielen kleiner als 1 % des Staudrucks der Höchstgeschwindigkeit des betreffenden Querschnitts, so daß ihre vorläufige Vernachlässigung also gerechtfertigt ist. Ueberall ergibt sich im Strahl ein kleiner Ueberdruck. Bei den Luftstrahlen der aerodynamischen Versuchseinrichtungen hat dieser Ueberdruck eine meßtechnische Bedeutung für Präzisionsversuche, z. B. für die Eichung von Staegeräten zur Luftgeschwindigkeitsmessung. Für den großen Göttinger Luftstrom, dessen

Vermischung mit der umgebenden Luft gemessen worden ist¹¹⁾, hat Herr TOLLMIEH einen Ueberdruck von rund $0,006 \frac{\rho U^2}{2}$ berechnet. Vielleicht interessieren noch die folgenden Zahlen: Breite der Vermischungszone $b = 0,255 x$; Mischungsweg $l = 0,0174 x = 0,068 b$; von der Turbulenz erfaßter Teil des ungestörten Strahls $b' = 0,325 b = 0,083 x$; Zuströmgeschwindigkeit der ruhenden Luft zum Strahl, zum Ersatz für die von diesem mitgerissene Luft: $\bar{v} = 0,032 U$. Von der Uebereinstimmung der berechneten Kurven mit den beobachteten geben Abb. 9 und 10 einen guten Aufschluß, wo zwei Staudruckregistrierungen mit den gestrichelt hineingezeichneten theoretischen Kurven wiedergegeben sind.

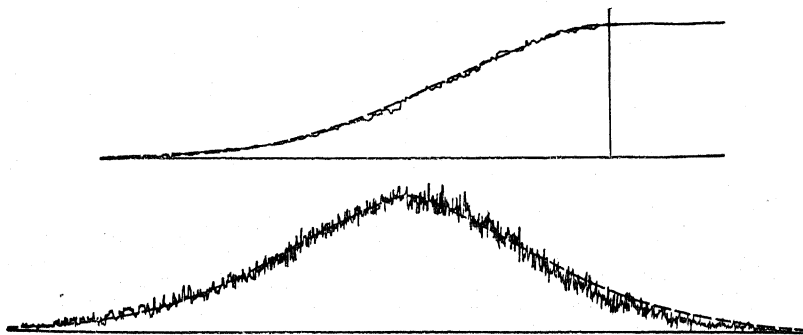


Abb. 9 und 10.

Staudruckregistrierungen für die Strahlgrenze und für den Strahl von Kreisquerschnitt.

Außer den hier erwähnten Fällen ist bisher noch das Abklingen der Störung hinter einem Gitter aus parallelen Drähten gerechnet, wobei die Geschwindigkeitsabweichungen umgekehrt proportional dem Abstand abnehmen, ferner das zeitliche Anwachsen der turbulenten Schicht, die aus einer Trennungsschicht mit Geschwindigkeitssprung hervorgeht. Das Anwachsen $\frac{db}{dt}$ erfolgt mit einer konstanten, der Stärke des Geschwindigkeitssprunges proportionalen Geschwindigkeit, Mischungsweg $l = c (u_1 - u_2) t$ ¹²⁾. Eine theoretische Abschätzung über die bisher nur empirisch bestimmbare Größe c wird sich, wie ich glaube, in diesem wie in anderen geeigneten Beispielen aus der Forderung gewinnen lassen, daß die so gebildete Schicht gegen kleine Schwingungen gerade nicht mehr labil ist. Allerdings wird es nicht leicht sein, die Schwingungen solcher Gebilde unter Berücksichtigung der scheinbaren Reibung auch der Schwingungsbewegung wirklich zu berechnen. (Beweis für diese Behauptung: ein zu kleines c gibt zu schmale Uebergangsschichten oder Strahlen, die dann dynamisch labil sind; die Labilität bedeutet aber dann Wirbelbildung, d. h. vermehrte Vermischung, Verbreiterung usw., q. e. d.)¹³⁾.

Es ist jetzt noch von einer anderen Problemstellung zu sprechen, die sich auf die verwickelteren Aufgaben bezieht, die nicht mehr so bequem theoretisch erfaßt werden können. Hier kann unsere Formel (2) bzw. ihre Erweiterungen dazu verwendet werden, um zu der

¹¹⁾ Vgl. Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt in Göttingen, II. Lief. (1923), S. 73.

¹²⁾ Einziger aus Dimensionsgründen möglicher Ansatz. Das Geschwindigkeitsprofil gemäß unserer Formel (2) ist hier einfach durch eine Funktion dritten Grades von der Form $Ay - By^3$ gegeben.

¹³⁾ Es kann auch sein, daß eine kurze Zeit hindurch für die Störung von einer bestimmten Wellenlänge oder Schwingungsdauer Labilität herrscht, die dann aber durch Anwachsen von b von Stabilität abgelöst wird. In solchen Fällen wird dann der wirklich eintretende c -Wert von den Anfangsstörungen abhängen.

durch den Versuch festgestellten Strömung die Größe des Mischungsweges l , abhängig vom Ort in der Flüssigkeit, zu ermitteln. Dies gibt ein besonders anschauliches Bild von der Intensität der Vermischungsvorgänge an jeder einzelnen Stelle, und man erhält dabei ein sehr leicht vorstellbares Maß dieser Intensität, das sich, da es sich um eine einfache Länge handelt, auch besonders bequem vom Modell auf das große Objekt übertragen läßt. Dabei zeigen sich in den bisher geprüften Fällen bemerkenswert geringe Unterschiede im mittleren Wert von l . Für glatte Gerinne ergeben sich bei konstantem wie bei wachsendem oder abnehmendem Querschnitt, wie auch bei den gewaltsamen Vorgängen hinter einem Wehr und bei der Ausbreitung von Strahlen Mischungswege, die etwa $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ der Wassertiefe bzw. der halben Kanalbreite oder der halben wirksamen Breite des Strahls sind. Für glatte erweiterte und verengte Kanäle zeigt Abb. 11 den örtlichen Verlauf von l^{14}). Rauhe Kanäle werden in Göttingen zurzeit bearbeitet. Die Ergebnisse stehen noch aus.

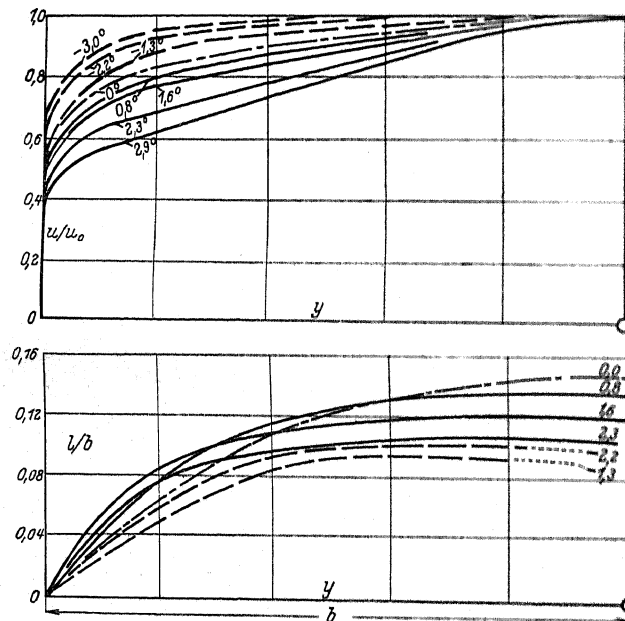


Abb. 11.
Verteilung der Geschwindigkeit und des Mischungsweges über den Querschnitt.

— erweiterte Kanäle.
- - - verengte Kanäle.
- · - - Kanal von konstantem Querschnitt.

Eine der wichtigsten Arbeiten der nächsten Zeit wird das Studium der Reibungsschichten an festen Körpern betreffen, und zwar sollen hier besonders die Bedingungen für das schädliche Abreißen der Strömung an Flugzeugtragflügeln, in Diffusoren usw. näher studiert werden. Auch hier sind bereits Anfänge vorhanden.

Zum Schluß soll noch von einer Erscheinungsgruppe gesprochen werden, die sich auf das räumliche Turbulenzproblem bezieht (im Gegensatz zu dem ebenen oder rotationssymmetrischen, das bisher allein behandelt wurde). Es handelt sich um die Geschwindigkeitsverteilung in nicht kreisförmigen Röhren. Ich habe besonders sorgfältige Messungen darüber anstellen lassen: die Ergebnisse waren sehr überraschend. Statt einer Verteilung mit nach innen zu immer mehr

¹⁴⁾ Abb. 11 stammt aus der Dissertation von FR. DÖNCH (Forschungsarbeiten des V. D. I., Heft 282, 1926).

abgerundeten Isotachen¹⁵⁾, wie man sie bei der Laminarströmung bekommt, erhielt man beim Dreieck und beim Rechteck die folgenden Bilder¹⁶⁾, von denen das für das Rechteck noch sonderbarer ist als das für das Dreieck. Lange Zeit konnte ich keine vernünftige Erklärung dafür finden. Eine Notiz über alte Beobachtungen betreffend spiralförmige Bewegung des Wassers in einem geraden Flußlauf¹⁷⁾ brachte mir schließlich die Anregung zu einer brauchbaren Erklärung: Das Wasser führt in allen geraden Kanälen von konstantem nicht kreisförmigen Querschnitt «Sekundärbewegungen» aus, und zwar von der Art, daß in einer Ecke

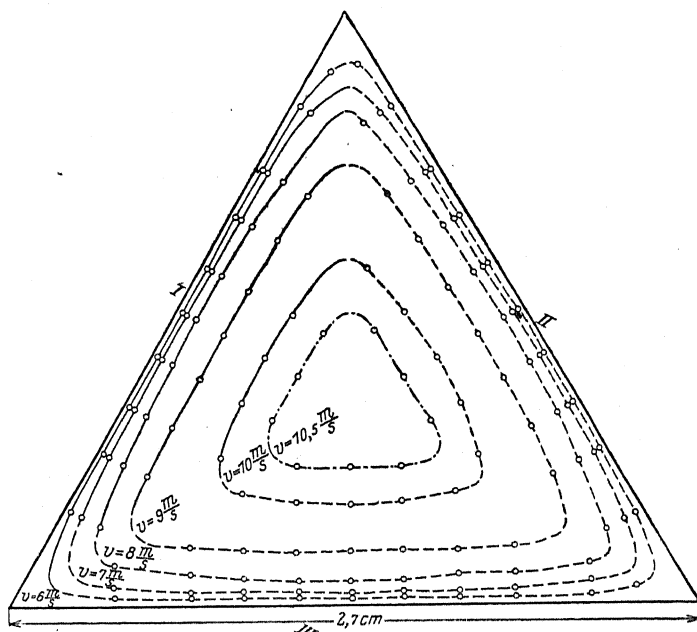


Abb. 12.

Isotachen in einem Kanal von dreieckigem Querschnitt.

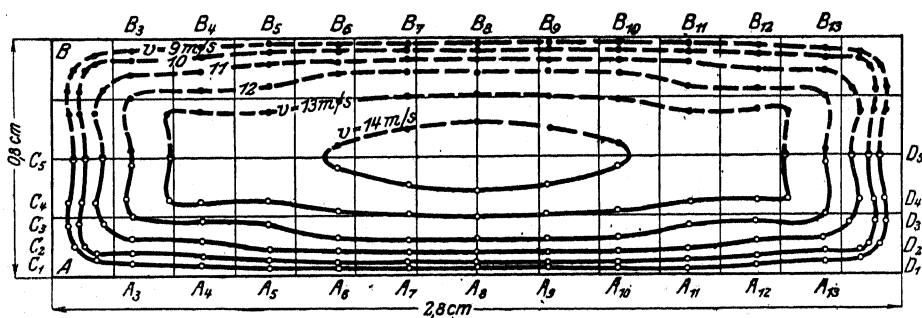


Abb. 13.

Isotachen in einem Kanal von rechteckigem Querschnitt

die Strömung längs der Winkelhalbierenden in die Ecke hinein und zu beiden Seiten davon aus der Ecke herausführt. Durch solche Strömungen in Zusammenwirkung mit der gewöhnlichen turbulenten Mischbewegung lassen sich die Beobachtungen nun gut erklären. Durch die Sekundärströmung wird immer Impuls in die Ecken hineingetragen, daher die ungewöhnlich großen

¹⁵⁾ Linien gleicher Geschwindigkeit.

¹⁶⁾ Aus der Dissertation von NIKURADSE, l. c.

¹⁷⁾ Die Wasserkraftlaboratorien Europas, Berlin 1926, S. 66—67.

Geschwindigkeiten dort. Bild 14 zeigt die Sekundärströmungen, wie sie für das Dreieck und das Rechteck von Bild 12 und 13 angenommen werden müssen. Man sieht, wie der von der Wand nach innen laufende Strom beim Rechteck in der Nähe der Enden der Langseiten und auch in der Mitte der Schmalseiten Stellen von unternormaler Geschwindigkeit erzeugt. Zur Bestätigung der neuen Anschauungen habe ich kürzlich noch ein Rohr gemäß Bild 15 vermessen

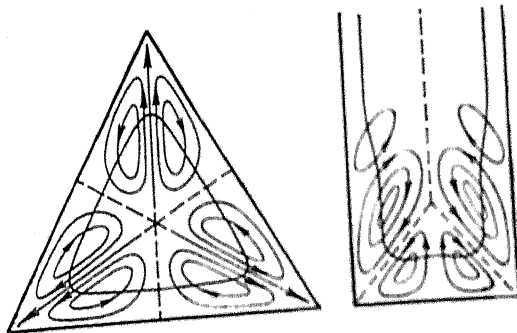


Abb. 14.
Sekundärströmungen.

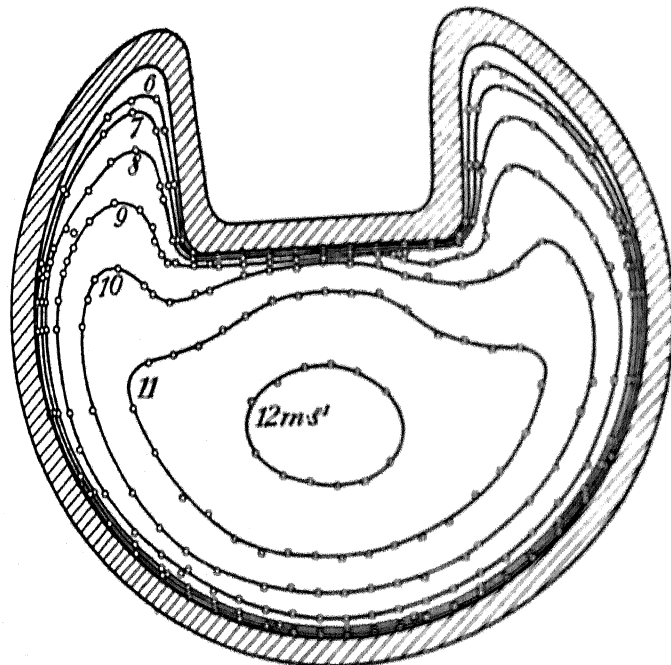


Abb. 15.
Isotachen in einem Kreisrohr mit Nut.

lassen. Die Ergebnisse, die sonst sehr überraschend wirken wurden, bestätigen die Erklärung in bester Weise. Durch die aus den Ecken kommenden Ströme wird in der Mitte ein Doppelwirbel erzeugt, der in der Mittellinie das Wasser gegen die ebene Fläche hinführt und an den einspringenden Ecken wieder wegführt, daher übernormale Geschwindigkeit in der Mitte und unternormale Geschwindigkeit daneben. An der freien Oberfläche von Gerinnen bilden sich auch solche Sekundärströmungen aus, wie Bild 16 zeigt, das die Geschwindigkeitsverteilung in dem

anfangs erwähnten Gerinne wiedergibt. Die freie Oberfläche ist danach durchaus kein Querschnitt durch eine ebene Strömung, wie man es der Versuche wegen hätte hoffen mögen. Im übrigen schließt die photographisch bestimmte Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche gut an die mit dem Pitotrohr gemessene an.

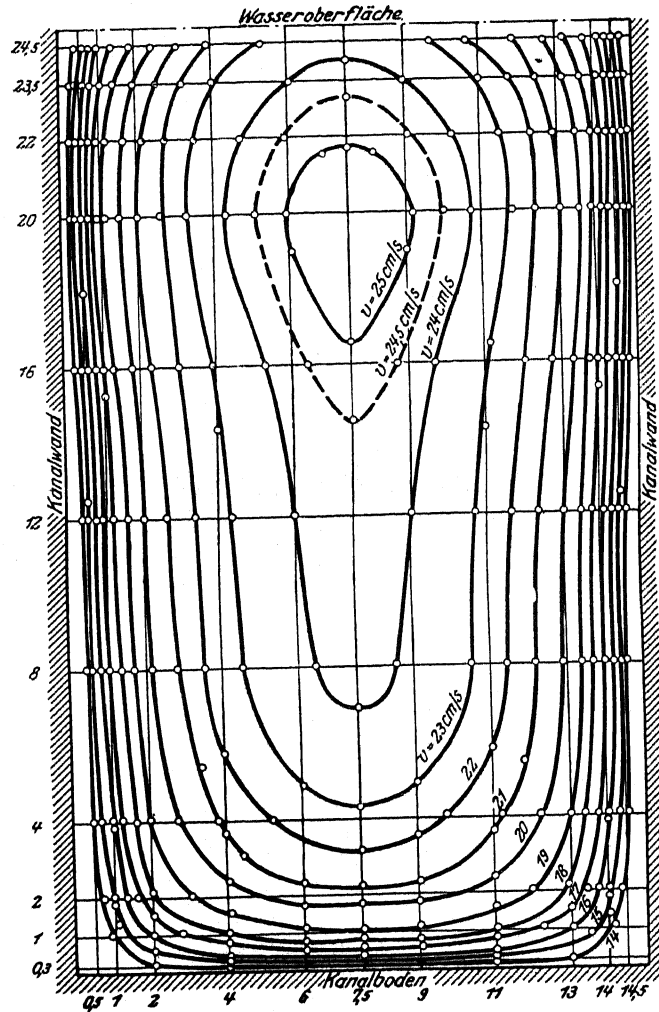


Abb. 16.

Isotachen in einem offenen rechteckigen Kanal.

Wie sind nun aber die Sekundärströmungen zu erklären? Meines Erachtens gibt es keine andere Erklärung als diese: Die Mischbewegung ist von der Art, daß neben der Hin- und Herbewegung in der Richtung des stärksten Gefälles der Geschwindigkeit eine noch kräftigere Hin- und Herbewegung senkrecht dazu, also in der Richtung der Isotachen vorhanden ist. Wenn dieses zutrifft, so ergibt eine einfache Impulsbetrachtung, daß durch diese Art von Bewegung Kräfte geweckt werden, die nach der konvexen Seite der Isotachen weisen und um so stärker sind, je stärker die Krümmung ist. In Abb. 17 ist ein Abschnitt zwischen zwei Isotachen dargestellt. Die Pfeile bedeuten die von der hinundhergehenden Bewegung ausgeübten Impulse, die bekanntlich für auswärts und einwärts gerichtete Strömungen immer nach innen zeigen. Betrachtungen über die Produkt-Mittelwerte $\overline{v'^2}$, $\overline{v'w'}$ und $\overline{w'^2}$ liefern Ergebnisse, die mit dieser

Impulsbetrachtung übereinstimmen. Warum nun allerdings die Mischbewegung von dieser Art ist, das ist eine Frage, die zu dem erwähnten «großen Turbulenzproblem» gehört und auf die ich die Antwort leider schuldig bleiben muß. Jedenfalls zeigt uns diese Erscheinung deutlich, daß die ausgebildete Turbulenz eine wesentlich dreidimensionale Bewegung ist. Dieser Umstand scheint allerdings die Lösung des großen Turbulenzproblems in sehr weite Ferne zu rücken,

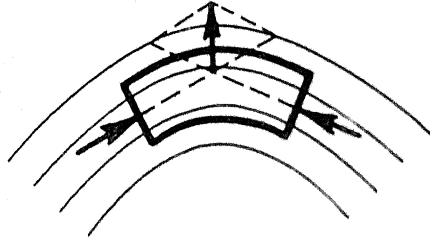


Abb. 17.

denn den dreidimensionalen Flüssigkeitsbewegungen gegenüber sind unsere heutigen mathematischen Hilfsmittel leider im allgemeinen recht unzureichend. Für die Ordnung der Erfahrungstatsachen dürften aber meist die in diesem Vortrage gezeigten Wege ausreichen, so daß man den Verzicht auf eine vollständige Erklärung wird verwirken können.

Im Anschluß an den Vortrag wird ein Film vorgeführt, der das turbulente Fließen in einem Gerinne zeigt; dabei werden auch Versuche über die Entstehung der Turbulenz vorgeführt, über die später an anderem Orte zusammenhängend berichtet werden soll.

Sur la théorie des coups de béliet

Par C. Camichel, Toulouse

En raison de la durée très limitée de cet exposé, je ne pourrai envisager que les points les plus importants de la théorie des coups de béliet. Je me propose seulement de résumer les méthodes employées pour le calcul de ce phénomène, en laissant de côté les conduites bifurquées, munies de collecteurs, les conduites munies de capacité remplies d'un milieu élastique, de réservoirs d'air, d'un piston maintenu par un ressort, parechocs de cheminée d'équilibre¹⁾, etc.

Dans la première partie de cet exposé, je considérerai une conduite dont le diamètre et l'épaisseur sont constants sur toute sa longueur.

Dans la seconde partie, j'étudierai les conduites industrielles dont le diamètre et surtout l'épaisseur varient d'une extrémité à l'autre²⁾.

I. Conduites à diamètre et épaisseur constants sur toute leur longueur

Equations générales.

Comme l'ont montré KORTEWEG, JOUKOWSKI, ALLIEVI, on fait intervenir la compressibilité de l'eau et la déformation de la paroi; ces deux phénomènes mettent en jeu dans les conditions de la pratique industrielle des variations de volumes du même ordre de grandeur.

On écrit d'une part l'équation générale de la mécanique, de la proportionnalité des forces aux accélérations et d'autre part l'équation de continuité. On démontre ainsi que les pressions et les vitesses résultent de la composition de deux ondes circulant dans la conduite l'une avec une vitesse $+a$, l'autre avec une vitesse $-a$.

Si l'on désigne par x la distance du point considéré comptée positivement à partir de l'extrémité aval de la conduite, jusqu'à l'extrémité amont,

par y et par v la pression et la vitesse de l'eau, au point d'abscisse x et à l'époque t ; cette vitesse étant comptée positivement de l'extrémité amont à l'extrémité aval,

par y_0 la pression statique au point considéré au temps 0 ;

par v_0 la vitesse au temps 0

on a les deux équations:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F'\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ v &= v_0 - \frac{q}{a} \left\{ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F'\left(t + \frac{x}{a}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

F et F' désignant deux fonctions que l'on détermine par les conditions expérimentales.

La vitesse a est fonction du diamètre de la conduite, de son épaisseur, du coefficient d'élasticité du métal employé, du coefficient de compressibilité du liquide. M. ALLIEVI a mis la formule théorique, sous une forme particulièrement commode:

$$a = \frac{9.900}{\sqrt{48,3 + K \frac{D}{e}}}$$

¹⁾ Pour ces dernières, on trouvera dans les travaux de M. EYDOUX un exposé complet de la question.

²⁾ Dans l'une et l'autre partie, j'utiliserai les résultats des recherches de MM. RATEAU, DE SPARRE, JOUGUET, EYDOUX, GABRIEL, CAMICHEL.

dans laquelle a désigne la vitesse en mètres par seconde:

D le diamètre de la conduite;

e son épaisseur;

$K = 0,5$ pour le fer et l'acier;

$K = 1$ pour la fonte;

$K = 5$ pour le plomb.

Diverses remarques peuvent être faites sur le calcul que nous venons de rappeler.

Remarques diverses.

Ces équations nécessitent des vérifications expérimentales, attendu que, dans leur établissement, certaines hypothèses ont été faites qui ne concordent pas complètement avec la réalité.

C'est ainsi que la vitesse v qui intervient dans ces équations, est une vitesse moyenne la même dans tous les points de la section de la conduite; dans l'expérience, c'est la vitesse déterminée par des jaugeages. Or en réalité, la vitesse n'est pas la même dans toute la section de la conduite; nulle à la paroi elle a sa valeur maximum sur l'axe de la conduite, et elle présente la répartition correspondant au régime turbulent qui règne le plus souvent dans la conduite.

Une autre remarque est la suivante:

Dans l'établissement des équations, on n'a pas fait intervenir les coudes, rivures sans parler des ancrages, qui peuvent être assimilés à une augmentation de l'épaisseur de la conduite.

Il faut en outre signaler un phénomène important, celui de la déformation des ondes. Comme nous le verrons dans quelques instants (fig. 1) les ondes se déforment dans leur déplacement; par exemple, une variation de pression de très courte durée correspondant à une courbe très pointue, s'étalera en même temps que son maximum diminuera. On peut dire que, dans l'état actuel de l'industrie, avec les longueurs de conduites employées, avec le métal utilisé, l'acier, l'expérience montre que la déformation des ondes peut être sensiblement négligée. Il n'en serait plus de même si les conditions de l'exploitation changeaient, si par exemple les conduites industrielles avaient des longueurs bien plus considérables ou bien une épaisseur beaucoup plus faible ou un coefficient d'élasticité différent. Une découverte dans la métallurgie permettant l'emploi d'un métal plus résistant et se déformant davantage, entraînerait une modification complète de la théorie des coups de bélier, car alors les ondes se déformeraient beaucoup plus rapidement qu'avec le métal employé actuellement. En fait, ce qui domine dans le calcul des conduites, c'est la nature du métal. C'est du jour où l'on est arrivé à produire des aciers particulièrement bien définis, que le calcul des conduites est devenu possible et qu'on a pu rechercher, sans compromettre la sécurité, le maximum d'économie du métal, dans les installations industrielles.

Signalons une dernière remarque: dans les coups de bélier comme dans tous les domaines d'ailleurs, il est nécessaire d'avoir affaire à des phénomènes bien définis, comparables à eux-mêmes; c'est de toute évidence, la condition indispensable de l'application de la théorie. Trop souvent, en hydraulique, on a affaire à des mélanges de phénomènes en proportions variables suivant les circonstances, c'est par cela que les résultats obtenus par des observateurs différents sont eux-mêmes différents. Dans les conduites industrielles, 2 éléments interviennent: l'eau et le métal. L'eau est comparable à elle-même. Il est nécessaire qu'il en soit de même du métal, et que des phénomènes accessoires ne viennent pas apporter des perturbations, comme par exemple la purge incomplète des conduites.

Vérifications expérimentales.

La vitesse a se détermine par exemple par la *méthode de la dépression brusque* qui con-

siste à provoquer en un point de la conduite, par exemple à l'extrémité aval, une perturbation de courte durée.

A l'extrémité aval de la conduite étudiée, se trouve un petit robinet, qu'on ouvre pendant un temps très court, vis-à-vis du temps $\theta = \frac{2l}{a}$, que l'onde met pour aller et revenir de l'extrémité aval à la chambre de mise en charge, et pour parcourir par conséquent 2 fois la longueur l de la conduite. La variation de pression est inscrite par un manomètre, elle est réfléchiée à l'extrémité amont et change de signe et ainsi de suite. On obtient ainsi dans le graphique de la pression une série d'encoches, tantôt dans un sens, tantôt en sens inverse, qui permettent de déterminer très commodément la vitesse a . Le temps est inscrit sur le cylindre enregistreur au moyen d'un diapason ayant comme période un $\frac{1}{100}$ de seconde, par exemple. Pendant cette détermination, la conduite reste fermée. La fig. 1 indique l'enregistrement des variations de pression. On voit à la partie supérieure du cliché l'inscription du diapason; au-dessous se trouvent inscrites les dépressions et surpressions.

Les valeurs trouvées concordent d'une façon très satisfaisante avec la formule théorique.

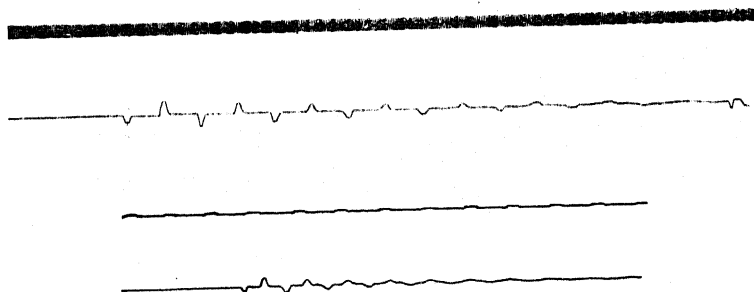


Fig. 1.

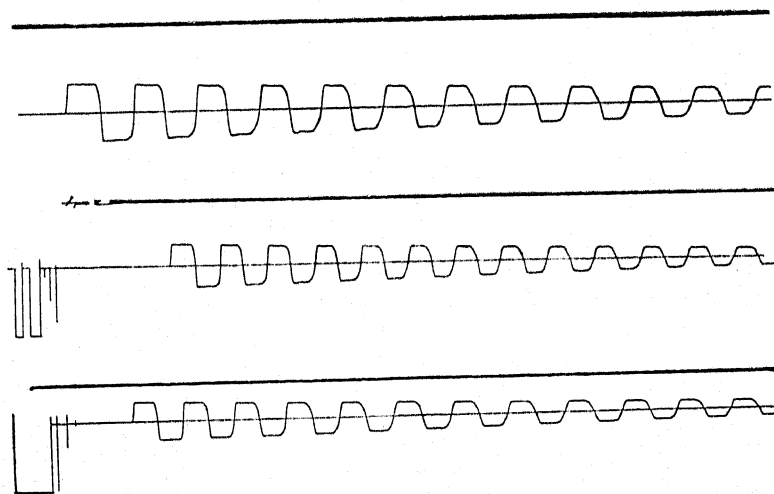


Fig. 2.

La fig. 2 représente le diagramme des pressions provenant d'une fermeture de très courte durée. Conformément à la théorie, le diagramme des pressions est constitué par des portions de droites parallèles et normales à l'axe des abscisses.

Les fig. 3 et 4 représentent les diagrammes des pressions dans des conduites incomplètement purgées. On voit apparaître dans les courbes des pressions des irrégularités. On constate dans les courbes la coexistence de périodes non multiples les unes des autres, ce qui donne une courbe résultante dont la partie supérieure se déforme constamment. C'est l'aspect caractéristique du diagramme d'une conduite munis de poches d'air³⁾.



Fig. 3.

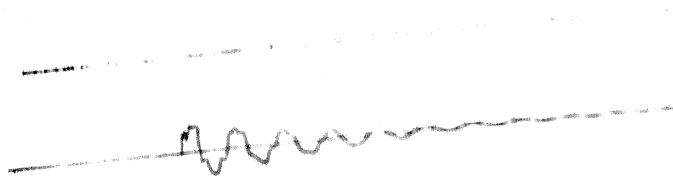


Fig. 4.

Emploi des équations générales.

Pour étudier les diverses questions qui se posent dans la pratique, on écrit les conditions aux limites:

A l'extrémité amont de la conduite, on a une chambre d'eau sur laquelle se produisent en ce qui concerne la pression, des réflexions avec changement de signe; on écrit que la pression en ce point est constante. On a ainsi une relation entre les fonctions F et F' .

D'autre part, on étudie ce qui se passe au distributeur

On divise le temps en intervalles égaux à $\theta = \frac{2l}{a}$, durée de l'aller et du retour de l'onde dans la conduite. On considère le premier intervalle θ :

On utilise la loi de fermeture ou d'ouverture, en fonction du temps, du distributeur placé à l'extrémité aval et en écrivant l'équation de BERNOULLI, on a une nouvelle relation.

Les équations obtenues comme nous venons de l'expliquer, permettent de calculer les pressions y et les vitesses v à l'extrémité aval de la conduite, pendant le premier intervalle de temps θ pour une époque τ comprise entre 0 et θ

$$0 < \tau < \theta$$

On considère ensuite un deuxième intervalle θ et en appliquant de même l'équation de BERNOULLI, on obtient de même les valeurs des pressions et des vitesses à l'extrémité aval de la conduite, en utilisant les valeurs de la fonction F obtenues dans le premier intervalle de temps et ainsi de suite.

³⁾ Nous verrons plus loin, dans les conduites à caractéristiques multiples que la superposition de la période apparente et des diverses périodes de la conduite, donne une courbe de pression d'aspect analogue.

On obtient en même temps les valeurs $F_1, F_2, F_3, \dots, F_K$ de la fonction F pour $x = 0$ et pour des époques

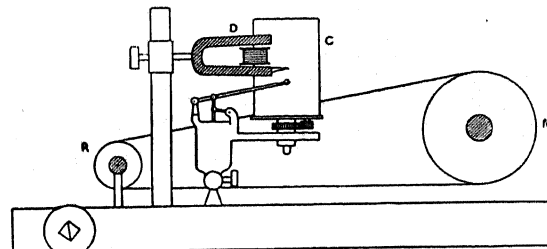
$$\tau, \tau + \theta, \dots, \tau + (K - 1) \theta.$$

Il suffit d'appliquer les équations générales (1) pour avoir les valeurs de y et de v à une époque quelconque et en un point quelconque de la conduite.

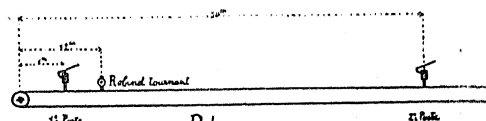
C'est ainsi qu'on peut étudier les problèmes les plus complexes de fermeture et d'ouverture d'une conduite, rechercher la valeur de la surpression la plus grande et l'époque à laquelle elles se produisent⁴). Je laisserai de côté malgré son intérêt cette question. — Je me contenterai de dire seulement quelques mots sur les phénomènes de résonance.

Phénomènes de résonance. Ces phénomènes sont très importants, car l'intensité des variations de pression qu'ils développent peut dépasser beaucoup celle des coups de bélier proprement dits.

Dans une conduite à caractéristique unique, existe une période fondamentale égale à $\frac{4l}{a}$ c'est-à-dire à 2 fois la durée de l'aller et du retour de l'onde dans la conduite. On peut dans une conduite faire résonner la période fondamentale et ses divers harmoniques. On emploie pour cela le procédé suivant:



Expérience du Robinet tournant.
Analyse d'une conduite.



Résonances.
Usine à Gaz de Toulouse
Série: UG 80.

Fig. 5.

On munit la conduite à son extrémité aval d'un petit robinet tournant (Fig. 5) mu par un moteur M dont on fait varier lentement la vitesse; le manomètre I branché à côté de ce robinet, met en évidence les diverses résonances.

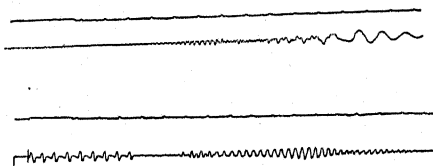


Fig. 6.

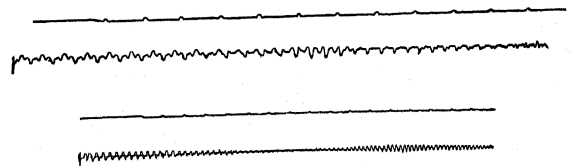


Fig. 7.

La fig. 6 montre la résonance du fondamental ($\frac{1}{4}$ onde) en haut et en bas la résonance du 2^e, 3^e, 4^e harmonique ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 onde). La fig. 7 la résonance du 5^e harmonique ($\frac{5}{4}$ onde).

⁴) On se reportera utilement pour ce sujet aux recherches de MM. DE SPARRE et de M. GARIEL.

En laissant au régime permanent le temps de s'établir, on a un phénomène particulièrement intéressant: le doublement de la pression statique.

Un calcul simple m'a permis de démontrer que la pression à l'extrémité aval de la conduite au moment de la résonance, varie de la pression atmosphérique P au double de la pression statique plus la pression atmosphérique, en d'autres termes varie de P , distributeur ouvert, à $y_0 + P$, distributeur fermé.

Au moment de la résonance, les débits passent par un minimum.

La fig. 8 montre la résonance du fondamental d'une conduite. Ces phénomènes de résonance peuvent être produits au moyen du clapet automatique qui s'ouvre et se ferme sous l'in-

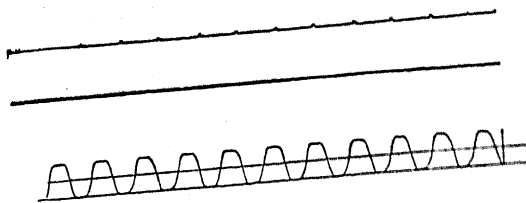


Fig. 8.

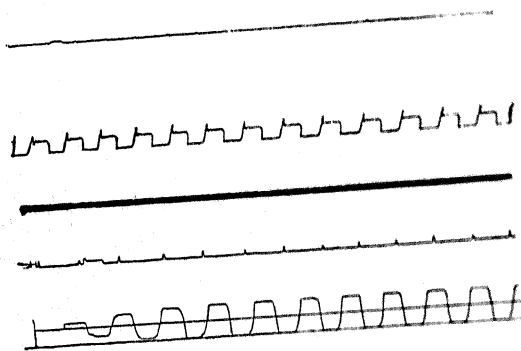


Fig. 10.

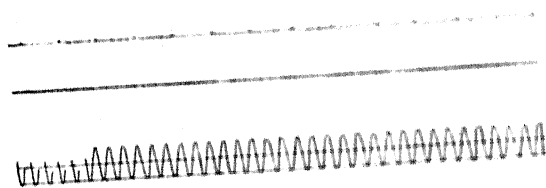


Fig. 11.

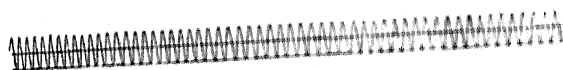


Fig. 12.

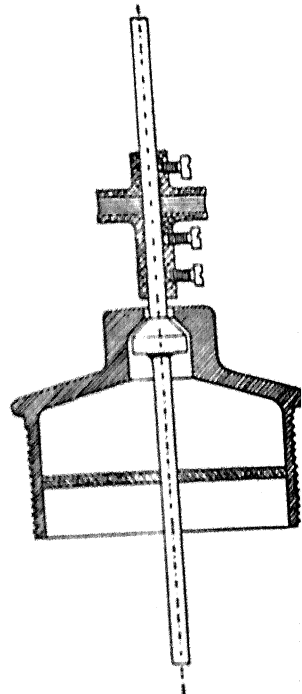


Fig. 9.

fluence des variations de pression et dont la fig. 9 montre aisément le fonctionnement. La fig. 10 indique le diagramme que l'on obtient par l'emploi de ce clapet automatique. La fig. 11 montre la résonance du 3^e harmonique et la fig. 12 la résonance du 5^e harmonique.

Les formules générales donnent facilement la répartition des pressions le long de la conduite dans chaque cas.

II. Conduites industrielles

Les conduites industrielles ont en général une épaisseur variable croissante de l'extrémité amont à l'extrémité aval. L'épaisseur du métal étant choisi pour que dans les divers tronçons le métal se trouve placé dans des conditions analogues: 6 à 8 kg. par mm².

Citons par exemple une conduite P_3 (Chute du Gave de Pau) ayant:

Longueur totale: $l = 346$ mètres,

Diamètre intérieur: $D = 1200$ mm.,

Pression statique au bas de la conduite: $y_0 = 120$ m. d'eau.

Cette conduite est en tôle d'acier soudée avec brides. Elle est formée de 25 tronçons ayant des épaisseurs variant de 7 à 13 mm. de la chambre d'eau au distributeur. Les fig. 17, 18, 19, 20, correspondent à cette conduite.

Nous donnerons de même des résultats d'expériences correspondant à une autre conduite C_4 (Chute du Gave de Cauterets) dont les caractéristiques sont les suivantes:

Longueur totale: $l = 536$ mètres,

Diamètre intérieur moyen: $D = 810$ mm.,

Pression statique au bas de la conduite: $y_0 = 252$ m. 50.

La conduite est formée de 40 tronçons d'épaisseur variant de 7 à 20 mm. de la chambre d'eau au distributeur.

Les figures 13, 14, 15 et 16 correspondent à cette conduite.

Emploi d'une vitesse a moyenne.

On peut ramener le cas d'une conduite à caractéristique variable au cas d'une conduite à caractéristique unique en faisant usage d'une valeur moyenne a_m donnée par la formule:

$$a_m = \frac{\sum l_i}{\sum \frac{l_i}{a_i}}$$

l_i désignant la longueur d'un tronçon de la conduite;

a_i la vitesse correspondante;

$\frac{l_i}{a_i}$ le temps que met l'onde pour le parcourir.

La vitesse moyenne est donc le quotient de la longueur totale de la conduite par le temps T que met l'onde pour aller du distributeur à la chambre d'eau à travers les divers tronçons.

Les calculs se font par la méthode indiquée dans le cas d'une conduite de la première catégorie; la fig. 13 ⁵⁾ représente la comparaison du calcul fait sur la conduite pour laquelle on a $a_m = 1068$ m./sec., et $T = 0,502$ sec., dans le cas d'une fermeture. La fig. 14 correspond au cas d'une ouverture.

On voit que l'accord entre le calcul et l'expérience est satisfaisant.

Assimilation d'une conduite industrielle à une conduite formée de deux tronçons pour lesquels les durées de propagation sont les mêmes: Méthode de M. de Sparre.

M. DE SPARRE a indiqué une méthode qui permet d'étudier avec plus de précision les conduites industrielles.

⁵⁾ Ces clichés, comme tous ceux qui sont, présentés, sont empruntés à un mémoire publié par l'auteur en collaboration avec MM. EYDOUX et GARIEL.

Fig. 13.

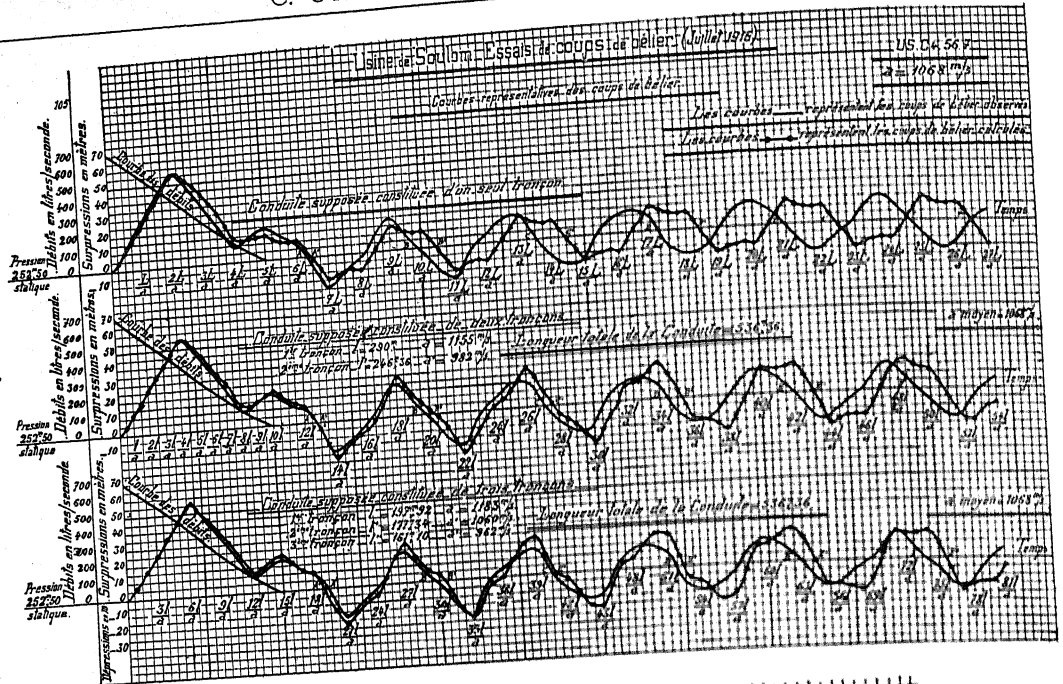


Fig. 14.

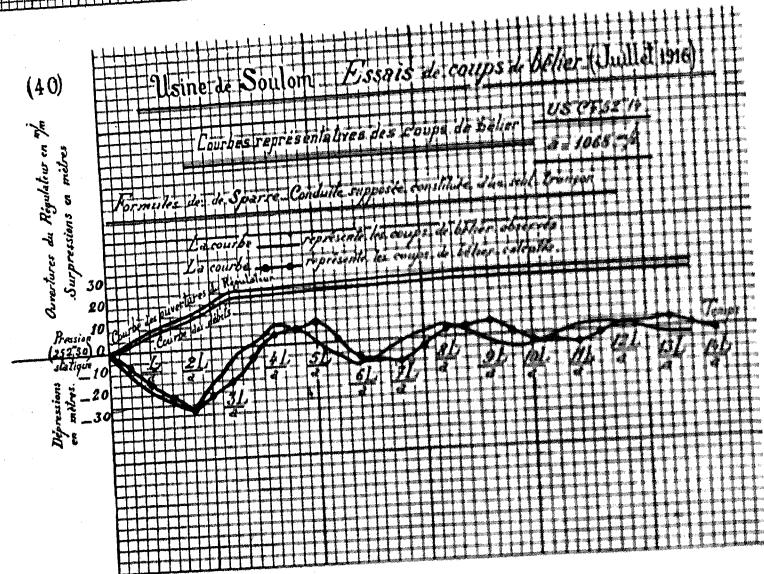
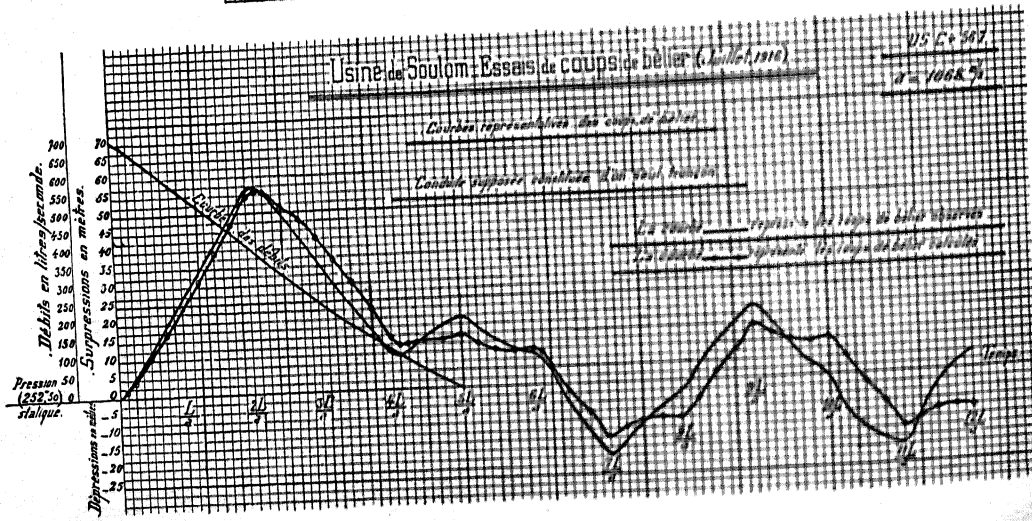


Fig. 15.



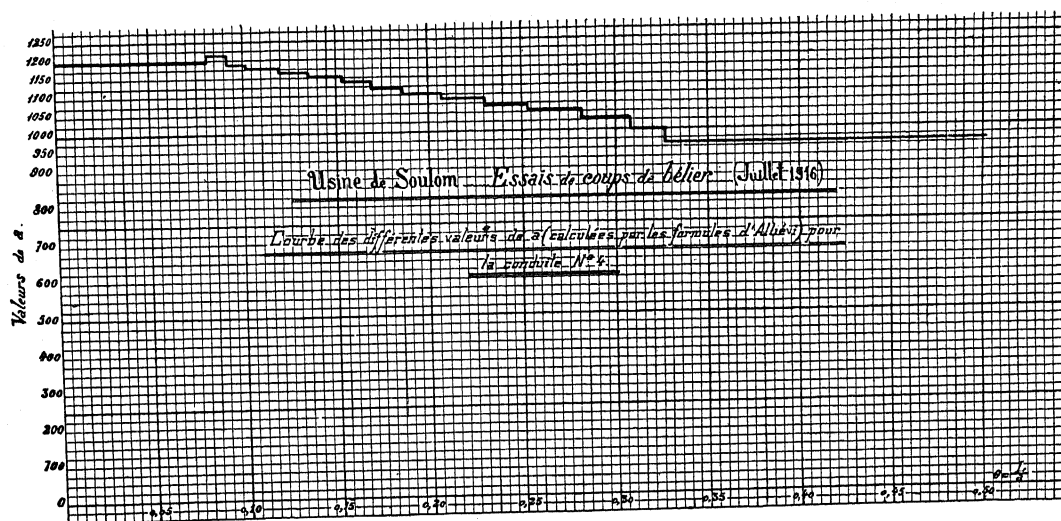


Fig. 16.

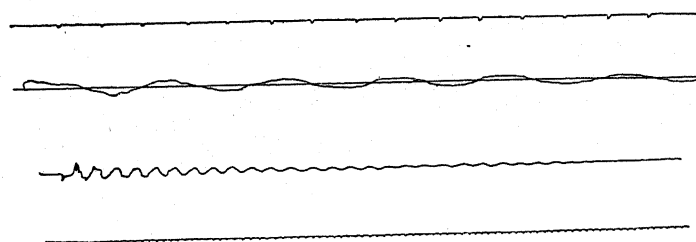


Fig. 17.

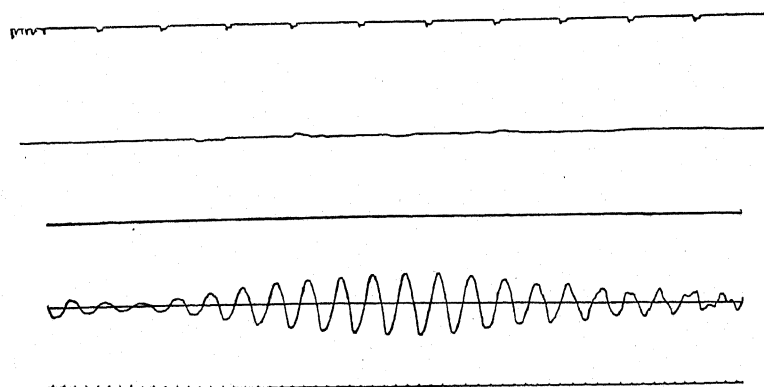


Fig. 18.

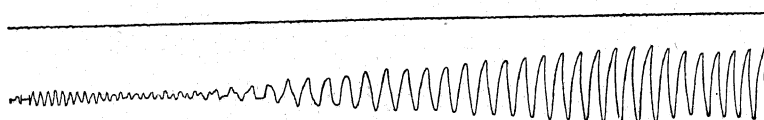


Fig. 19.

Considérons une conduite formée de 2 tronçons, dont les longueurs sont l et l' et pour lesquels les vitesses de propagation de l'onde sont a et a' , satisfaisant à la condition:

$$\frac{l}{a} = \frac{l'}{a'}$$

le calcul des surpressions peut être traité de la façon suivante: on écrit pour l'un et l'autre tronçon les équations générales.

Les conditions aux limites donnent à l'aval une première équation, en faisant intervenir la loi de fermeture ou d'ouverture du distributeur.

On obtient en outre 2 relations en écrivant qu'au raccordement des 2 tronçons les pressions sont les mêmes dans les 2 tronçons et que l'équation de continuité est vérifiée.

Enfin, une 4^e relation s'obtient en remarquant qu'à l'extrémité aval à la chambre d'eau, la pression est constante.

Les calculs ont été faits par M. DE SPARRE, auquel est due cette méthode et les formules qu'il a données sont complètement vérifiées par l'expérience, comme le montre la fig. 15, dans laquelle on a indiqué la comparaison entre le calcul et l'expérience: 1^o en faisant le calcul avec une vitesse moyenne a_m ; 2^o en utilisant la subdivision de la conduite en 2 tronçons et 3^o la subdivision de la conduite en 3 tronçons de longueur l, l', l'' , pour lesquels les vitesses de propagation de l'onde sont a, a', a'' avec les conditions:

$$\frac{l}{a} = \frac{l'}{a'} = \frac{l''}{a''}$$

Pour procéder pratiquement au sectionnement fictif de la conduite, on peut employer le procédé suivant:

On trace une courbe des vitesses a en fonction du temps mis par l'onde pour aller du distributeur au point considéré. Soit T le temps total mis par l'onde pour aller du distributeur à la chambre d'eau. On prend sur la courbe le point d'abscisse $\frac{T}{2}$; il divise la courbe en deux parties. On détermine alors les valeurs de l et l' pour chacune de ces deux parties. Ces longueurs l et l' sont données par la somme des produits des différents intervalles de temps compris dans chacune des deux parties par les valeurs correspondantes de a . Connaissant l et l' et étant donné que nous avons $\frac{l}{a} = \frac{l'}{a'} = \frac{T}{2}$ on déduit a et a' par les relations suivantes:

$$a = \frac{l}{\frac{T}{2}}, \quad a' = \frac{l'}{\frac{T}{2}}$$

On opérerait de même pour diviser la conduite en 3, 4, ..., n tronçons; il suffirait pour cela de diviser la ligne des abscisses en 3, 4, ..., n parties égales.

Période théorique et période apparente.

L'emploi des formules de M. DE SPARRE m'a servi pour expliquer une anomalie que présentent les conduites industrielles: si on mesure par exemple par la méthode de la dépression brusque la durée de la propagation de l'onde dans une conduite à caractéristiques multiples, par exemple la conduite P_3 , on trouve la durée calculée par la formule:

$$T = \sum \frac{li}{a_i} \text{ et une période; } \Theta = 4 \sum \frac{li}{a_i} = 1,48 \text{ m}$$

D'autre part, quand on provoque une perturbation quelconque au moyen du distributeur (ouverture ou fermeture), au bout d'un certain temps on obtient une courbe sinusoïdale, et on

a une période totalement différente de Θ ; on trouve par exemple pour la conduite P_3 , une période de 1,36 sec. (fig. 17). La première de ces deux périodes peut s'appeler période théorique et la seconde, période apparente.

Par suite d'une interprétation inexacte de la période apparente, divers auteurs admettaient que la vitesse de propagation de l'onde augmentait avec la pression; il n'en est rien; l'application des formules générales à la conduite formée de divers tronçons, m'a permis de rendre compte complètement de l'existence de la période apparente. Nous allons voir que celle-ci joue un grand rôle dans la pratique.

Phénomènes de résonance dans les conduites industrielles.

L'application des formules générales permet d'étudier les phénomènes de résonance dans les conduites industrielles.

Nous allons nous contenter d'indiquer quelques résultats obtenus expérimentalement: On a pu dans la conduite P_3 obtenir la résonance en faisant tourner le robinet avec une période égale à la période apparente. C'est par conséquent la période apparente qui résonne. La fig. 18 montre le phénomène de résonance de la période apparente sur la conduite P_3 .

Dans une autre expérience, on a poussé plus loin la résonance de P_3 , et l'on s'est arrêté au moment où les surpressions seraient devenues dangereuses. La fig. 19 donne le graphique des pressions, dans cette expérience, il montre que sur la conduite P_3 qui a 346,5 mètres de longueur, et 1,20 mètre de diamètre intérieur, on peut provoquer la résonance de la période apparente au moyen d'un robinet dont la lumière n'a que 22×48 mm. soit 10 cm² environ; la vitesse doit être telle que la durée séparant deux ouvertures consécutives du robinet soit 1,36 sec.; on a créé ainsi des variations de pression dont l'amplitude totale représentait une colonne d'eau de 77,6 m. L'expérience n'a pas été poussée plus loin.

Cet exemple montre l'importance qu'il faut attacher à la période apparente et aux phénomènes de pompage.

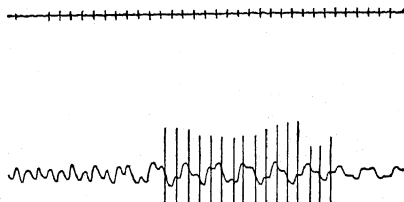


Fig. 20.

On a pu faire résonner également les divers périodes de la conduite P_3 et l'expérience a montré qu'on obtenait sensiblement les harmoniques 3 (fig. 20) de la période théorique Θ . M. GUILLAUMIN a montré que ce n'étaient pas exactement les harmoniques de cette période, mais qu'il y avait là diverses périodes suivant un phénomène analogue à celui qui se passe dans les antennes de télégraphie sans fil, la différence avec ces harmoniques étant trop faibles pour que l'expérience puisse les distinguer.

Conclusion.

J'ai terminé l'exposé sommaire et forcément incomplet que je me proposais de faire, des points les plus importants de la théorie des coups de béliet.

Nous pouvons en tirer une conclusion précise: C'est que, dans l'état actuel de l'industrie, les formules générales de la théorie des coups de béliet établie comme nous l'avons rappelé, rendent compte avec une approximation suffisante, des résultats expérimentaux.

On peut donc calculer avec toute une précision suffisante, les phénomènes dont les conduites sont le siège dans l'industrie moderne.

The Control of Stalled Aeroplanes

By B. Melvill Jones, Cambridge (England)

(For fig. 2b see Plate II)

It is my intention to outline the methods which are being used in England to attack the problems suggested by the title of my lecture. Let me begin by defining these problems. An aeroplane supports its weight by the air reaction upon its wings. That reaction depends upon the speed through the air and the angle at which the wings meet the air — the incidence as we call it. At the higher speeds of flight sufficient reaction is obtained with a small incidence; at lower speeds the incidence must be increased. There is however a certain incidence, called the stalling incidence, beyond which any further increase causes a change in the air flow and a decreased reaction. All normal flight is carried out at incidences below this critical incidence of maximum reaction. Steady flight at incidences greater than the critical is not impossible, but it involves either the expenditure of great power or a rapid descent and it requires a flying speed slightly greater than the minimum possible steady speed.

The art of flying aeroplanes in this way — «flying stalled» as we call it — has been developed in England, principally at the Royal Aircraft Establishment at Farnborough, where experimental flights in this condition are now a normal occurrence. I have myself flown aeroplanes in this manner and I will describe, from the point of view of the pilot, what appears to him to happen when his aeroplane enters the stalled state.

Suppose that the aeroplane is flying normally upon an even keel and that the control column is pulled slowly backwards so that the incidence rises and the speed falls. As the critical incidence is passed the aeroplane tries to dive and, if not checked, will do so, and return to normal flight; but if the elevators are sufficiently powerful the dive can be prevented and the aeroplane held in the stalled state. The lateral control now becomes very difficult, the ailerons and rudder feel as though they have lost nearly all their power and the aeroplane displays an unpleasant tendency to plunge and roll from side to side. Normal use of the controls merely aggravates these plunges, which may increase until the aeroplane gets out of control, and performs a peculiar and characteristic spiral dive, which may develop into the familiar spin. Continuous stalled flight upon most modern aeroplanes becomes possible when the pilot has learned how to use his controls to check any deviation from straight flight before it has become large.

There is no serious danger in stalling when at a considerable height above the ground, nor is the danger serious when a pilot, skilled in this mode of flight, stalls near the ground whilst upon an even keel. It is when the stall occurs inadvertently, during a turn or other manoeuvre near the ground, that serious disasters generally occur; for then the aeroplane, already turning rapidly and probably banked to a large angle, may immediately get out of control and dive with the familiar spiral motion into the ground. Unfortunately a pilot faced with a difficult landing desires to carry out manoeuvres near the ground at the slowest possible speed, and is therefore particularly liable to stall in these circumstances.

Here then is our problem; we have to investigate the causes of these peculiar lateral motions, why they are difficult to control in any circumstances, and why they become uncontrollable when they are allowed to develop too far.

Quantitative measurement in actual flight of motions such as I have described, requires very elaborate apparatus. Thus a complete record of the motion of the aeroplane might be made by recording, simultaneously and continuously, three angular velocity components, three acceleration components, the positions of the three control organs, and the resultant air speed.

Instruments for these purposes are now in use, but no comprehensive records from them are available, and our direct knowledge of these motions is as yet confined to the qualitative observations of pilots and observers.

For detailed information therefore we must turn to experiments upon small models, but unfortunately the flow of air round a wing in the neighbourhood of its stalling angle is particularly liable to be influenced by the changes of REYNOLDS Number which occur between ordinary model experiments and the full scale, and since the phenomena to be studied depend upon the behaviour of the flow at the stalling angle, the results of model experiments must be applied to the full scale with great reserve. To throw light on this question experiments have been made in free flight upon the air reactions on certain aeroplanes in the stalled condition. These experiments were very difficult to carry out, requiring skilled and specially trained pilots and special apparatus for measuring air speed. Fig. 1 shows close agreement between model and full scale for

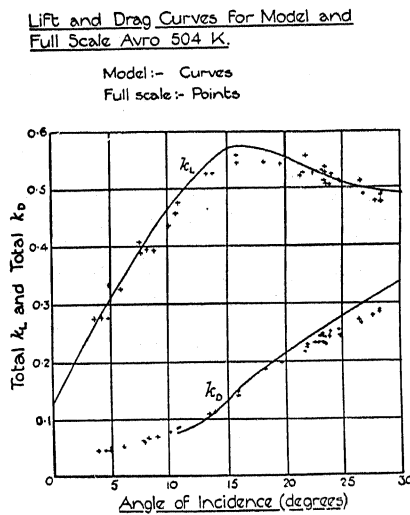


Fig. 1.

Lift and Drag of a Model and a full scale Aeroplane (Avro 504 K).

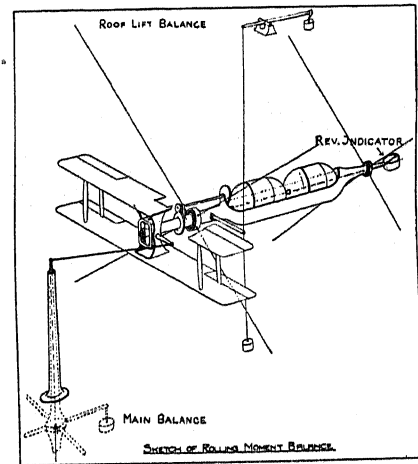


Fig. 2a (Fig. 2b: Plate II).

Apparatus for measuring in Wind Tunnels the moments generated by continuous rolling about the wind direction.

one of the aeroplanes — The Avro — which we have used for experiments in stalled flight. The other aeroplane which we used extensively for this purpose — The Bristol Fighter — showed a similar agreement. We might expect from this agreement as to stalling angle a reasonable agreement in the forces governing control, and such is indeed indicated by the accuracy with which predictions from model experiments relating to the control of these aeroplanes have been fulfilled in practice¹⁾.

Let us consider what model experiments are practicable. Given a precise knowledge of the movements of the aeroplane in free flight, it might be possible to reproduce them in a model moving under constraint, and so to measure the air reactions. This line of attack is being developed in England for the study of the steady spin, but in relation to the unsteady motions now under discussion it becomes impracticable and no attempt has been made to

¹⁾ Some aeroplanes with wings of section different from those upon which we have experimented do not however show the same agreement in the stalling angle for the model and the real aeroplane, and the value of experiments upon models of these aeroplanes remains in doubt.

develop it. Alternatively the model may be moved steadily through the air in certain simple ways and an estimate made, from the information so obtained, of the air reactions caused by more complex motions, of which the simple motions may be looked upon as components. The latter method was that adopted in the experiment I am about to describe.

Apparatus for measuring, in wind tunnels, the forces and moments upon an aeroplane moving in a straight line without rotation, are familiar to everyone engaged in aeronautical research. I will not take up time to describe them.

The study of motions involving steady rotations about an axis parallel to the wind in a tunnel is also practicable, because such rotations involve no change in the attitude of the aeroplane to the direction of the wind. Fig. 2a and b shows the instrument used for this purpose. The aeroplane is rotated steadily by an electric motor and provision is made for measuring moments about the axis of rotation and about any desired axis perpendicular thereto, and fixed in relation to the model.

Motions involving rotation about any axis perpendicular to the wind are not easily studied in a tunnel except by a method of small oscillations which is scarcely applicable to the present investigations. Such motions could be studied upon a whirling arm revolving in still air; apparatus for this purpose are under construction but have not yet been used. Estimates of the effects of such motions have so far been made by means of calculations in which each element of the wing is assumed to act as though it were part of a wing moving without rotation.

For the purposes of the present discussion the most interesting measurements made upon the instruments are those relating to what is known as the «asymmetric moment». The air reactions upon an aeroplane are equivalent to a force acting through the centre of gravity and a couple acting about some axis passing through the centre of gravity. This couple may be resolved into two components, one acting about an axis lying in the plane of symmetry of the aeroplane and one about an axis perpendicular thereto. We call the former the «asymmetric moment» and the latter the «symmetric», or «pitching moment». The former can conveniently be represented by a vector lying in the plane of symmetry.

Let us consider briefly the nature of the information respecting this asymmetric moment, which has been obtained from experiments upon small models. Large numbers of observations upon a variety of models have been made, but for simplicity I will confine myself to a few representative results for one aeroplane, the Bristol Fighter, — a conventional British Military Biplane.

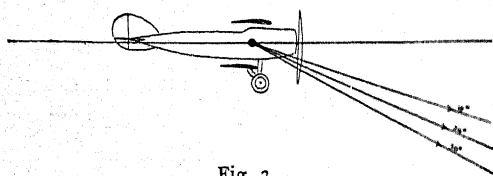


Fig. 3.

Outline of Bristol Fighter Aeroplane in attitude of steady stalled glide.

Fig. 3 shows an outline sketch of this aeroplane in an attitude characteristic of steady stalled flight without engine power. When flying in this manner the resultant air reaction upon the aeroplane lies within one or two degrees of the perpendicular to the mean chord of the wings, so that the latter must always be approximately horizontal, no matter what the angle of descent. On this diagram the horizontal

through the centre of gravity of the aeroplane is drawn, together with three lines showing the direction of motion when flying steadily at incidences of 18, 24 and 30 degrees.

When the aeroplane is flying without rotation and with the direction of motion in the plane of symmetry, there can be no asymmetric moment, but should the aeroplane be rotating about any axis in the plane of symmetry or should the direction of motion be inclined to the plane of symmetry, asymmetric moments will in general occur.

Fig. 4 shows the outline of the aeroplane with two vectors superposed. These represent the asymmetric moments occurring in normal and stalled flight respectively, when the direction of motion is inclined to the plane of symmetry through an angle of 10° — when, as we say, the aeroplane is «sideslipping». The vectors in this and succeeding figures all represent the

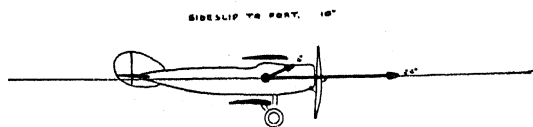


Fig. 4.

The asymmetric moments generated by motion inclined to the plane of symmetry — side slip — when the wings incidences are 4° and 12° respectively.



Fig. 5.

The asymmetric moments generated by angular velocity about the direction of motion, when the incidence of the wings at the plane of symmetry has various values.

asymmetric moment to the same scale and therefore are directly comparable; their actual scale is immaterial to the present argument²). The vectors are shown radiating from the centre of gravity of the aeroplane, and their direction is related to the sense of the moments which they represent as in a right-handed screw.

At 4° incidence, typical of normal flight, the moment is such as to raise and retard the wing towards which the sideslip is occurring. This can be explained in a simple manner by the action of the fin and rudder, which urges the aeroplane to turn towards the direction in which it is slipping, and of the dihedral angle between the wings, which causes the effective incidence to be increased on this same side.

An incidence of 24° has been taken as sufficiently representative of the stalled state. At this incidence there is a relatively large moment lifting the advancing wing. This large moment due to sideslip on a stalled aeroplane has been observed on five different models which have been tested in wind tunnels. The moment increases with sideslip until the angle made by the direction of motion with the plane of symmetry is greater than 30° , and it appears to be unrelated to dihedral angle. This moment due to sideslip is of great importance in the study of stalled flight.

Fig. 5 shows the effect of rotating the model steadily about an axis parallel to the direction of motion, the angular velocity being such that the speed of the wing tip relative to the centre of gravity was one tenth of the speed of the centre of gravity relative to the air. At low incidences a large moment is generated opposing the rotation, but in stalled flight this changes progressively into a moment tending to retard the falling wing and to increase the rotation. Unlike the effects of sideslip this result of rotation in stalled flight can be approximately explained on a simple hypothesis, for the rotation increases the incidence of the falling wing tip and reduces that of the rising tip, and this in stalled flight may be expected to decrease the lift and increase the drag of the falling tip, in comparison with that of the rising tip.

The effect of rotation about an axis perpendicular to the relative wind, has been estimated

²) The scale of these vectors can be estimated from the statement that a vector equal to the overall length of the aeroplane (excluding air-screw boss) would be equivalent to a moment of $0.045 \rho V^2 Ss$. Where ρ is air density, V air speed of the aeroplane and S and s are area and semi-span of the wings respectively.

by a calculation upon separate elements. Fig. 6 shows the estimated effect of an angular velocity about this axis equal in magnitude to that in the previous paragraph. A rolling moment tending to raise the more rapidly moving wing is always generated, but is larger for stalled flight than for flight at low incidences. Experimental confirmation, or otherwise, of this estimate is awaited

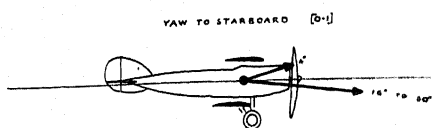


Fig. 6.

The asymmetric moments generated by angular velocity about an axis in the plane of symmetry perpendicular to the direction of motion.

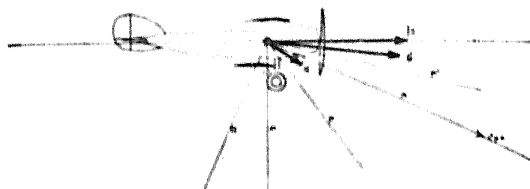


Fig. 7. Descriptive diagram.

with interest; though the estimate may not be exact, I do not think that it can be far wrong in character.

We require also the side force — force perpendicular to the plane of symmetry — generated by sideslip. This force has been measured and is taken into account in detailed calculations, but since its influence upon the motions which I shall describe is small, I will not take time to discuss it. The side forces generated by angular velocities in the aeroplane are essentially small and have not been measured.

Let us consider what inferences we can draw from the foregoing experimental evidence, as to the probable behaviour of a stalled aeroplane in free flight. Obviously the information at our disposal is insufficient to allow a complete general solution of the motion, which moreover would require the manipulation of six simultaneous differential equations. Some simplifying assumptions are clearly necessary before progress can be made.

Suppose that the aeroplane, flying straight and steadily with wings level, receives an initial disturbance in the form of an impulsively applied angular velocity about some axis in the plane of symmetry, and is then left to itself. *Assume* that, until the motion has deviated seriously from the initial state, the incidence of the wings at the plane of symmetry and the velocity of the centre of gravity of the aeroplane will remain unchanged, except in so far as the latter is affected by lateral forces perpendicular to the plane of symmetry. *Assume* that the forces acting upon the aeroplane at any instant can be found by adding the forces which occur when the various components of the motions are occurring separately, as in the wind tunnel experiments

These assumptions are true for infinitesimal deviations from the initial condition, and are probably not far from true for finite deviations of moderate amount. With them general solutions can be obtained for infinitesimal disturbances or, alternatively, the motions following particular initial disturbances can be examined by successive integrations, each carried out over an interval of time so short that the forces at work do not alter appreciably. The former method gives information which probably applies, at least qualitatively, to finite disturbances, provided that the forces generated by the various motions are approximately proportional to the motions which produce them. The latter method has been used when this proportionality does not hold, as is the case with many of the motions with which we are concerned. Both methods have been extensively employed in England to calculate, from the results of wind tunnel experiments, the early stages of deviation from the straight flight of a stalled aeroplane, and from the study of a great number of such calculations it is possible to give, in relatively simple terms, an account of the way in which the peculiar spiral turn characteristic of stalled flight is generated, and to explain the failure of the controls to check it.

Fig. 7 shows the aeroplane in a steady straight glide with wings level and at 24° incidence;

we shall take this as our initial motion. OA is the direction of motion of the centre of gravity, OB perpendicular thereto. The vectors Oa , Ob and Os are copied from figs (4, 5 and 6) and indicate the characters of the moments generated by angular velocities about OA and OB and by sideslips to port, respectively. Angular velocities are supposed to be connected with the direction in which their axis is drawn from O as in a right-handed screw.

During the very early stages of deviation from the initial steady motion the effects of side forces on the aeroplane are of minor importance, so that the centre of gravity of the aeroplane continues substantially to move along the straight line OA . From this it follows that any right-handed rotation of the aeroplane about an axis such as OP' will involve a sideslip to port, whilst a similar rotation about say OP'' will involve a sideslip to starboard. Only when rotation occurs about Oa as axis will no sideslip result.

Suppose that the aeroplane, while flying steadily, suddenly receives a small angular velocity about the vertical axis OP . This angular velocity will have components about the axis OA and OB ; the former will generate a moment such as Oa , the latter a moment such as Ob . After a short time the aeroplane will have received an angular displacement about OP and will be sideslipping to port, so that a further moment such as Os will act upon it. Thus, very shortly after the initial angular velocity is imparted to the aeroplane, three component moments such as Oa , Ob , Os act upon it and rapidly generate angular velocity about an approximately horizontal axis. The result is to increase the angular velocity of the aeroplane and to cause its axis to swing from OP towards OA . This motion is the peculiar rolling plunge which leads to the spiral turn which I described at the beginning of my lecture.

At first therefore we have a rapidly increasing angular velocity, occurring about a rapidly changing axis. This will ultimately cause the axis of rotation to rise above OA to some such position as OP'' . As soon however as the axis of rotation passes OA further rotation about it reduces sideslip, and this, combined with the effects of side forces both aerial and gravitational, which are now becoming appreciable, reduces the sideslip to zero and then reverses it. A moment opposing the rotation, is now introduced and, provided the motion is still sufficiently well represented by our simple assumptions, this moment ultimately predominates and causes the aeroplane to swing back towards an even keel. The motion thus becomes oscillatory.

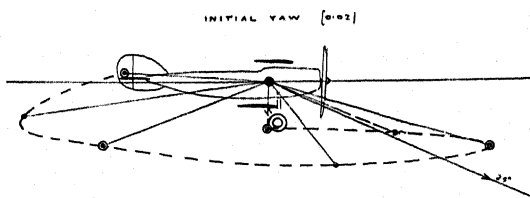


Fig. 8.

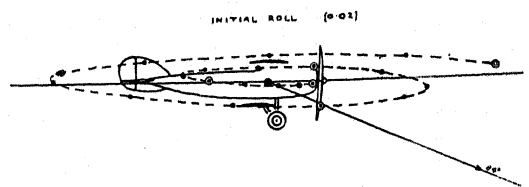


Fig. 9.

Diagrams showing the results of calculations upon the motion following initial disturbances from symmetrical flight in the form of angular velocities about axes in the plane of symmetry. The broken curve is the locus of the ends of vectors radiating from the centre of gravity and representing angular velocity. Time is indicated in seconds marked: — — — — —

Fig. 8 shows the result of a detailed calculation carried out upon a motion of this type, by the method of successive integrations over short time intervals³⁾. The initial small angular velocity is represented by a short vertical vector⁴⁾, and the broken curve traces the locus of the

³⁾ These calculations were not carried out upon the Bristol Fighter but upon an Avro aeroplane with exceptionally large fin and rudder.

⁴⁾ The magnitude of the initial angular velocity is such that the additional speed given to a wing tip by the angular velocity is one fiftieth the speed of steady flight.

end of this vector during the first $2\frac{1}{2}$ seconds following disturbance. The vector itself is drawn only at the end of each half second. Within one second from the initial disturbance the angular velocity of the aeroplane has been increased some five times and is occurring about a nearly horizontal axis. The vector then swings to the rear and rate of rolling is reversed. The motion in fact is oscillatory and of increasing amplitude.

Fig. 9 shows the motion following an initially impressed angular velocity of the same magnitude as in the previous figure, but acting about a horizontal axis. The motion, which in this case is followed for five seconds with points for every quarter second, is again oscillatory with increasing amplitude, but the first swing following the initial impulse is very much less than before.

Other calculations, not here shown, suggested that the oscillation following a small disturbance would not continue to increase indefinitely, but that it would settle down to a definite amplitude and return to that amplitude if deliberately increased beyond it. When this was discovered the pilots were asked to find out whether any such state of affairs could be observed upon the aeroplane for which the calculations were made. They found that, after carefully adjusting the lateral controls so as to eliminate any tendency to turn, the aeroplane did in fact take up a rather unsteady oscillation which continued indefinitely at a more or less constant amplitude, and even returned to that amplitude after any small deliberate disturbance. Great care was however required to obtain the necessary accurate setting of the controls; any appreciable asymmetry, such as a slight persistent tendency to turn in either direction, sent the aeroplane forthwith into a spiral dive. This experiment affords a valuable check upon the validity of the assumptions on which the calculations were based.

It still remains to explain the fact that the calculations show oscillatory motion, whilst experience of stalled flight shows that serious disturbances generally result in continuous spiral turns. In the first place the calculations assume an aeroplane which is in equilibrium when flying symmetrically, whereas in practice an aeroplane is seldom so accurately adjusted as not to have some definite tendency to turn in one direction rather than another. The experiment just quoted, for example, showed that the oscillatory motion did not occur unless the controls had been more accurately adjusted than would be usual in the experience of the average pilot. But again the calculations themselves show how a large disturbance can follow automatically from certain small initial disturbances. Thus a relatively small initial yawing impulse can, according to calculation, generate a motion which resembles the early part of the familiar spiral turn, and which will carry the aeroplane into attitudes for which the assumptions underlying the calculations are no longer sufficient. Although therefore we cannot, with the experimental data at our disposal, follow accurately the whole motion of the aeroplane as it departs from symmetrical flight and develops the steep spiral dive, yet we can explain how the peculiar plunges noted at the beginning of my paper arise and how violent motions closely resembling the earlier stages of the spiral turn, can be generated from relatively small initial disturbances.

An important conclusion to be drawn from these calculations, which is essential to an understanding of the action of the controls, is that any small angular velocity about an axis much inclined to the direction of motion is quickly followed by a much larger angular velocity about an axis nearly parallel to the direction of motion. Stated less precisely, but possibly more clearly: if one wing tip is at any instant moving slower than the other, it will very shortly be rapidly falling relative to the other.

We have next to consider the action of the controls. In Fig. 10 the longer vectors show the moment generated in normal flight by moving the ailerons up and down respectively through

10° from the neutral position. The shorter vectors show the moment generated by moving the rudder through its maximum travel of 30° from the neutral position. By suitably combining aileron and rudder movements within these limits a moment can be generated which is represented by any vector terminating within the rectangle.

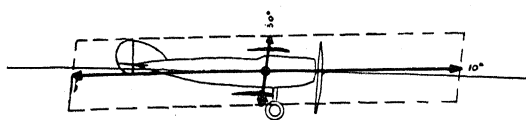


Fig. 10.

Moments generated in normal symmetrical flight by ailerons and rudders. Longer vectors relate to ailerons moved $\pm 10^\circ$. Shorter vectors to rudder moved through 30° .

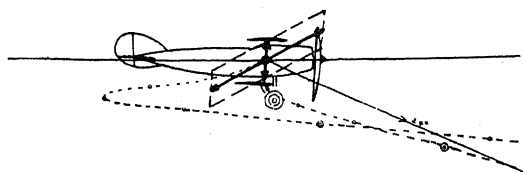


Fig. 11.

As Fig. 10 but relating to stalled flight at some 24° incidence.

Fig. 11 similarly shows the power of the controls in stalled flight — 24° incidence. The rudder and aileron powers are reduced and the axis about which the ailerons exert their moment is changed. It is this change of axis which is mainly responsible for the failure of the ailerons in stalled flight, for they generate angular velocity about an axis inclined to the direction of motion and this in turn generates moments about the direction of motion as axis, which are of opposite sign to those required. The ultimate direction of roll of the aeroplane will thus be in doubt and will depend upon the inclination to the direction of motion of the axis about which the ailerons exert their moment. The broken curve in this figure, which starts along the aileron vector, shows the locus of the ends of vectors representing angular velocities following an application of the ailerons; from it we see that, with these ailerons, the indirect effect just described overpowers the direct effect, with the result that within one second from the instant of application the aeroplane is rolling in the opposite sense to that intended.

The failure of the ailerons is even more apparent if they are conceived as being used to check one of the sudden spiral turns which we have been discussing. Subconsciously the pilot will set them to raise the wing tip which he sees to be falling, and this action will increase the angular velocity about the vertical which was the root cause of the motion he is trying to check. It is clear from the calculations we have discussed, and from many others not here shown, that no increase in aileron power which leaves unchanged the axis about which they exert their moment can make them effective in stalled flight. To make the ailerons effective we must bring this axis more nearly parallel to the direction of motion.

We may state the matter less precisely, but in a way more easily understood by the practical man. Conventional ailerons used on stalled wings retard the wing which they are set to raise, they should be altered so as to reduce this retardation.

Turn now to the rudder, this control might be used to prevent the aeroplane from turning about a vertical axis when ailerons are applied, but fig. 11 shows that its power on the aeroplane in question is insufficient to be of much help in this respect. If the rudder were very powerful it could be used in this way, but it could then be used to roll the aeroplane about a horizontal axis without the help of the aileron, for we have already seen how rotation about a vertical axis will generate large rolling moments about a horizontal axis. In other words if the rudder can be used to force the falling wing tip forwards, moments will soon be generated which will raise that tip.

The broken curve in fig. 11 which starts along the rudder vector, gives the calculated

locus of the ends of the vectors representing angular velocities following an application of the rudder: the rapid rolling motion which quickly follows is well shown.

If we compare figs. 5 and 11 we see that, when the aeroplane is revolving about the direction of motion, moments may be generated spontaneously, of sufficient magnitude to overpower the rudder, so that if the rudder is not applied until the spiral motion has well developed, even its full power will be insufficient to prevent the falling wing from being retarded. In these circumstances effective use of the ailerons would call for still further rudder power, and this not being available, their application will do more harm than good. The pilot is thus left with no means of preventing the spiral motion from developing further, unless of course he pushes his control column forward and allows the aeroplane to dive.

Consider now possible improvements in stalled control. Probably the simplest way of affecting an improvement in the average modern aeroplane is by increasing rudder power. Sufficient rudder power should always allow a pilot, experienced in stalled flying, to keep the aeroplane upon an even keel, or to restore it to an even keel from any condition. To test this matter an aeroplane was fitted with an excessively large rudder and flown by many pilots. The expected power of restoration to an even keel was obtained, but the general control was still not satisfactory, partly because it is impossible to obtain satisfactory control over two degrees of freedom by the use of one organ of control alone, and partly because the action of the rudder on roll is indirect and therefore delayed. Opinion in England is that some increase over the conventional rudder power is urgently needed, but that that increase need not be very large.

A second line of attack is to modify the ailerons so that when the wings are stalled they will give larger moments about an axis more nearly parallel to the direction of motion. One method of doing this is to provide a slot in front of the wing which opens when the aileron moves down; this in effect unstalls the wing to be raised. Fig. 12 shows an arrangement tried

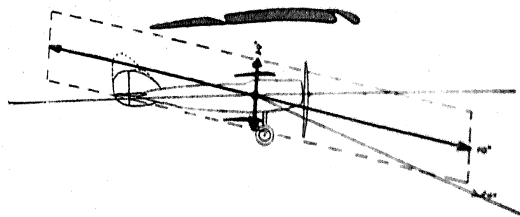


Fig. 12.

The slot-and-aileron control and the enlarged rudder of the Bristol Fighter. Vectors for same conditions as in Fig. 11.

experimentally upon an aeroplane which, when so fitted, could be controlled almost as easily in the stalled condition as in normal flight. The vector diagram is shown for the moments produced by this device. The defects of this method are that it leads to mechanical complication and to added weight and head resistance; it is also very sensitive to change in wing section, and its use with new wing sections must therefore be preceded by considerable experiment.

Another method of achieving a like result is to provide ailerons in the form of flaps beyond the wing tips, which normally lie along the direction of the relative wind and hence, when moved differentially, give a moment acting approximately about an axis parallel to the direction of motion. This method has the additional advantage that by it the tendency, indicated in fig. 5, for an angular velocity about the direction of motion to increase automatically can be eliminated. Ailerons of this form are used in the now well known Hill Tailless aeroplane and contribute largely to its remarkable controllability in stalled flight.

Other methods of achieving the same end occur to the mind, as for instance the deliberate increasing of the resistance of the wing to be depressed, but these have not yet, to my knowledge, been thoroughly tried in practice.

Apart from modifications to the controls, the problem may of course be attacked by altering the design of the wings so as to reduce or reverse the moments, indicated in figs. 4, 5, 6 and 7, which arise from sideslip or angular velocity. This line of attack has not been followed far in England.

I wish to add that only a fraction of the work I have been describing is my own. The whole is the result of co-operation between many departments and people, in which I have been privileged to play a part.

References

The experiments upon which this paper is founded are described in a number of reports of the British Aeronautical Research Committee. These are all discussed and summarized in report No. 1000 which contains references to the original reports, both published and unpublished. Papers on the subject have also been published in the Journal of the Royal Aeronautical Society for October 1923 and June 1926.

Sur les chocs dans le problème des trois corps

Par T. Levi-Civita, Rome

C'est vers la moitié du XVIII^{me} siècle qu'on a commencé à appeler tout court problème des trois corps le problème du mouvement de trois points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton.

CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER dans des pièces célèbres ¹⁾ ont établi, à peu près dans la forme cartésienne reproduite ensuite dans tout traité de mécanique céleste, les équations différentielles et leurs intégrales classiques: du centre de gravité, des aires et des forces vives. Par la simple mise au point de l'aspect analytique de la question, ils ont acquis pleine conscience de sa difficulté et de la nécessité de se contenter de méthodes et résultats d'approximation pour tirer des conséquences intéressantes au point de vue astronomique, notamment pour la théorie du mouvement de la Lune sur laquelle pointaient ces premiers essais.

On doit également à EULER la première solution particulière rigoureuse du problème. Dans une telle solution les trois corps restent toujours en ligne droite à des distances invariables, tandis que cette ligne droite tourne uniformément autour du centre de gravité du système. La vitesse angulaire de la droite étant donnée, on peut — c'est la découverte d'EULER — y fixer les trois points de manière que, pour chacun d'eux, la somme des attractions des deux autres soit justement équilibrée par la force centrifuge.

LAGRANGE, reprenant à nouveau l'étude du problème des trois corps, le partagea en deux étapes: dans la première il s'agit d'assigner à chaque instant la configuration du triangle formé par les trois corps, ou, si l'on veut, leurs distances mutuelles; dans la seconde (qui n'exige que des quadratures, dès qu'on a épuisé la première) on s'occupe de la position du triangle par rapport à un repère fixe. LAGRANGE est parvenu de la sorte à la conclusion que l'ordre différentiel du système peut être réduit à 6, et à déterminer explicitement tous les mouvements dans lesquels les distances mutuelles des trois corps gardent des rapports constants.

Retrouvant par cette voie les solutions particulières d'EULER, LAGRANGE en a décélé une autre classe où les trois corps forment toujours un triangle équilatéral. Sa recherche est mémorable à double titre. D'abord l'abaissement du système qui s'y trouve indiqué a donné l'essor à un très grand nombre de travaux (des géomètres du XIX^{me} siècle) visant à expliciter le système réduit sous des formes et par des calculs des plus en plus symétriques et condensés. Particulièrement remarquables à cet égard sont les contributions de HAMILTON, JACOBI, LIOUVILLE, LIE d'un côté, BRUNS et POINCARÉ de l'autre, aboutissant à la constatation, précisée et documentée à plusieurs points de vue, qu'on ne peut pas en général (c'est-à-dire si l'on n'introduit pas d'hypothèses particulières sur les masses des trois corps et sur les données initiales) abaisser le système au-dessous de l'ordre 6, signalé par LAGRANGE.

En second lieu les solutions rigoureuses qu'il a découvertes (et qu'il regardait à vrai dire comme une simple curiosité mathématique dégagée par son analyse pénétrante) constituent une famille importante de solutions périodiques et sont devenues, après HILL et la théorie générale due à POINCARÉ, le point de départ de nombreuses applications, ayant même un véritable intérêt astronomique, surtout pour les petites planètes du groupe dit trojan, qui avec le Soleil et Jupiter forment toujours un triangle sensiblement équilatéral.

¹⁾ Voir, pour les renseignements historiques et bibliographiques, l'intéressant volume de M. MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi* (Milano, Hoepli, 1919).

Depuis LAGRANGE jusqu'aux savants qui, dans le sens qu'on vient d'esquisser, se sont en quelque sorte rattachés à lui, les efforts des chercheurs avaient suivi plutôt une autre voie. Sur l'exemple de NEWTON lui-même et de ses premiers successeurs, ils se sont adressés surtout à l'intégration approchée des équations différentielles du problème des trois corps (ou même d'un nombre de corps quelconque) dans les circonstances qui intéressent de plus près le système solaire, où trois astres s'influençant mutuellement (sans être d'une manière appréciable influencés par les autres corps du système) sont représentés par les deux triplets typiques: Soleil, Jupiter, petite planète; ou bien Soleil, planète, satellite (par ex. Terre, Lune).

Sous cet aspect, qui peut d'ailleurs se rallier à la théorie générale des perturbations, il est à peine nécessaire de rappeler l'œuvre grandiose de LAPLACE et, parmi ceux qui ont réalisé des progrès substantiels, POISSON, GAUSS, encore une fois HAMILTON et JACOBI, AIRY, DÉLAUNAY, PLANA, LEVERRIER, suivis, dans une époque plus récente, par ADAMS, HILL, GYLDÉN, NEWCOMB, TISSERAND, POINCARÉ. Tel que LAPLACE, POINCARÉ marque une époque en mécanique céleste. Ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* ont rétabli le contact entre les spéculations les plus élevées de l'analyse moderne, si fécondement poussées par lui-même, et les aperçus et procédés de calcul employés par les astronomes, dont la bonté pour le but envisagé ne pouvait ni pourrait être méconnue.

J'ai nommé jusqu'ici des savants disparus, mais fort heureusement on peut citer encore M. BOHLIN parmi les devanciers de POINCARÉ et MM. ANDOYER, BIRKHOFF, BROWN, CHARLIER, MOULTON, WHITTAKER parmi ses nombreux continuateurs.

* * *

Les développements classiques, préparés pour satisfaire et aussi pour prévenir les besoins de l'astronomie, convergent, même très rapidement, pour un intervalle de temps assez petit: bien entendu c'est un petit toujours très respectable puisqu'il embrasse plusieurs siècles et parfois des milliers d'années. Mais on ne peut toutefois en tirer aucune prévision rigoureuse à longue échéance, c'est-à-dire pour des valeurs arbitrairement grandes du temps t , ou, en langage mathématique, pour $t \rightarrow \infty$.

Dans ce sens les démonstrations fameuses de LAGRANGE, de LAPLACE, de POISSON sur la stabilité du système du monde n'ont qu'une portée subordonnée aux traitements réductifs qu'on fait subir préalablement aux équations différentielles correspondantes.

D'ailleurs dans les cas usuels où il s'agit du mouvement d'un point soumis à l'action prépondérante d'un corps central et à l'action troublante d'une troisième masse petite ou éloignée, les séries employées couramment avaient montré dès le début l'inconvénient, dont je parlais tout à l'heure, pour ce qui se rapporte aux prévisions à longue échéance, dans une manière pour ainsi dire matérielle, c'est-à-dire par la présence de termes dits séculaires, qui ne restent pas bornés lorsque $t \rightarrow \infty$, notamment des termes linéaires en t (en première approximation), quadratiques (en seconde approximation), ou bien de la forme $t \sin \alpha t$, $t \cos \alpha t$ (α désignant une constante), etc.

On avait pensé que la présence de ces termes fût une accidentalité due à l'espèce de développement adopté; et on en a envisagé d'autres, purement trigonométriques, c'est-à-dire tels que t ne sort dans aucun terme des signes \sin ou \cos . Ceci a apporté des avantages au point de vue de la construction des tables astronomiques, mais au point de vue théorique ce n'est qu'un détour et même un détour dangereux. En effet les séries ordinaires, tout en n'étant pas utilisables pour t grandissant indéfiniment, convergent néanmoins jusqu'à ce que t ne dépasse pas une certaine limite. Les séries purement trigonométriques sont au contraire toujours divergentes comme l'a fait constater POINCARÉ, qui d'ailleurs ne s'est pas borné à

ce résultat négatif, mais a fait l'étude asymptotique de ces séries en y rattachant plusieurs conséquences importantes.

* * *

Mais revenons spécifiquement au problème des trois corps. Il n'est pas intégrable, c'est-à-dire résoluble par les moyens élémentaires du calcul, ni non plus réductible au-dessous d'un certain ordre différentiel qui donne, peut-on dire, la mesure de sa difficulté formelle.

Une pareille réduction a été regardée longtemps comme un préliminaire nécessaire et assez peu encourageant (il suffit de rappeler l'exclamation de CLAIRAUT «Maintenant intègre qui pourra!») de toute recherche aspirant à respecter complètement la rigueur mathématique.

Mais lorsque, dans la seconde moitié du siècle passé, l'esprit de la théorie des fonctions se fit ressentir dans toutes les branches des mathématiques, on commença à considérer aussi pour le problème des trois corps, à côté des déterminations quantitatives, les questions se rapportant à l'allure générale du mouvement. A ce point de vue, avant encore d'envisager la forme, plus ou moins régulière ou capricieuse des trajectoires, il y a lieu de s'adresser ces deux demandes: Est-ce que le mouvement se poursuivra indéfiniment, ou qu'il va être brusquement interrompu par un choc? Et, dans le premier cas, les trois corps resteront-ils à distance finie les uns des autres, ou quelqu'un s'en ira à l'infini?

C'est M. PAINLEVÉ qui, dans ses célèbres Leçons de Stockholm²⁾, a proposé l'étude mathématique du premier problème en établissant quelques importantes propositions préliminaires et avançant des aperçus qui ont été ensuite pleinement confirmés par d'autres chercheurs.

Dès qu'on peut exclure les chocs, une représentation analytique du mouvement devient possible, et même aisée, comme l'a montré M. PAINLEVÉ, les coordonnées des trois corps pouvant être développées en série de polynômes de la variable t .

D'ailleurs le champ envahi par le mouvement et son allure quand le temps croît indéfiniment ont été le sujet de recherches de HILL³⁾, de M. BOHLIN⁴⁾ et de M. CHAZY.

Les premiers ont introduit, à partir de l'intégrale des forces vives, la notion, simple mais précieuse, du lieu de force vive nulle en illustrant les remarquables conséquences géométriques auxquelles on est conduit.

M. CHAZY⁵⁾ dans un mémoire récent a pu démontrer que (même pour le problème des n corps) le rapport $\frac{r}{R}$ entre la plus petite et la plus grande des distances mutuelles tend toujours vers une limite finie lorsque t croît indéfiniment. Si en surplus l'énergie totale E du système (constante fournie directement par les circonstances initiales du mouvement) est ≥ 0 , on peut en tirer que: ou bien tous les trois corps s'éloignent indéfiniment pour $t \rightarrow \infty$, en décrivant des orbites (asymptotiquement) hyperboliques ou paraboliques; ou bien le problème tend de plus en plus à se partager en deux problèmes élémentaires des deux corps. C'est ce que fait prévoir l'intuition après avoir reconnu que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r}{R} = 0.$$

En effet désignons par O, P, P' les trois corps et supposons que OP correspond au côté minimum r du triangle. Puisque OP , pour t assez grand, devient négligeable vis-à-vis

²⁾ Paris, Hermann, 1897.

³⁾ Acta Math., T. 8, 1886, pp. 1—36; ou bien *Collected Mathem. Works*, vol. I, pp. 243—270.

⁴⁾ Acta Math., T. 10, 1887, pp. 109—130.

⁵⁾ Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), T. XXXIX, 1922, pp. 29—130.

d'une et par suite aussi de l'autre distance du troisième corp P' , il est bien clair que tout va se passer asymptotiquement:

pour P' , comme si les deux masses de O et de P coïncidaient dans un même point géométrique (qu'on peut identifier indifféremment avec O , ou bien avec P , ou bien avec leur centre de gravité G);

pour le couple O, P , comme s'il fût sensiblement soustrait à l'action troublante de P . Voilà les deux problèmes des deux corps auxquels on se trouve reconduit à la limite.

Au point de vue astronomique, représentons-nous le point O comme corps central (soleil), qui fournit au système la chaleur et par là l'énergie dans ses manifestations multiformes, et soit P' l'astre (planète ou satellite) sur lequel on fixe l'attention. Dans les cas $E > 0$, ou $E = 0$ qu'on vient d'envisager, les habitants (éventuels) de P' doivent toujours s'attendre la fin de leur monde: tout à coup, si un choc intervient; par cessation progressive de toute forme de vie, à cause de l'éloignement de la source de chaleur et transissement général, lorsque c'est le régime asymptotique qui va s'établir.

Le cas où l'énergie totale E est négative a été également abordé par M. CHAZY qui a obtenu quelques résultats particuliers; mais ce cas est beaucoup plus difficile, et, même en excluant les chocs comme auparavant, il y a lieu de retenir d'une manière générale presque seulement que les trajectoires se développent toutes dans une région finie, sans pouvoir d'ailleurs prédire quel est le domaine (de l'espace des phases) pratiquement rempli par un mouvement générique de cette catégorie. Bien entendu elle comprend aussi des solutions exceptionnelles (périodiques, asymptotiques, doublement asymptotiques, etc.) dont l'étude est bien avancée, grâce aux théories classiques de POINCARÉ et aux contributions pénétrantes qu'on doit à M. BIRKHOFF⁶⁾.

* * *

Ces déductions, soit qu'il s'agisse de résultats bien nets comme dans l'hypothèse $E \geq 0$, ou de quelques lemmes préparatoires, comme il arrive pour E négatif, sont toujours essentiellement subordonnées à l'hypothèse que n'interviennent pas de chocs. L'étude préalable de ce phénomène s'impose donc à tout égard.

Etant donné l'ordre de grandeur des vitesses des corps célestes (comprises vraisemblablement entre 10 et 300 km/sec.) et la matière dont ils sont formés, tout à fait comparable à celle de notre terre, il paraît bien fondé d'attribuer aux chocs un caractère catastrophique, entraînant, si non la destruction de la matière, des morcellements et des fusions qui annulent toute continuité non seulement dans la vie intérieure, s'il y en a, mais même à l'individualité mécanique des astres qui se choquent, après une collision.

Ce point de vue presque unanime des astronomes trouve un excellent appui dans l'apparition et l'extinction des *Novæ*, envisagées comme effets de choc.

Quoi qu'il en soit quant aux effets, dans le problème des trois corps il peut se présenter des chocs binaires, ou même une collision générale. Il est évident que ce dernier cas est infiniment moins probable qu'un choc binaire, mais il y a plus. Comme l'a remarqué WEIERSTRASS (sans toutefois le publier) dès 1888⁷⁾ et comme il a été retrouvé par M. SUNDMAN⁸⁾ pour que l'éventualité d'une collision générale puisse se présenter, il faut que le moment (vectoriel) K des quantités de mouvement du système, ou, si l'on veut, ses trois composantes (constantes des aires) soient nuls; il va sans dire qu'un tel caractère ressort

⁶⁾ Rend. del Circolo Mat. di Palermo, T. XXXIV, 1915, pp. 265—334; Transactions of the American Math. Society, Vol. XVIII, 1917, pp. 199—300; Acta Math. T. 43, 1920, pp. 1—119.

⁷⁾ Voir MITTAG-LEFFLER, *Zur Biographie von Weierstrass*, Acta Math., T. 35, 1911, p. 30.

⁸⁾ Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, T. 34, n° 6 (Helsingfors, 1907).

immédiatement des données (circonstances initiales du mouvement). Dès que K ne s'annule pas (et il en sera bien ainsi, en général) il est impossible que les trois corps se choquent à la fois. Quelles peuvent être alors les singularités du mouvement? Puisque les forces (attractions mutuelles suivant la loi de NEWTON) restent finies et continues tant que les trois corps sont distincts, il n'y a pas de raison pour que le mouvement présente quelque singularité analytique dans les conditions susdites. En effet M. PAINLEVÉ a prouvé en toute rigueur que, à partir d'un instant t , et des conditions initiales données, ou bien le mouvement se poursuit régulièrement pour t croissant indéfiniment, ou bien il y a un premier instant t_1 pour lequel la limite de la plus petite des distances mutuelles est zéro.

Si l'on se pose dans le cas général où le vecteur constant K ne s'annule pas, on peut ajouter⁹⁾ d'après la remarque de tout à l'heure, qu'il s'agit assurément d'un choc binaire, dans le sens que deux des trois corps, soit O et P tendent, pour $t \rightarrow t_1$ à coïncider dans un même point géométrique, tandis que P' tend lui aussi vers une position limite à distance bien déterminée (et non nulle) des deux autres masses.

On constate donc effectivement — mais une analyse détaillée s'imposait au début — que les scrupules mathématiques n'entraînent dans ce cas aucune complication. C'est que le simple bon sens fait prévoir arrive: tout marche régulièrement tant que les trois corps sont distincts; pas de collision à trois, sauf dans un cas exceptionnel qui se reconnaît sur les données et peut être étudié pour son compte; reste seule à craindre l'éventualité d'un choc binaire, d'où la grande importance de pouvoir décider, d'après la simple inspection de l'état de mouvement initial, si un tel événement va, ou plutôt ne va pas se produire.

C'est la question fondamentale posée par M. PAINLEVÉ qui avait annoncé comme probable qu'on puisse la trancher en formant deux relations (transcendentes) entre les positions et les vitesses initiales, caractéristiques du choc, ces deux relations se réduisant à une seule dans le cas particulier où le mouvement des trois corps a lieu dans un plan (chose). Il n'est pas difficile de se rendre compte d'un tel résultat par une simple évaluation de constantes.

En effet, si l'on envisage par exemple le mouvement relatif de P, P' , par rapport à O , on peut naturellement le regarder défini par 6 équations du second ordre exprimant les six composantes des accélérations (relatives) de P, P' en fonction des positions. Une solution quelconque d'un tel système est caractérisée par les données initiales, c'est à dire par 12 constantes a (6 coordonnées de P, P' par rapport à O et six composantes des vitesses).

Un choc binaire, disons entre O et P , se traduit par le fait que la trajectoire de P passe par O . Or, d'après les équations différentielles du mouvement, les expressions des coordonnées x, y, z de P (rapportées à O) dans l'intégrale générale sont de la forme

$$x = x(t|a), y = y(t|a), z = z(t|a).$$

Pour qu'un choc arrive il faut et il suffit qu'il existe un instant t_1 où les trois équations

$$x(t_1|a) = 0, y(t_1|a) = 0, z(t_1|a) = 0$$

sont satisfaites à la fois. En éliminant t_1 , il en résulte justement deux relations entre les a .

Cette considération formelle pourrait être rendue après coup parfaitement rigoureuse et s'appuyant sur les théorèmes d'existence des équations différentielles, s'il s'agissait d'un choc

⁹⁾ J'ai tâché de réduire les démonstrations à leur plus grande simplicité formelle et logique dans le Chapitre I du mémoire *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Acta Math., T. 42, 1911 pp. 99 — 144.

de valeurs où le système différentiel se comporte régulièrement au point de vue analytique. Mais c'est le contraire qui arrive. Les équations du mouvement, dans une quelconque de leurs formes classiques, présentent des singularités évidentes lorsque deux des trois corps tendent à coïncider, à cause de la force d'attraction qui devient alors infinie. La présomption de M. PAINLEVÉ, que les choses finissent pour se passer comme si tout restait régulier, a pu paraître hardie, puisqu'il y avait lieu de redouter dans l'analyse des chocs des difficultés très sérieuses, comparables par exemple à celles qu'on rencontre dans l'étude des équations différentielles, même linéaires, dès qu'on dépasse le type ordinaire de FUCHS.

Toutefois une telle méfiance s'est effacée peu à peu, et on est enfin parvenu à justifier d'une manière complète les idées de M. PAINLEVÉ.

* * *

D'abord N. THIELE, astronome danois, dans ses recherches ayant pour but la construction d'orbites particulières moyennant des quadratures mécaniques, effectua la première régularisation des chocs binaires dans le cas particulier du *problème restreint*.

Vous m'excuserez si je m'arrête un instant à rappeler ce qu'on entend par problème restreint, d'après JACOBI.

Supposons que la masse de P soit tout à fait négligeable vis-à-vis de celles de O et de P' . Alors le mouvement de ce couple n'est pas troublé par P et on est par conséquent réduit, pour O, P' , au problème élémentaire des deux corps résolu par NEWTON. Faisons l'hypothèse particulière que ce mouvement soit le plus simple compatible avec l'attraction mutuelle, c'est-à-dire que O et P' tournent uniformément autour de leur centre de gravité, G , avec une telle vitesse angulaire que pour chacun d'eux la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction.

Dans ces conditions notre problème se réduit à celui du mouvement du point matériel P sous l'attraction newtonienne des deux centres (mobiles) O et P' qui tournent uniformément autour du point fixe G .

Bornons-nous pour simplifier au mouvement plan et rapportons P à des axes rectangulaires Gxy invariablement liés au couple O, P' et par suite uniformément tournants. Avec un tel repère, les équations du mouvement de P admettent l'intégrale, dite de JACOBI,

$$\frac{1}{2} v^2 - U = C, \quad \dots \dots \dots (1)$$

où v est la vitesse de P (relative aux axes susdits) et U désigne la fonction des forces (y comprise la centrifuge).

Par un choix convenable d'unités on peut retenir

$$U = \frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} - \frac{1}{2} r^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

où μ et $\nu = 1 - \mu$ désignent respectivement les masses de P' et de O ; $r = \overline{OP}$, $\Delta = \overline{P'P}$, $r = \overline{GP}$.

Les chocs possibles regardent ici le mouvement de P qui peut tomber sur O ou sur P' .

Dans les équations différentielles du mouvement en coordonnées cartésiennes figurent des termes qui deviennent infinis comme $\frac{1}{r^2}$ et $\frac{1}{\Delta^2}$ au voisinage des centres O et P' . N. THIELE, pour ne pas être gêné par ces infinis dans ses calculs numériques eut recours à une transformation en coordonnées elliptiques, associée à un changement de variable indépendante, moyennant lesquels toute singularité disparut¹⁰⁾.

¹⁰⁾ Astr. Nachrichten, B. CXXXVIII, 1895, pp. 1—10.

THIELE avait sans doute reconnu toute l'importance d'une telle régularisation préalable au point de vue pratique, pour la détermination de proche en proche d'arcs de trajectoires et pour la déduction par tâtonnement d'orbites périodiques. Mais il n'a jamais considéré sa transformation en mathématicien pour en tirer des conséquences théoriques. Cet aspect de la question a été examiné un peu plus tard sous l'influence de M. PAINLEVÉ.

J'ai montré en 1904¹¹⁾ que, justement pour le problème restreint, on peut faire disparaître toute singularité par un changement tout à fait élémentaire des variables (de la forme $x + iy = (\xi + i\eta)^2$, à l'égard des coordonnées), et cela sans altérer la forme canonique des équations. J'en ai tiré la condition explicite de choc, précisément sous la forme annoncée comme très probable par M. PAINLEVÉ.

Peu après M. BISCONCINI¹²⁾ sous réserve qu'une certaine vitesse angulaire reste finie (hypothèse qui n'a rien de restrictif au point de vue mécanique, mais qu'il restait à faire ressortir logiquement des équations du mouvement) a pu également expliciter deux relations fournissant la condition d'un choc binaire dans le problème général, ce qui acheva de confirmer les prévisions de M. PAINLEVÉ.

Je reviendrai un peu plus avant sur la signification précise et les bornes de ces résultats. Permettez-moi en attendant d'arriver au clou de la régularisation et de ses conséquences, c'est-à-dire au mémoire fondamental de M. SUNDMAN couronné par l'Académie des Sciences de Paris¹³⁾.

M. SUNDMAN a effectué d'une manière tout à fait élémentaire (bien qu'un peu lourde et sans conservation des propriétés formelles appartenant aux équations différentielles de la dynamique) la régularisation complète (pour $K \neq 0$) du problème général des trois corps, d'où en particulier la justification rigoureuse de la circonstance qualitative admise provisoirement par M. BISCONCINI comme hypothèse de travail.

Mais ce qui donna à juste titre le plus grand éclat aux recherches de M. SUNDMAN c'est la conclusion mémorable qu'il sut en tirer que, dans une solution quelconque, les coordonnées des trois corps et le temps t sont des fonctions holomorphes d'un paramètre τ pour toutes les valeurs réelles de ce paramètre qui correspondent biunivoquement à toutes les valeurs réelles de t . Positions et temps peuvent donc être représentés par des développements en séries toujours convergents.

Pour bien comprendre la nature et la portée d'une telle proposition il convient de la rattacher au développement analogue qui avait été précédemment signalé par M. PAINLEVÉ. La validité de ce dernier est essentiellement subordonnée à l'absence de chocs. M. SUNDMAN au contraire a ôté toute restriction et fourni par son développement un algorithme permettant de calculer à tout instant la position des mobiles, non seulement jusqu'à un choc éventuel, mais même au delà. Qu'est-ce que signifie l'au delà d'un choc? Etant donné l'aspect de destruction d'un, ou même de deux mondes, sous lequel un choc est conçu par les astronomes, l'au delà pourrait nous paraître un rêve mystique, ou plutôt une simple fiction mathématique provenant d'une continuation analytique se présentant comme possible pour $t > t_1$ (si t_1 désigne l'instant du choc). En réalité, comme l'a reconnu mon Collègue, M. ARMELLINI¹⁴⁾ une telle continuation analytique n'est pas dépourvue d'interprétation physique. Elle traduit ce qui se passerait si les corps qui se choquent étaient des sphères parfaitement élastiques rebondissant après la rencontre.

¹¹⁾ Acta Math., T. 30, 1906, pp. 305—327.

¹²⁾ Acta Math., T. 30, 1906, pp. 49—92.

¹³⁾ Ibidem, T. 36, 1912, pp. 105—179.

¹⁴⁾ Rend. Acc. Lincei, Vol. 24₁ (1915), pp. 184—190.

Il en est bien ainsi pour les molécules d'un gaz d'après la théorie cinétique, mais pour les problèmes astronomiques il faut pouvoir isoler la phase antérieure au choc et l'instant d'un tel événement.

Quoi qu'il en soit, à M. SUNDMAN revient le mérite d'avoir dans un certain sens résolu le fameux problème qui avait résisté pour deux siècles aux efforts des plus illustres géomètres. Je viens de dire résolu dans un certain sens. Voici pourquoi.

Nul doute que la résolution des problèmes s'entend maintenant en analyse dans un sens très large: tout algorithme est bon pourvu qu'il conduise au but. Mais, lorsqu'il s'agit d'une question mécanique, on doit prétendre aussi d'être à même d'en prévoir, ne fût-ce qu'en concept, par des opérations mathématiques déterminées (et en nombre fini) les traits essentiels: forme des trajectoires, allure générale du mouvement, et, dans notre cas, d'une manière essentielle, chocs éventuels. La solution de M. SUNDMAN supprime tout caractère singulier des chocs et par là même toute distinction entre mouvements se poursuivant régulièrement et mouvements catastrophiques au bout d'un temps fini.

La contribution de M. SUNDMAN, si remarquable qu'elle soit, est donc loin d'épuiser la question. Mais, comme il arrive souvent après un progrès substantiel, elle a produit et va sans doute stimuler de nouveaux efforts.

* * *

Ont suivi d'un côté des perfectionnements formels, se rapportant à la manière d'effectuer la régularisation autour des chocs binaires. M. SUNDMAN y était parvenu d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre non indifférent d'auxiliaires parasites et en sortant du cadre des équations de la Dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'on n'a plus le droit d'appliquer (du moins sans discussions laborieuses) au système régularisé, ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la mécanique analytique.

Pour le problème plan on a pu aisément parvenir à une véritable régularisation dynamique en généralisant (avec traitement symétrique des trois corps) la transformation ponctuelle

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2$$

employée pour le problème restreint¹⁵⁾.

Le problème dans l'espace a longtemps résisté à mes efforts, tant que j'essayais de régulariser par de simples changements de coordonnées. Les transformations canoniques usuelles se rattachant au mouvement elliptique ne régularisent non plus. Mais on peut en trouver d'analogues: une notamment bien simple, suggérée par le mouvement parabolique, rendant tout holomorphe au voisinage d'un choc binaire.

Ce n'est — faut-il le répéter — qu'un perfectionnement formel permettant de suivre sans effort les quelques passages qui amènent l'introduction des nouvelles variables canoniques et régularisantes¹⁶⁾.

* * *

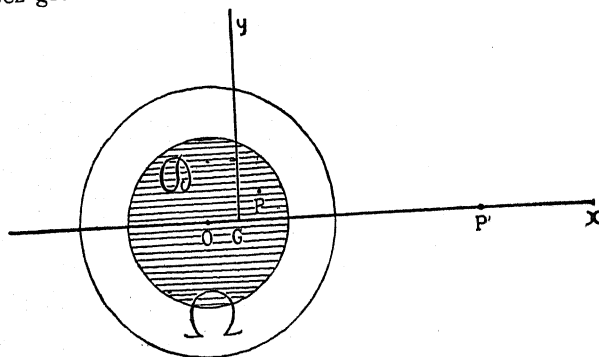
D'autre côté — et c'est de beaucoup le plus important — reste ouverte la question des chocs.

Pour qu'on puisse mieux saisir le peu qui est déjà acquis et la difficulté essentielle à surmonter, je me rapporterai exclusivement au problème restreint,

¹⁵⁾ Rend. Acc. Lincei, Vol. 24, 1915, pp. 61—75, 235—248, 421—433, 485—501, 553—569.

¹⁶⁾ Voir le mémoire cité à la note 7), ou bien mes conférences tenues en Espagne. L'édition catalane (Barcelona, Institut d'Estudis catalans, 1922) a été soignée par M. TERRADAS. Ont paru ensuite une édition italienne (Bologna, Zanichelli, 1924) et une traduction allemande (Berlin, Springer, 1924).

et même à des circonstances initiales relatives au point P telles que la constante C de l'intégrale (1) soit négative et assez grande.



Sous une telle hypothèse la considération des régions bornées par les courbes (de vitesse nulle)

$$U = -C \quad \dots \quad (3)$$

assure que, si P se trouve initialement à l'intérieur d'un certain oval Ω (peu différent d'une circonférence pour $|C|$ assez grande) renfermant le point O et excluant P' , il ne peut jamais sortir de Ω .

Dès lors le seul événement à redouter c'est un choc avec le centre O , et tout revient à former la condition (unique, comme on l'a déjà remarqué dès qu'il s'agit de mouvement plan) pour que P aille justement à passer par O . Je vous ai dit que cette condition a été obtenue sous forme explicite mais pas encore suffisante à épuiser la question. Voici pourquoi. A fin de pouvoir dégager des théorèmes fondamentaux d'existence et construire effectivement la condition de choc sous forme d'une relation uniforme entre la position et la vitesse initiales de P , il a fallu borner ultérieurement la région du plan à laquelle on se rapportait, en supposant P intérieur non seulement — ce qui va de soi — à l'oval Ω correspondant à la valeur choisie pour C , mais encore — ce qui est fâcheux, comme je vais l'expliquer — à un certain domaine D autour de O . Dans D la dite condition peut être présentée sous la forme

$$\dot{\phi} = f(\rho, \phi, C) \quad \dots \quad (4)$$

$\rho^2 = r$, et ϕ étant les coordonnées polaires de P par rapport à O comme pôle et OP' comme axe polaire, $\dot{\phi}$ la vitesse angulaire de P , et f une fonction holomorphe des arguments indiqués, périodique par rapport à ϕ .

Si l'équation (4) n'est pas satisfaite, on est parfaitement sûr qu'il n'y aura pas de choc ni avant, ni après l'instant initial, tant que le mobile ne sort pas du domaine D ; mais s'il en sort pour y rentrer, ces rapprochements nouveaux pourraient devenir dangereux.

La simple constatation que (4) n'est pas vérifiée permettrait, notamment, de rassurer l'humanité lorsque une issue catastrophique aurait l'apparence d'être imminente. C'est donc quelque chose, mais ce n'est pas tout, ni même le plus intéressant.

Que va-t-il arriver lorsque P , qui reste nécessairement à l'intérieur de Ω , sorte de D ? On n'en sait rien; ou plutôt on en sait déjà assez ¹⁷⁾ pour devoir en conclure qu'on est encore à mi-chemin. En effet on a constaté sur un exemple élémentaire que la chance de sorties de D , suivies de rentrées et de rapprochements au centre O de plus en plus serrés, n'est pas seulement une éventualité abstraite, mais peut réellement se présenter. D'après cela la circonstance

¹⁷⁾ Loco citato ¹¹⁾, § 6.

que l'équation (4) ne soit pas vérifiée a seulement une valeur temporaire. Elle ne suffit pas à exclure à longue échéance ni un choc mathématique (coïncidence exacte de P avec O), ni encore moins un choc physique, en entendant par choc physique un simple rapprochement de deux corps au-dessous d'une certaine limite δ_0 .

Evidemment, eu égard à la circonstance que les corps célestes ne sont pas des points matériels, mais possèdent des dimensions finies, la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement se poursuive régulièrement c'est que la distance de leurs centres de gravité (qui se meuvent exactement d'après la loi de Newton) reste supérieure à un certain δ_0 (à fixer d'avance d'après la forme et les dimensions des corps).

Dans cette direction on ne possède, que je sache, aucun résultat concret.

Pour notre cas particulier il s'agirait de remplacer O par un petit cercle σ_0 (de rayon δ_0) autour de O , et de fixer, si non les conditions nécessaires et suffisantes, tout au moins quelque classe de conditions initiales pour lesquelles il soit certain que la trajectoire de P ne sillonne jamais le petit cercle σ_0 .

Lorsque, C étant donné, P reste intérieur à l'ovale Ω correspondant, il est bien clair que, si le troisième corps P' n'existait pas, les trajectoires de P se réduiraient aux ellipses képlériennes. D'autre part l'effet général de l'attraction du corps extérieur P' est d'augmenter la distance moyenne de P à O , ainsi qu'il résulte d'une règle classique de GAUSS¹⁸⁾. La présence du troisième corps P' paraît d'après cela antagoniste à une chute de P sur O , et partant favorable à la sûreté du mouvement troublé dans les cas où pour le mouvement non troublé, les circonstances initiales donneraient lieu à des orbites elliptiques assez proches à la forme circulaire.

Ce n'est évidemment qu'une intuition mécanique, qui pourrait même être trompeuse puisqu'elle se rapporte à un effet moyen. Toutefois c'est une indication assez signifiante pour qu'on soit tenté de la soumettre au crible d'une analyse rigoureuse, en entreprenant l'étude asymptotique de la classe de solutions susdites.

* * *

La rédaction du présent mémoire m'en a inspiré le désir et j'y ai réfléchi pendant ces dernières semaines.

On part naturellement d'un système différentiel préalablement régularisé. Toute réduction faite, on est conduit à deux équations canoniques

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dots \dots \dots (5)$$

où soit la variable indépendante φ , soit les inconnues x, y sont des éléments osculateurs des trajectoires du point P : tant que celles-ci ne diffèrent pas beaucoup de cercles, φ est un angle qui oscille (faiblement) autour de POP' et croît toujours pendant le mouvement¹⁹⁾, servant à fixer la position de P dans sa rotation autour de P ; x et y sont des petits paramètres s'annulant avec l'excentricité ϵ de l'ellipse osculatrice et caractérisant à la fois cette excentricité et l'orientation du grand axe. H est une fonction de x, y, φ holomorphe par rapport à x, y pour $|x|, |y|$ assez petits, et périodique par rapport à φ . Elle dépend en outre d'une petite constante ϵ provenant de C , et en est également fonction holomorphe pour $|\epsilon|$ assez petit. En posant $\epsilon = 0$, on a $H = 0$, c'est-à-dire x, y constants. Lorsque ϵ n'est pas zéro, il s'agit de prouver que, sous une convenable limitation initiale, x, y restent même pour $\varphi \rightarrow \infty$ au-dessous (en valeur absolue)

¹⁸⁾ Voir n° 12 de la première des conférences citées sous ¹⁶⁾.

¹⁹⁾ Il s'agit par conséquent d'orbites (absolues) directes, puisque P tourne dans le même sens que P' .

d'une limite bien déterminée suffisante à garantir que la trajectoire de P reste toujours assez éloignée de O .

J'ai déjà trop abusé de votre attention bienveillante pour que je puisse songer à vous entretenir maintenant sur la démonstration de cette propriété. Je voudrais seulement la rattacher à un critère formulé récemment par M. BIRKHOFF à la suite de ses recherches pénétrantes sur les solutions périodiques²⁰). Il me faut prémettre pour cela qu'il y a lieu de distinguer entre les systèmes dynamiques propres, tels qu'on les rencontre en mécanique analytique, et les modèles qu'on fait intervenir en mécanique statistique.

Ces derniers sont quasi-ergodiques; c'est-à-dire que toutes (ou presque toutes) leurs solutions passent et repassent si près que l'on veut de tout état de mouvement (ou point dans l'espace des phases) pour lequel l'énergie garde sa valeur initiale.

Au contraire, d'après M. BIRKHOFF, la caractéristique principale des phénomènes dynamiques non collectifs, ni quantifiés est la suivante:

Toute trajectoire qui ne s'éloigne pas à l'infini est elle-même périodique ou, tour à tour, va s'approcher autant que l'on veut d'orbites périodiques.

Dans le cas du système (5) il en résulte justement²¹) que les orbites initialement assez proches à des circonférences restent toujours assez éloignées de O , la distance minimum pouvant être limitée d'avance en fonction des données initiales. On est partant à même de constater par la simple inspection de ces données que, dans les cas ordinaires, il n'y a aucun choc à redouter.

J'ose espérer que vous vous rejouirez de cette conclusion tranquillissante; j'en ai même la certitude, puisque vous y voyez la fin de mon trop long exposé.

²⁰) *Stabilità e periodicità nella dinamica* (conférence tenue au séminaire mathématique de l'Université de Rome) Periodico di Matematica, (VI) Vol. VI, 1926, pp. 262-271.

²¹) Je me propose de revenir prochainement sur ce point important en développant soit la déduction du système différentiel (5), soit la démonstration des propriétés énoncées et leurs conséquences.

II.

SEKTIONSVORTRÄGE

A. SEKTION I. ALLGEMEINE MECHANIK

Vorsitzende in den Sitzungen die Herren
Plancherel-Zürich, Timoshenko-Wilkinsburg,
Levi-Civita-Rom, Hahn-Nancy

Sur le potentiel thermodynamique interne des lignes élastiques

Par L. ROY, Toulouse

I. La plupart des auteurs définissent géométriquement une ligne élastique par son axe longitudinal $M_1 M_2$, en chaque point M duquel ils considèrent, en outre, un trièdre trirectangle $M u v w$ lié à la matière, dont l'un des axes, $M u$ par exemple, est tangent à l'axe longitudinal. La déformation de chaque tronçon de ligne étant supposée infiniment petite, on néglige les petites variations des angles de chaque trièdre. La configuration de la ligne, à l'instant t , est alors complètement définie par quatre paramètres: les coordonnées x, y, z de M et un paramètre angulaire fixant l'orientation du trièdre (M) autour de la tangente $M u$ à l'axe longitudinal. Ceux-ci peuvent être regardés comme des fonctions continues de t et d'une variable géométrique: l'abscisse curviligne $\widehat{M_1 M} = s$ de M (variables d'Euler s, t), ou bien l'abscisse curviligne $\widehat{m_1 m} = \omega$ de la position m qu'occupait le point matériel M sur l'état primitif (variables de Lagrange ω, t). Pour abréger, nous dirons qu'une telle ligne est à quatre paramètres.

Dans leur *Théorie des corps déformables*¹⁾, MM. COSSERAT ont développé une théorie plus générale, où l'orientation de chaque trièdre (M) par rapport à l'axe longitudinal est laissée arbitraire; nous dirons qu'une telle ligne est à six paramètres, puisqu'il faut alors trois paramètres angulaires pour fixer l'orientation de chaque trièdre (M) autour de son sommet M .

II. En attendant la publication d'un travail étendu *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes*, actuellement à l'impression dans les *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, nous avons déjà résumé ailleurs quelques-uns de nos résultats²⁾. Nous nous proposons ici de développer quelques considérations sur le calcul du potentiel thermodynamique interne linéaire, qui apparaît comme une fonction des déformations de la ligne au point considéré. Définissons tout d'abord ce que nous entendons par là, en considérant déjà le cas d'une ligne à six paramètres et soient alors $(\xi, \eta, \zeta) d\omega$ et $(p, q, r) d\omega$ les composantes suivant les axes mobiles $M u v w$ de la translation et de la rotation infiniment petites qu'il faudrait imprimer, à l'instant, au trièdre (M) pour l'amener à coïncider avec le trièdre infiniment voisin (M'); $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) d\omega$ et $(p_0, q_0, r_0) d\omega$ les éléments analogues relatifs à l'état primitif. Les quantités

$$\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0; p - p_0, q - q_0, r - r_0, \dots \dots \dots (1)$$

fonctions de ω, t sont les six déformations de la ligne à l'instant t , en ce sens qu'elles définissent complètement la déformation de la ligne dans son état actuel par rapport à son état primitif.

Dans le cas d'une ligne à quatre paramètres dont l'axe $M u$ est tangent à l'axe longitudinal, on a

$$\xi_0 = 1, \xi = \frac{ds}{d\omega}, (\eta_0, \zeta_0; \eta, \zeta) = 0,$$

de sorte que les six déformations ci-dessus se réduisent à quatre

$$0; p - p_0, q - q_0, r - r_0, \dots \dots \dots (2)$$

¹⁾ Hermann éditeur, Paris 1909.

²⁾ L. ROY, C. R. des séances de l'Acad. des Sc. Paris t. 182, 1926: *La propagation des ondes sur la ligne élastique à six paramètres*, p. 569; *La propagation des ondes sur la ligne élastique à quatre paramètres*, p. 684; *La loi adiabatique dynamique relative aux lignes élastiques*, p. 839.

où désignant la dilatation $\frac{ds-dw}{dw}$ de l'axe longitudinal comptée à partir de l'état primitif.

Cela posé, la déformation élastique de chaque tronçon de ligne étant supposée très petite, on peut prendre comme expression du potentiel un polynôme du second degré des déformations (1) ou (2), dont les coefficients dépendent de la nature de la substance et de la forme de la section droite de la ligne. Ce sont les *coefficients d'élasticité de la ligne*. Si l'on s'en tient là, la théorie de la ligne élastique est complètement autonome, en ce sens qu'elle n'emprunte rien à la théorie de l'élasticité des milieux à trois dimensions. Mais de sérieuses difficultés surgissent si l'on veut rechercher comment ces coefficients dépendent de la forme de la section et des coefficients d'élasticité de la substance. A cet effet, le procédé le plus naturel consiste à former le potentiel thermodynamique interne linéaire en partant du potentiel d'un milieu à trois dimensions; mais il faut alors chercher au préalable les valeurs des trois dilatations et des trois glissements en un point d'un tronçon de ligne en fonction des déformations de la ligne en ce point. Dans le cas de la ligne à quatre paramètres, cette recherche est facilitée par certaines formules dues à KIRCHHOFF¹⁾. Toutefois, ces formules purement cinématiques ne suffisent pas, car elles renferment trois fonctions arbitraires.

Pour déterminer correctement ces trois fonctions arbitraires ou, du moins, pour arriver aux expressions cherchées des dilatations et des glissements, il faudrait appliquer au tronçon de ligne les équations exactes de l'élasticité; mais c'est alors que les difficultés commencent. Dans le cas de la ligne à quatre paramètres, dont chaque section droite est un plan de symétrie de contexture, on se tire d'embarras en appliquant à un tronçon de ligne, c'est-à-dire au feuillet limité par deux sections droites infiniment voisines, les *équations de l'équilibre élastique écrites en faisant abstraction de toute force extérieure*. On reconnaît alors que ces équations, jointes aux formules de KIRCHHOFF, entraînent les conditions de SAINT-VENANT, c'est-à-dire celles qui expriment que la pression élastique sur tout élément parallèle à l'axe longitudinal est elle-même parallèle à cet axe. Mais si l'on peut admettre, avec KIRCHHOFF, que les forces extérieures et d'inertie agissant sur les éléments de volume d'une ligne élastique sont négligeables par rapport à celles qui s'exercent sur sa surface latérale, on ne voit plus du tout comment il est permis de faire encore abstraction des premiers, dès qu'on suppose que les secondes sont nulles. Cette façon de procéder est donc loin d'être irréprochable. D'autre part, si l'on faisait le calcul des dilatations et glissements en faisant abstraction des trois fonctions arbitraires, on aboutirait à une expression du potentiel thermodynamique nécessairement incomplète. En présence d'aussi graves difficultés, nous nous bornerons à préparer le calcul correct du potentiel thermodynamique interne linéaire d'une ligne élastique à six paramètres, en recherchant ce que deviennent, pour une telle ligne, les formules des KIRCHHOFF.

III. A cet effet, considérons dans l'état primitif un point $P_0(u, v, w)$ de la ligne rapporté au trièdre (m) ; dans l'état actuel déformé, ce point est venu en $P(u + U, v + V, w + W)$ par rapport au trièdre (M) , le déplacement élastique (U, V, W) étant fonction de t, ω, u, v, w . Soit alors $P'_0(u, v, w)$ le point homologue de P_0 par rapport au trièdre $m'(\omega + d\omega)$ infiniment voisin de (m) ; ses coordonnées par rapport à (m) sont $u + du, v + dv, w + dw$, avec

$$d(u, v, w) = (l, m, n) d\omega, \quad \dots \dots \dots (3)$$

en posant

$$l = \xi_0 + q_0 w - r_0 v, \quad m = \eta_0 + r_0 u - p_0 w, \quad n = \zeta_0 + p_0 v - q_0 u. \quad \dots \dots (4)$$

Dans l'état déformé, P'_0 est venu en P' . On peut alors obtenir les coordonnées absolues

¹⁾ G. KIRCHHOFF, *Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*, Gesammelte Abhandlungen, p. 298, formules (14).

de P' en augmentant celles x_1, y_1, z_1 de P soit de leurs différentielles en ω , soit de leurs différentielles en u, v, w calculées au moyen de (3); d'où il résulte que

$$\frac{\partial (x_1, y_1, z_1)}{\partial \omega} = l \frac{\partial (x_1, y_1, z_1)}{\partial u} + m \frac{\partial (x_1, y_1, z_1)}{\partial v} + n \frac{\partial (x_1, y_1, z_1)}{\partial w}.$$

En remplaçant dans ces trois égalités x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs

$$x_1 = x + \alpha(u + U) + \alpha_1(v + V) + \alpha_2(w + W), \dots,$$

où $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ désignent les cosinus directeurs des axes mobiles Mu, Mv, Mw par rapport aux axes fixes $Oxyz$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} (u + U) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} (v + V) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega} (w + W) + \alpha \frac{\partial U}{\partial \omega} + \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \omega} + \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial \omega} \\ = l \left[\alpha \left(1 + \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial u} \right] \\ + m \left[\alpha \frac{\partial U}{\partial v} + \alpha_1 \left(1 + \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial v} \right] \\ + n \left[\alpha \frac{\partial U}{\partial w} + \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial w} + \alpha_2 \left(1 + \frac{\partial W}{\partial w} \right) \right], \end{aligned}$$

En multipliant ces trois égalités respectivement par α, β, γ puis en les ajoutant membre à membre et en procédant de même avec $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, nous obtenons, en tenant compte des expressions de ξ, η, ζ et de p, q, r ,

$$\xi + q(w + W) - r(v + V) + \frac{\partial U}{\partial \omega} = l \left(1 + \frac{\partial U}{\partial u} \right) + m \frac{\partial U}{\partial v} + n \frac{\partial U}{\partial w},$$

soit encore, d'après (4),

$$\left. \begin{aligned} l \frac{\partial U}{\partial u} + m \frac{\partial U}{\partial v} + n \frac{\partial U}{\partial w} &= \frac{\partial U}{\partial \omega} + \xi - \xi_0 + (q - q_0)w - (r - r_0)v + qW - rV, \\ l \frac{\partial V}{\partial u} + m \frac{\partial V}{\partial v} + n \frac{\partial V}{\partial w} &= \frac{\partial V}{\partial \omega} + \eta - \eta_0 + (r - r_0)u - (p - p_0)w + rU - pW, \\ l \frac{\partial W}{\partial u} + m \frac{\partial W}{\partial v} + n \frac{\partial W}{\partial w} &= \frac{\partial W}{\partial \omega} + \zeta - \zeta_0 + (p - p_0)v - (q - q_0)u + pV - qU. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ces formules généralisent celles que KIRCHHOFF a établies pour une ligne à quatre paramètres, droite et non torse dans l'état primitif. Pour une telle ligne, on a en effet

$$\xi_0 = 1, \quad (\eta_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0) = 0; \quad \xi = \frac{ds}{d\omega} = 1 + \partial, \quad (\eta, \zeta) = 0,$$

d'où $l = 1, (m, n) = 0$ d'après (4); par suite, les formules (5) deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} &= \frac{\partial U}{\partial \omega} + \partial + q(w + W) - r(v + V), \\ \frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{\partial V}{\partial \omega} + r(u + U) - p(w + W), \\ \frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{\partial W}{\partial \omega} + p(v + V) - q(u + U) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

et ce sont précisément celles de KIRCHHOFF.

IV. Les équations (5), tout comme les équations (6), sont heureusement susceptibles de quelques simplifications. Tout d'abord, on peut négliger, aux seconds membres de (5), les termes en U, V, W et leurs dérivées en ω pour la même raison que dans (6). D'autre part, les composantes $p_0, q_0, r_0; p, q, r$ sont de l'ordre de grandeur des inverses des rayons de courbure et de torsion de l'axe longitudinal en m et M ; leurs produits par u, v, w sont donc des quantités très petites, en quelque sorte du premier ordre de petitesse, puisque, par définition, les dimensions transversales de la ligne élastique sont très petites par rapport à ses rayons de courbure et de torsion. Et il en est de même des produits $(q - q_0) w, \dots$, car les différences $p - p_0, \dots$ sont de l'ordre de grandeur de chaque composante p ou p_0, \dots , puisque, en passant de son état primitif à son état actuel, l'axe longitudinal est en général affecté d'une déformation finie. Il en résulte que les termes en $q_0 w \frac{\partial U}{\partial u}, \dots$ des premiers membres de (5) et provenant de l, m, n sont négligeables vis-à-vis de $(q - q_0) w, \dots$, comme étant au moins du second ordre de petitesse, puisque U, V, W sont très petits vis-à-vis de u, v, w . Les équations (5) deviennent ainsi très sensiblement

$$\xi_0 \frac{\partial U}{\partial u} + \eta_0 \frac{\partial U}{\partial v} + \zeta_0 \frac{\partial U}{\partial w} = \xi - \xi_0 + (q - q_0) w - (r - r_0) v,$$

et leur intégrale générale est

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} u + \frac{q - q_0}{2 \zeta_0} w^2 - \frac{r - r_0}{2 \eta_0} v^2 + \mathfrak{A}, \\ V &= \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0} v + \frac{r - r_0}{2 \xi_0} u^2 - \frac{p - p_0}{2 \zeta_0} w^2 + \mathfrak{B}, \\ W &= \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_0} w + \frac{p - p_0}{2 \eta_0} v^2 - \frac{q - q_0}{2 \xi_0} u^2 + \mathfrak{C}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ désignant trois fonctions arbitraires de deux quelconques des variables

$$\eta_0 w - \zeta_0 v, \quad \zeta_0 u - \xi_0 w, \quad \xi_0 v - \eta_0 u.$$

Les formules (7) constituent l'extension au cas de la ligne à six paramètres des formules suivantes de KIRCHHOFF, résultant de l'intégration de (6) avec les simplifications indiquées, soit:

$$U = \partial u + q w u - r u v + \mathfrak{A},$$

$$V = \frac{1}{2} r u^2 - p w u + \mathfrak{B},$$

$$W = p u v - \frac{1}{2} q u^2 + \mathfrak{C},$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ désignant maintenant trois fonctions arbitraires de v, w . Nous avons rappelé la méthode discutable dont on s'est contenté jusqu'ici pour les déterminer; la détermination correcte des fonctions $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ qui figurent dans (7) paraît donc se heurter aux plus graves difficultés.

Les équations intégrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations

Par F. H. van den Dungen, Bruxelles

1. *Equations à un paramètre.* La solution des problèmes qui se présentent en technique des vibrations, ou dans les théories similaires, dépend de l'étude d'une équation différentielle linéaire et homogène dont l'intégrale doit satisfaire à des conditions aux limites également linéaires et homogènes. Depuis une vingtaine d'années, on résout ces mêmes problèmes par la considération d'une équation de FREDHOLM du type polaire

$$y_P = \lambda \int_D G_{PQ} f_Q y_Q d\tau_Q, \quad \dots \dots \dots (1)$$

dont l'intégrale du second membre est étendue au domaine D , siège du phénomène étudié; dans cette équation, P et Q désignent deux points quelconques de D , y_P mesure l'intensité du phénomène au point P , $d\tau_Q$ représente un élément du domaine entourant Q , f_Q est la valeur de la «fonction de charge» en Q , G_{PQ} représente, à un facteur près, la fonction de GREEN ou coefficient d'influence correspondant à l'équation différentielle pour les conditions aux limites données, et, enfin, λ est le paramètre de l'équation.

On sait que la solution y est différente de zéro si λ est racine d'une équation transcendante

$$D(\lambda) = 0, \quad \dots \dots \dots (2)$$

appelée déterminante de *Fredholm*; les racines λ_i sont les valeurs caractéristiques de cette équation. Le paramètre a toujours un sens physique important pour la discussion de la solution; par exemple,

- dans le cas des vibrations propres, λ est le carré de la pulsation,
- » » » vitesses critiques, λ » » » vitesse angulaire,
- » » » du flambement, λ » » coefficient de sécurité.

2. *Equations à plusieurs paramètres.* Lorsqu'il s'agit d'une sollicitation composée, il y a toujours intérêt à mettre en évidence les divers paramètres correspondant aux diverses sollicitations simples coexistantes. L'équation intégrale se présente alors sous une forme telle que

$$y_P = \lambda \int_D L_{PQ} f_Q y_Q d\tau_Q + \mu \int_D M_{PQ} f_Q y_Q d\tau_Q, \quad \dots \dots \dots (3)$$

où L et M sont les fonctions de Green associées aux deux sollicitations simples; quant aux paramètres, par exemple,

- dans le cas des vibrations propres d'une pièce en rotation,
- λ est le carré de la pulsation, et
- μ est le carré de la vitesse angulaire,
- dans le cas d'une tige en rotation soumise à un effet axial,
- λ est le carré de la vitesse angulaire, et
- μ est le coefficient de sécurité au flambement.

Il peut se présenter des cas où l'équation comporte plus de deux paramètres: ainsi, si l'on veut étudier la stabilité d'une tige en rotation soumise à un effet axial, au moyen de la théorie des petits mouvements, il convient d'ajouter aux paramètres λ et μ définis dans le dernier exemple cité, un paramètre ν égal au carré de la pulsation d'un des petits mouvements.

BIBLIOTHEQUE INSITUUT OF TECHNOLOGIE

Nous n'insisterons pas ici sur les cas où il y a plus de deux paramètres; leur résolution se déduit immédiatement de celle que nous allons examiner.

3. *Courbes caractéristiques.* L'équation (3) se réduit à (1) si l'on pose

$$G_{PQ} = L_{PQ} + k M_{PQ} \text{ avec } k = \frac{\mu}{\lambda} \dots \dots \dots (4)$$

Fixons-nous la valeur du rapport k ; le noyau de l'équation (1) est alors connu et nous pouvons calculer les valeurs caractéristiques du paramètre; soient, par ordre de grandeur croissante,

$$\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}, \dots, \dots \dots \dots (5)$$

ces valeurs, auxquelles correspondent les valeurs

$$\mu_{1k} = k \lambda_{1k}, \mu_{2k} = k \lambda_{2k}, \dots$$

Effectuons ce calcul pour divers nombres k et représentons les résultats par des points figuratifs dans un système d'axes orthogonaux $O \mu \lambda$. Il est facile de voir que ces points appartiennent à des courbes qui coupent les axes aux points

$$\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots \text{ et } \mu_{1\infty}, \mu_{2\infty}, \dots, \dots \dots \dots (6)$$

donnés par les valeurs caractéristiques du paramètre de l'équation (3), quand on y suppose successivement μ et λ nuls.

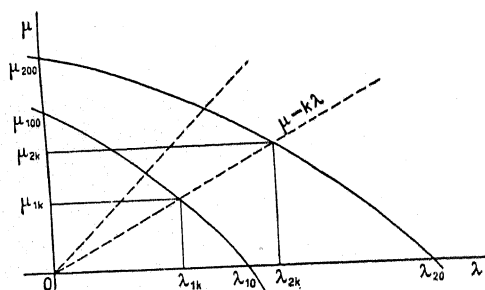


Fig. 1.

D'ailleurs, les coefficients de la déterminante dépendent de k , en vertu de (4). Cette déterminante constitue en fait, dans ce cas, une série double en λ et μ ; l'équation (3) ne peut être résolue que si les paramètres annulent cette série, c'est-à-dire s'ils satisfont à la déterminante généralisée

$$D(\lambda, \mu) = 0, \dots \dots (7)$$

que nous appellerons la *relation caractéristique*. Les courbes de la figure 1, que nous avons

appris à tracer, représentent cette relation caractéristique; nous les dénommerons des *courbes caractéristiques*.

La méthode précédente nous indique comment tracer ces courbes par points en les coupant par des droites issues de l'origine. Nous aurions pu aussi les couper par des parallèles aux axes coordonnées.

On peut obtenir la tangente en chacun de ces points, en utilisant les principes du calcul des perturbations du noyau comme H. POINCARÉ l'a conçu. Si y_{Pim} est une fonction caractéristique, orthogonale et normale, de l'équation (3), lorsque le paramètre μ a la valeur m donnée, on peut considérer l'équation générale (3) comme étant cette même équation particulière, augmentée du terme

$$(\mu - m) \int_D M_{PQ} f_Q y_Q d\tau_Q,$$

qui constitue la perturbation. On peut représenter les valeurs convenables de λ_i par un développement en série des puissances entières de $\mu - m$ et en calculer les coefficients par récurrence; on obtient ainsi,

$$\left(\frac{d\lambda_i}{d\mu}\right)_{\mu=m} = - \int_D \int_D M_{PQ} f_P f_Q y_{Pim} y_{Qim} d\tau_P d\tau_Q \dots \dots \dots (8)$$

Le même procédé nous donnerait les dérivées suivantes.

4. *Méthodes générales de résolution dans le cas d'un paramètre.* Nous venons de montrer comment l'équation à deux paramètres se réduisait à une équation à un paramètre. Il convient, avant de progresser dans notre étude, de se rappeler les procédés de résolution d'une telle équation. C'est ce que nous avons résumé dans le tableau suivant.

Forme différentielle	Forme intégrale
<i>A. Résolution exacte de la déterminante.</i>	
Recherche de l'intégrale générale. Equation de compatibilité avec les conditions aux limites.	Calcul du noyau et des coefficients de $D(\lambda) = 1 - V_1 \lambda + V_2 \frac{\lambda^2}{2} + \dots = 0.$
<i>B. Résolution approchée de la déterminante.</i>	
Développement en série de l'équation de condition ou intégration directe au moyen d'une série. (Méthode des majorantes de Cauchy).	Bernoulli: $\lambda_1 \cong V_1^{-1}, \lambda_2 \cong V_1 V_2^{-1}, \dots$ (Formule de Dunkerley) Graeffe: $\lambda_1 = \lim (A_n)^{-n}, \lambda_1 \lambda_2 =$ $= \lim \left(\frac{A_{n+1} A_{n-1} - A_n^2}{2} \right)^{-n}$
<i>C. Méthode des différences finies.</i>	
Dérivées remplacées par différences finies. (Cauchy).	Intégrales remplacées par sommes finies. (Formule d'Euler, ...)
NB. La sollicitation répartie est remplacée par une sollicitation purement locale. (Tableaux de M. Platrier.)	
<i>D. Méthode des itérations (PICARD et HADAMARD).</i>	
On se donne la fonction y_0 satisfaisant aux conditions aux limites, puis on calcule au moyen de l'équation différentielle ou intégrale, y_1 , puis, par itération, y_2, y_3, \dots , en supposant $\lambda = 1$.	
On a $\lambda_1 = \lim \frac{y_{n-1}}{y_n}, \lambda_1 \lambda_2 = \lim \frac{y_n y_{n-2} - y_{n-1}^2}{y_{n+1} y_{n-1} - y_n^2}, \dots$	
On peut se servir de $\int A y_0 d\tau, \int A y_1 d\tau, \dots$ (Schwarz).	
Formule pratique: $\lambda_1 \cong \frac{y_0}{y_1}$.	
<i>E. Méthode des variations.</i>	
Théorème de Lord Rayleigh: λ_1 est la valeur limite du rapport $\frac{\text{travail de déformation}}{\text{énergie cinétique pour } \lambda = 1}$	
Théorème du maximum minimorum de R. Courant. Procédés de Ritz et Galerkin.	
Formule pratique: $\lambda_1 \cong \left(\frac{\text{travail de déformation}}{\text{énergie cinétique } (\lambda = 1)} \right) y_0$, pour une déformation probable y_0 .	

5. *Particularités de la résolution dans le cas de deux paramètres.* Il est aisé de voir comment, grâce à la formule (4), on déduit du tableau précédent, les formules intéressant le cas de deux paramètres. Le tableau suivant en traduit les particularités.

A. *Résolution exacte de la déterminante.*

On a le développement

$$D(\lambda, \mu) = 1 - V_{10}\lambda - V_{01}\mu + \frac{1}{2}(V_{20}\lambda^2 + 2V_{11}\lambda\mu + V_{02}\mu^2) + \dots = 0.$$

B. *Résolution approchée de la déterminante.*

On a, cette fois $1 = \lim (\lambda_1^n A_{n0} + \binom{n}{1} \lambda_1^{n-1} \mu_1 A_{n-1,1} + \dots + \mu_1^n A_{0n})$;
d'où approximativement, $1 \cong \lambda_1 A_{10} + \mu_1 A_{01}$, etc.

C. *Méthode des différences.*

La sollicitation est purement locale.

D. *Méthode des itérations.*

On choisit arbitrairement y_0 puis, par itération,

$$\begin{array}{llll} y_0 & \text{donne avec } \lambda = 1, \mu = 0 : y_{10}; & \text{avec } \lambda = 0, \mu = 1 : y_{01} \\ y_{10} & \text{ } & \lambda = 1, \mu = 0 : y_{20}; & \lambda = 0, \mu = 1 : y_{11} \\ y_{01} & \text{ } & \lambda = 1, \mu = 0 : y_{11}; & \lambda = 0, \mu = 1 : y_{02}, \text{ etc.} \end{array}$$

Approximativement,

$$y_0 = \lambda_1 y_{10} + \mu_1 y_{01}, \lambda_1 y_{10} + \mu_1 y_{01} = \lambda^2 y_{20} + \lambda\mu (y_{11} + \bar{y}_{11}) + \mu^2 y_{02}, \dots \text{ etc.}$$

E. *Méthode des variations.*

On a, avec M. STODOLA,

$$\text{travail de déform.} = \lambda (\text{énerg. cinét.}) \left(\begin{smallmatrix} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{smallmatrix} \right) + \mu (\text{énerg. cinét.}) \left(\begin{smallmatrix} \mu = 1 \\ \lambda = 0 \end{smallmatrix} \right)$$

6. *Propriétés des courbes caractéristiques.* Ces courbes sont continues et dérivables; elles ne présentent pas de points doubles dans le cas des noyaux polaires de l'équation (3); elles sont en nombre infini, lorsque les valeurs caractéristiques (6) le sont; leur allure se déduit immédiatement du signe de leur tangente (8) ou encore des propriétés du noyau d'après le théorème de R. COURANT.

Si les fonctions caractéristiques correspondant à λ_{i0} sont orthogonales à celles correspondant à $\mu_{j\infty}$, ($j \neq i$), les courbes ont pour équation

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda_{i0}} - \frac{\mu}{\mu_{j\infty}} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (9)$$

On peut, enfin, déduire l'équation des courbes d'ordre élevé, des formules de WEYL: s'il y a d dimensions, à l'équation d'ordre $2m$

$$\Sigma \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(p \frac{\partial^m y}{\partial x_i^m} \right) + \lambda a y + \mu b y = 0 \dots \dots \dots (10)$$

correspondent les courbes, pour n tendant vers l'infini,

$$(-1)^{m-1} = \lim \frac{1}{n} \frac{V_d}{2^d} \int_D \left(\frac{\lambda_n a + \mu_n b}{p} \right)^{\frac{d}{2m}} d\tau, \dots \dots \dots (11)$$

où V_d est le volume de la sphère à d dimensions, de rayon égal à π^{-1} . On voit que les courbes d'ordre élevé tendent à devenir des droites, quand les rapports $\frac{a}{p}$ et $\frac{b'}{p}$ sont constants dans tout le domaine D , ou encore lorsque l'ordre $2m$ est égal au nombre d des dimensions (cas de l'équation du second ordre dans un domaine à deux dimensions).

7. *Exemple.* Une tige de section constante, en rotation de vitesse ω , subissant un effort axial constant et reposant sur deux appuis simples à ses extrémités, voit sa flexion régie par l'équation différentielle

$$y^{IV} + \mu b y'' - \lambda a y = 0,$$

si l'on néglige l'effet des couples centrifuges; le paramètre μ est le coefficient de sécurité et le paramètre λ , le carré ω^2 . Les solutions fondamentales ont pour équation

$$y = K \sin c \frac{\pi x}{l}, \quad c = 1, 2, 3, \dots,$$

tandis que λ et μ doivent satisfaire à

$$1 = \lambda_c a \frac{l^4}{\pi^4 c^4} + \mu_c b \frac{l^2}{\pi^2 c^2}, \quad c = 1, 2, 3, \dots,$$

Les courbes caractéristiques se réduisent donc, dans ce cas, à des droites représentées sur la figure 2; ces droites passent par les points de coordonnées

$$\lambda_{co} = \frac{\pi^4 c^4}{a l^4}, \quad \mu = 0$$

et

$$\lambda = 0, \quad \mu_{c\infty} = \frac{\pi^2 c^2}{b l^2}.$$

qui correspondent aux cas de sollicitations simples: flambement de la tige immobile et vitesses critiques sans effort axial.

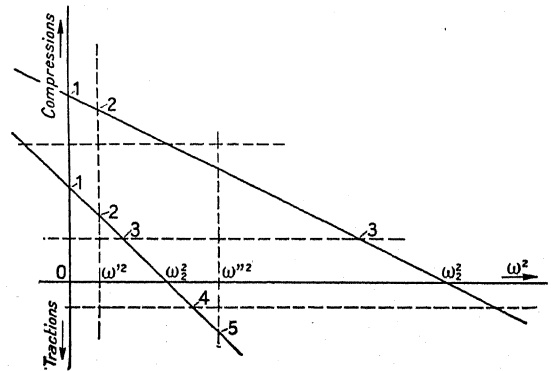


Fig. 2.

Coupons le réseau des droites caractéristiques par une parallèle à l'axe des λ , les intersections de cette droite avec les droites du réseau ont pour abscisses les carrés des vitesses critiques de la tige soumise à un effort mesuré par l'ordonnée de la parallèle. On voit que toute compression diminue la valeur de chaque vitesse critique tandis que toute traction l'accroît. Lorsque la compression tend vers la première charge eulérienne la première vitesse critique tend vers zéro; au delà de cette charge, cette vitesse est imaginaire. Le même raisonnement s'applique aux charges et vitesses supérieures.

Coupons maintenant, le réseau par une parallèle à l'axe des μ , les intersections de cette droite avec les droites du réseau ont pour ordonnées des nombres proportionnels aux charges de flambement de la tige tournant à une vitesse égale à la racine carrée de l'abscisse de la parallèle. On voit que les charges diminuent quand la vitesse augmente. Lorsque la vitesse tend vers la première vitesse critique, la première charge tend vers zéro; au delà de cette vitesse, cette charge devient négative et représente une traction. Le même raisonnement s'applique aux vitesses et charges supérieures; ainsi donc, la tige présente autant de charges de flambement par traction, que sa vitesse a dépassé de vitesses critiques.

8. *Application.* L'étude des aubes et des disques de turbines, soumis à vibrations pendant leur rotation rentre dans le cadre des problèmes à deux paramètres. Les diverses formules que l'on a proposées pour leur étude sont les formules linéaires que nous avons réunies dans le tableau du n° 6; comme on le voit dans ce tableau, il est possible de perfectionner leur approximation en leur substituant des formules quadratiques, cubiques,

En particulier dans le cas des disques de révolution, on peut supposer que la déformation dépend de l'azimut d'après le facteur $\sin n\psi$ et transformer l'équation différentielle en une équation à une variable indépendante. Les formules linéaires donnent, alors, l'expression approchée des premières courbes caractéristiques dans les cas où il y a zéro, un, deux, diamètres nodaux, suivant que l'on fait

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

9. *Bibliographie.* Dans les mémoires suivants, on trouvera des renseignements plus explicites que ceux que nous pouvons donner dans le cadre de ce travail, soit sur les méthodes de calcul, soit sur les applications:

R. COURANT & D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik I (J. Springer), Berlin—1926.

E. HAHN: Schweiz. Bauzeit. Bd. 87, n° 1, pp. 1—4.

CH. PLATRIER: Torsion des arbres de transmission (Gauthier-Villars), Paris — 1924.

STODOLA: Dampf- und Gasturbinen (6^e éd. allemande ou 2^e éd. française).

F. H. VAN DEN DUNGEN: Cours de technique des vibrations (édition de la Revue de l'Ecole Polytechnique), Bruxelles — 1926.

id.

C. R. de Paris:

1923—25 juin, p. 1864, 23 juillet, p. 243, 6 août, p. 387,

1^{er} oct., p. 574, 15 oct., p. 677.

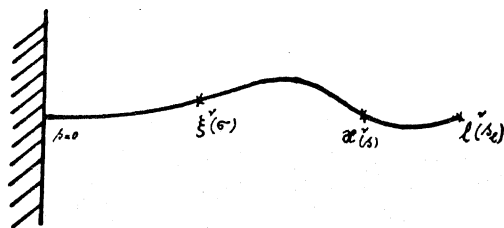
1924—11 févr., p. 609, 10 mars, p. 917, 19 mai, p. 1685.

Ternäre orthogonale Transformationen und ihre Anwendungen in der Theorie der Elastika

Von H. Hencky, Delft

In der sogenannten Tensoralgebra hat die analytische Geometrie einen Ausbau erfahren, der auch für die angewandte Mechanik der Kontinua von Bedeutung ist¹⁾.

Einige Physiker, darunter insbesondere Herr L. BRILLOUIN auf dem Kongreß in Toronto, haben vor kurzem wieder auf diese Anwendungen hingewiesen; in der technischen Mechanik verlangt man aber und wohl nicht mit Unrecht den Nachweis, daß man auf diese Weise auch konkrete Probleme bis zur vollständigen Auflösung behandeln kann, die sich ohne dieses neue Hilfsmittel nur mühsam und unvollständig behandeln lassen.



Zur Führung dieses Nachweises ist kein Problem geeigneter, als der doppelt gekrümmte, elastische Stab, dessen Behandlung in der klassischen Elastizitätslehre von der elementaren Balkentheorie stark abweicht. Unter Beschränkung auf den Stab mit unausdehnbarer Mittellinie werden wir sehen, daß die Tensoralgebra uns zu einer Verallgemeinerung der in der Technik üblichen Balkentheorie führt, die die Beantwortung jeder auf die räumliche elastische Linie bezüglichen Frage in sich schließt.

Die Gestalt des krummen Stabes beziehen wir auf ein im Raume festes äquidistantes Koordinatensystem, das die ungehinderte Parallelverschiebung aller geometrischen Größen im euklidischen Raum ermöglicht. Da jeder Querschnitt des Stabes zu diesem festen System eine andere Orientierung hat, tritt sofort die Frage nach der analytischen Darstellung endlicher Raumdrehungen in den Vordergrund und hiermit müssen wir uns zunächst beschäftigen.

I. Ternäre orthogonale Transformationen in schiefwinkligen Axensystemen

Bei einer allgemeinen affinen Transformation haben wir zwei gemischte Affinoren P_{ν}^{μ} und Q_{λ}^{ρ} für die kontravarianten, bzw. kovarianten Komponenten, welche transformiert werden sollen

$$\left. \begin{aligned} \xi^\mu &= P_\nu{}^\mu \xi^\nu \\ \xi_\lambda &= Q_\lambda{}^\rho \xi_\rho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 2) \quad (I)$$

¹⁾ Diese Tatsache haben bereits RICCI und LEVI-CIVITA im letzten Kapitel ihrer grundlegenden Abhandlung « Méthodes de calcul différentiel absolu » in den Math. Ann. 1900 hervorgehoben.

²⁾ vergl. SCHOUTEN, Der Riccikalkul 1924, S. 12.

Gemäß der Definition der Begriffe kontravariant und kovariant gelten dabei die Beziehungen

$$P_{\nu}^{\cdot \mu} Q_{\cdot \lambda}^{\nu} = P_{\lambda}^{\cdot \nu} Q_{\cdot \nu}^{\mu} = 1 \text{ für } \mu = \lambda \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$= 0 \text{ für } \mu \neq \lambda$$

Wenn nun ein unveränderlicher Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ gegeben wird, so heißt das, daß das Axenkreuz, das man einmal gewählt hat, starr bleibt, mit andern Worten, daß die Transformation eine Drehung darstellt. Man kann zeigen, daß in diesem Falle die Beziehung gilt

$$P_{\nu}^{\cdot \mu} = Q_{\nu}^{\cdot \mu} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Die 6 von einander unabhängigen Gleichungen einer orthogonalen Transformation lauten also an Stelle von Gl. (2)

$$P_{\nu}^{\cdot \mu} P_{\cdot \lambda}^{\nu} = P_{\lambda}^{\cdot \nu} P_{\cdot \nu}^{\mu} = 1 \text{ für } \mu = \lambda \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$= 0 \text{ für } \mu \neq \lambda$$

Der Einheitsvektor der Drehungsaxe sei a^{ν} bzw. a_{ν} , dann entspricht diesem Vektor ein ganz bestimmter antisymmetrischer Tensor $m_{\lambda\rho}$, $m^{\lambda\rho}$ 3), so daß man für die einander entsprechenden Zahlenwerte der Koeffizienten die folgenden Schemas anschreiben kann.

$$\left. \begin{matrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{matrix} \right\} \text{ gegeben durch } \left\{ \begin{matrix} 0 & +a^1\sqrt{g} & -a^2\sqrt{g} \\ -a^3\sqrt{g} & 0 & +a^1\sqrt{g} \\ +a^2\sqrt{g} & -a^1\sqrt{g} & 0 \end{matrix} \right.$$

und analog für die kontravarianten Komponenten mit $\frac{1}{\sqrt{g}}$ als Faktor.

Die für praktische Rechnungen sehr wichtigen gemischten Komponenten erhält man durch Ueberschiebung mit dem Fundamentaltensor

$$\left. \begin{matrix} m_{\nu}^{\cdot \mu} = g_{\rho\nu} m^{\rho\mu} \\ m_{\cdot \lambda}^{\rho} = g_{\lambda\mu} m^{\rho\mu} \end{matrix} \right\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Um den gemischten Affinor $P_{\nu}^{\cdot \mu}$ zu bilden, stehen uns 3 gemischte Affinoren zur Verfügung, nämlich der Fundamentaltensor $g_{\nu}^{\mu} \left\{ \begin{matrix} = 1 \text{ für } \mu = \nu \\ = 0 \text{ für } \mu \neq \nu, \end{matrix} \right.$ das gemischte Produkt des

Einheitsvektors der Drehaxe $a_{\nu} a^{\mu}$ mit sich selbst und der mit dem Einheitsvektor a^{ρ} gegebene antisymmetrische Affinor $m_{\nu}^{\cdot \mu}$. Aus diesen 3 Bestandteilen muß sich der Affinor $P_{\nu}^{\cdot \mu}$ in linearer Weise zusammensetzen lassen. Man findet, daß die Gleichungen (4) befriedigt werden durch den folgenden Ansatz

$$\left. \begin{matrix} P_{\nu}^{\cdot \mu} = \frac{1}{1 + \Phi^2} (g_{\nu}^{\mu} + \Phi^2 [2 a_{\nu} a^{\mu} - g_{\nu}^{\mu}] + 2 \Phi m_{\nu}^{\cdot \mu}) \\ P_{\cdot \lambda}^{\rho} = \frac{1}{1 + \Phi^2} (g_{\lambda}^{\rho} + \Phi^2 [2 a^{\rho} a_{\lambda} - g_{\lambda}^{\rho}] + 2 \Phi m_{\cdot \lambda}^{\rho}) \end{matrix} \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

3) vergl. hierzu auch L. BRILLOUIN, der in seiner Abhandlung "Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valables pour des coordonnées quelconques", Ann. de Phys. 10, ser. tome 3, p. 251—298 für diese Art von antisymmetrischen Tensoren die Bezeichnung tensorielle Kapazität bzw. Tensordichte vorschlägt.

Daß dabei noch eine unbestimmbare Funktion Φ der Winkeldrehung φ auftritt, ist ganz verständlich, denn die Größe der Winkeldrehung haben wir beliebig angenommen. Man findet durch spezielle Wahl der Drehungsaxe, daß $\Phi = t_g \frac{\varphi}{2}$ (7)

Beim Uebergang zu einem rechtwinkligen System ($g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = g_{\mu}^{\nu}$) gehen die Formeln (6) in die bekannten Formeln von EULER und O. RODRIGUEZ über, verlieren aber dabei ihre Durchsichtigkeit.

In der Mechanik ist es häufig nötig, die Verschiebung eines Punktes infolge einer Drehung des Raumes berechnen zu können. Bezeichnen wir mit u^{μ} die Verschiebung eines Punktes mit den Koordinaten ξ^{μ} , so haben wir zu setzen

$$u^{\mu} = (P_{\nu}^{\cdot\mu} - g_{\nu}^{\mu}) \xi^{\nu}$$

$$u_{\mu} = (P_{\cdot\mu}^{\lambda} - g_{\mu}^{\lambda}) \xi_{\lambda}$$

Durch Einsetzen von $P_{\nu}^{\cdot\mu}$ aus Gl. (6) erhält man nach leichter Umrechnung

$$u^{\mu} = \sin \varphi \left(t_g \frac{\varphi}{2} (a_{\nu}^{\mu} - g_{\nu}^{\mu}) + m_{\nu}^{\cdot\mu} \right) \xi^{\nu}$$

$$u_{\lambda} = \sin \varphi \left(t_g \frac{\varphi}{2} (a_{\lambda}^{\rho} - g_{\lambda}^{\rho}) + m_{\lambda}^{\rho} \right) \xi_{\rho}$$

Läßt man hier den Winkel unendlich klein werden $\varphi = \Delta \varphi$, so wird

$$u^{\mu} = \Delta \varphi m_{\nu}^{\cdot\mu} \xi^{\nu}$$

$$u_{\lambda} = \Delta \varphi m_{\lambda}^{\rho} \xi_{\rho}$$

d. h. der Drehungsaffinor reduziert sich auf seinen antisymmetrischen Teil. Beim elastischen Stab mit unausdehnbarer Mittellinie ist jedem Punkt dieser Mittellinie eine Drehungsaxe zugeordnet, wobei der auf die Einheit der Mittellinie bezogene Grenzwert $\lim_{\Delta s} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$, der die Dimension Länge⁻¹ hat, als ein absolutes von der ursprünglichen Krümmung unabhängiges Krümmungsmaß betrachtet werden kann. Wir wollen daher den auf die Bogenlänge bezogenen Krümmungsaffinor oder Bivektor durch die Gleichungen definieren

$$w_{\nu}^{\cdot\mu} = \frac{1}{\rho} m_{\nu}^{\cdot\mu}$$

$$w_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{\rho} m_{\lambda}^{\rho}$$

Mit diesem Affinor können wir sofort durch eine einmalige Integration den als sehr klein zu betrachtenden Verschiebungsvektor eines bestimmten Punktes $x^{\nu}(s)$ des bei $s = 0$ eingespannt gedachten Stabes berechnen.

Man erhält dafür

$$u^{\mu} = \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (x^{\nu}(s) - \xi^{\nu}(\sigma)) w_{\nu}^{\cdot\mu}(\sigma) d\sigma \quad \dots \quad (11)$$

Die entsprechende differentielle Beziehung für den ursprünglich geraden Stab ergibt sich, wenn wir Gl. (11) zweimal nach s differenzieren, zu

$$\frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} = t^{\nu} w_{\nu}^{\cdot\mu} \quad \dots \quad (12)$$

wobei t^{ν} der Einheitsvektor an die Stab-Mittellinie ist. Gl. (12) bildet die Verallgemeinerung der in der Technik üblichen Biegungsgleichung.

II. Die Beziehungen zwischen Deformationen und Kräften ⁴⁾

Der Krümmungsbivector $w_v^{\cdot\mu}$ steht bei der elastischen Deformation mit einem Momentenbivector $M_v^{\cdot\mu}$ in eindeutigen linearen Zusammenhang. Diese Verknüpfung geschieht durch einen symmetrischen Tensor T_μ^λ in der Gleichung $M_v^{\cdot\lambda} = T^{-1} T_\mu^\lambda T_v^\rho w_\rho^{\cdot\mu}$... (13)

Da wir aber eigentlich den Tensor $w_v^{\cdot\mu}$ brauchen, so müssen wir die Gleichung umkehren können. Zu diesem Zwecke definieren wir einen neuen Tensor R_λ^σ und bilden auf beiden Seiten der Gl. (13) die Ueberschiebung $T R_\lambda^\sigma R_\omega^\nu M_v^{\cdot\lambda} = R_\lambda^\sigma R_\omega^\nu T_v^\rho T_\mu^\lambda w_\rho^{\cdot\mu}$. Wählen wir nun R_λ^σ so, daß $R_\lambda^\sigma T_\mu^\lambda = g_\mu^\sigma$, d. h. gleich dem Substitutionsaffinor ist, so haben wir 6 Gl. zur Bestimmung des Tensors R_λ^σ . Die Lösung dieses Systems besteht in allen Minoren der Matrix T_μ^λ , geteilt durch die Determinante T der Matrix.

Wir erhalten schließlich

$$w_\omega^{\cdot\sigma} = g_\mu^\sigma g_\omega^\rho w_\rho^{\cdot\mu} = T R_\lambda^\sigma R_\omega^\nu M_v^{\cdot\lambda} \dots \dots \dots (14)$$

Wegen der wechselnden Orientierung der Stabquerschnitte ist der Tensor R_μ^λ veränderlich. Der Steifheitstensor an der Ursprungstelle des Koordinatensystems sei R_ρ^ν . Dann erhalten wir den Steifheitstensor R_μ^λ durch die doppelte Ueberschiebung mit dem Transformationsaffinor P_μ^ρ zu

$$R_\mu^\lambda = R_\rho^\nu P_\mu^\rho P_\nu^\lambda \dots \dots \dots (15)$$

Für die Verschiebung eines Punktes der Stabmittellinie erhalten wir mit Gl. (11) für einen beliebig gekrümmten Stab

$$u^\mu = \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (x^\omega(s) - \xi^\omega(\sigma)) T R_\lambda^\mu R_\omega^\nu M_v^{\cdot\lambda} d\sigma \dots \dots \dots (16)$$

und mit Gl. (12) für den ursprünglich geraden Stab

$$\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} = T R_\lambda^\mu R_\omega^\nu M_v^{\cdot\lambda} \dots \dots \dots (17)$$

III. Anwendung auf Stabilitätsprobleme

Bei allen Stabilitätsproblemen handelt es sich um einen Gleichgewichtszustand, der unter gewissen kritisch genannten Umständen indifferent wird, so daß alle Punkte eine virtuelle, unendlich kleine Verschiebung u^μ bekommen können, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird. Als Ausgangspunkt ist dabei immer derjenige Zustand gedacht, der bei künstlicher, jedoch zwangskraftfreier Verhinderung des Knickens eintreten muß. Die sehr kleinen virtuellen Verschiebungen u^μ sind von den ebenfalls sehr kleinen Krümmungsänderungen $w_v^{\cdot\mu}$ begleitet. Unter U^μ und $W_v^{\cdot\mu}$ verstehen wir die Formänderungen des Ausgangszustandes. Die virtuellen Zuwächse aller anderen Größen seien mit A bezeichnet.

⁴⁾ Auf die interessanten Zusammenhänge, auf Grund welcher E. und F. COSSERAT in ihrer "Théorie des corps déformables" 1909 eine deduktive Differentialmechanik der Kontinua zu entwickeln versucht haben, können wir leider an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Aus Gl. (16) erhalten wir

$$U^\mu + u^\mu = \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (T + \Delta T) [(x^\omega(s) - \xi^\omega(\sigma)) + u^\omega(s) - u^\omega(\sigma)] \cdot (R_\lambda^\mu + \Delta R_\lambda^\mu) (R_\omega^\nu + \Delta R_\omega^\nu) (M_\nu^\lambda + \Delta M_\nu^\lambda) d\sigma \quad (18)$$

Unter Beachtung, daß

$$U^\mu = \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} T (x^\omega - \xi^\omega) R_\lambda^\mu R_\omega^\nu M_\nu^\lambda d\sigma$$

und mit Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung erhält man aus (18)

$$\begin{aligned} u^\mu = & \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (x^\omega - \xi^\omega) T \cdot R_\omega^\nu R_\lambda^\mu \Delta M_\nu^\lambda d\sigma + \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (x^\omega - \xi^\omega) T R_\omega^\nu \Delta R_\lambda^\mu M_\nu^\lambda d\sigma \\ & + \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (x^\omega - \xi^\omega) T \cdot \Delta R_\omega^\nu R_\lambda^\mu M_\nu^\lambda d\sigma + \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (x^\omega - \xi^\omega) \Delta T \cdot R_\omega^\nu R_\lambda^\mu M_\nu^\lambda d\sigma \\ & + \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (\mu^\omega(s) - u^\omega(\sigma)) T R_\lambda^\mu R_\omega^\nu M_\nu^\lambda d\sigma \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (19) \end{aligned}$$

Die Integralgleichung (19) beherrscht das ganze Gebiet der räumlichen Knickprobleme.

Treten Momente vor Eintritt der virtuellen Ausbiegung nicht auf, so vereinfacht sich (19) zu

$$u^\mu = \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} (x^\omega - \xi^\omega) T R_\lambda^\mu R_\omega^\nu \Delta M_\nu^\lambda d\sigma$$

Einen speziellen, besonders einfachen Fall wollen wir benutzen, um den Verlauf der Rechnung zu veranschaulichen.

Für einen verwundenen axial gedrückten und gelenkig gelagerten geraden Stab fällt nämlich die Stabaxe mit der Kraftrichtung zusammen und wir erhalten mit K^λ als axialer Kraft in $x^\mu = l^\mu$

$$\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} = - t^\omega T R_\lambda^\mu R_\omega^\nu g_{\alpha\nu} u^{[\alpha} K^{\lambda]} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (20)$$

Nehmen wir im Sinn einer Rechtsschraube $\varphi = \frac{\pi s}{l}$ als Verwindungswinkel, so wird unter Annahme eines rechtwinkligen Systems

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= 1 \end{aligned}$$

und die Transformationsmatrix nach (6)

$$P_{11} = + \cos \frac{\pi s}{l}, P_{21} = - \sin \frac{\pi s}{l}, P_{31} = 0.$$

$$P_{12} = + \sin \frac{\pi s}{l}, P_{22} = + \cos \frac{\pi s}{l}, P_{32} = 0.$$

$$P_{13} = 0, P_{23} = 0, P_{33} = 1.$$

Der Steifheitstensor R_{mn} wird nach Gl. (15) mit $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$

$$R_{11} = B_{11} \cos^2 \left(\frac{\pi s}{l} \right) + B_{22} \sin^2 \left(\frac{\pi s}{l} \right), R_{12} = (B_{11} - B_{22}) \sin \left(\frac{\pi s}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi s}{l} \right), R_{13} = 0.$$

$$R_{21} = (B_{11} - B_{22}) \sin \left(\frac{\pi s}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi s}{l} \right), R_{22} = B_{11} \sin^2 \left(\frac{\pi s}{l} \right) + B_{22} \cos^2 \left(\frac{\pi s}{l} \right), R_{23} = 0.$$

$$R_{31} = 0, R_{32} = 0, R_{33} = B_{33}$$

Die Umkehrung des Steifheitstensors wird

$$T_{11} = \frac{1}{B_{11}} \cos^2 \left(\frac{\pi s}{l} \right) + \frac{1}{B_{22}} \sin^2 \left(\frac{\pi s}{l} \right), T_{12} = \left(\frac{1}{B_{11}} - \frac{1}{B_{22}} \right) \sin \frac{\pi s}{l} \cos \frac{\pi s}{l}, T_{13} = 0$$

$$T_{21} = \left(\frac{1}{B_{11}} - \frac{1}{B_{22}} \right) \sin \frac{\pi s}{l} \cos \frac{\pi s}{l}, T_{22} = \frac{1}{B_{11}} \sin^2 \frac{\pi s}{l} + \frac{1}{B_{22}} \cos^2 \frac{\pi s}{l}, T_{23} = 0$$

$$T_{31} = 0, T_{32} = 0, T_{33} = \frac{1}{B_{33}}$$

Mit $K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = -K$ wird schließlich aus Gl. (20) mit $u^{[\alpha K \lambda]} = u^{\alpha K \lambda}$
 $t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = +1.$
 $-u^{\lambda K \alpha}$ nach Ausführung aller Ueberschiebungen.

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} = -T(R_{11} R_{33} u_1 + R_{21} R_{33} u_2) K = -(T_{22} u_1 + T_{12} u_2) K$$

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} = -T(R_{12} R_{33} u_1 + R_{22} R_{33} u_2) K = -(T_{21} u_1 + T_{11} u_2) K$$

$$\frac{d^2 u_3}{ds^2} = 0$$

woraus $u_3 = 0$, und

$$\frac{d u_1^2}{ds^2} = -K \left\{ u_1 \left(\frac{1}{B_{22}} \cos^2 \frac{\pi s}{l} + \frac{1}{B_{11}} \sin^2 \frac{\pi s}{l} \right) + u_2 \left(\frac{1}{B_{11}} - \frac{1}{B_{22}} \right) \sin \frac{\pi s}{l} \cos \frac{\pi s}{l} \right\}$$

$$\frac{d u_2^2}{ds^2} = -K \left\{ u_1 \left(\frac{1}{B_{11}} - \frac{1}{B_{22}} \right) \sin \frac{\pi s}{l} \cos \frac{\pi s}{l} + u_2 \left(\frac{1}{B_{22}} \sin^2 \frac{\pi s}{l} + \frac{1}{B_{11}} \cos^2 \frac{\pi s}{l} \right) \right\}$$

Für $B_{11} = \infty$ erhält man die auch auf anderem Weg ableitbare Formel

$$u_1 = -\frac{K}{B_{22}} \left(u_1 \cos^2 \frac{\pi s}{l} + u_2 \sin \frac{\pi s}{l} \cos \frac{\pi s}{l} \right)$$

$$u_2 = -\frac{K}{B_{22}} \left(u_1 \sin \frac{\pi s}{l} \cos \frac{\pi s}{l} + u_2 \sin^2 \frac{\pi s}{l} \right)$$

deren angenäherte Lösung lautet

$$u_1 = A \sin \left(\frac{2 \pi s}{l} \right)$$

$$u_2 = B \sin \left(\frac{\pi s}{l} \right)$$

Die kleinste Knickkraft ergibt sich leicht aus der Determinante zweier linearer Gleichungen in A und B zu $K = \frac{\pi^2 \cdot B_{22}}{l^2} \cdot 1,26$ anstatt $\frac{\pi^2 B_{22}}{l^2}$ beim unverwundenen Stab. Der Stab wird dabei zu einer steilen Schraubenlinie verbogen, wobei $B \cong 8 A$ wird.

Anmerkung. Unter Verwendung des Einheitstrivektors des Raumes (Schouten Riccikalkul 1924, S. 31—32) ließen sich die Formeln 13—19 erheblich vereinfachen.

Le calcul pratique de problèmes élastiques à deux dimensions par la méthode des équations intégrales

Par R. Miche, Le Caire

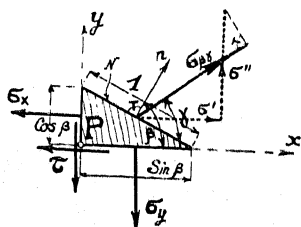
La méthode des équations intégrales permet de résoudre théoriquement le problème général de l'élasticité:

Trouver les déformations ou les tensions à l'intérieur d'un corps isotrope quand les unes ou les autres de ces valeurs sont données à la surface.

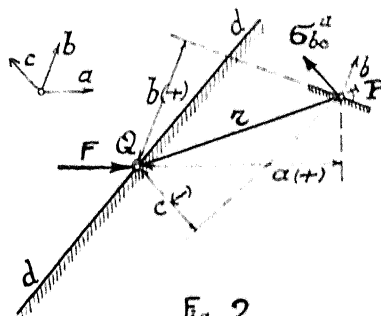
Malheureusement, les intégrales de surface contenues dans les formules ne permettent que difficilement un calcul numérique.

D'autre part, dans beaucoup de cas rencontrés dans la pratique, les déformations et tensions élastiques peuvent être exprimées au moyen de deux variables seulement. Les calculs à effectuer ne comprennent alors que des intégrales curvilignes que nous considérerons de façon approchée comme sommes d'un nombre fini de termes.

Vu la place réduite dont nous disposons il ne nous sera pas possible de donner des démonstrations des formules employées.



- Fig. 1 -



- Fig. 2 -

Nous considérons dans cet exposé uniquement l'état de déformation plan dans le cas le plus courant où les efforts sont donnés à la surface. Tous les corps considérés seront des disques d'épaisseur *unité* chargés uniformément tout le long de chaque génératrice du contour.

§ 1. — Soient σ_x , σ_y et τ les trois composantes de l'effort au point P (fig. 1).

La composante générale $\sigma_{\beta\gamma}$ du tenseur effort au point P suivant une direction faisant avec l'axe x un angle γ et par rapport à un élément plan N dont la normale extérieure n fait un angle β avec l'axe x se calcule comme suit:

$$\sigma_{\beta\gamma} = \sigma' \cos \gamma + \sigma'' \sin \gamma$$

$$\text{où } \sigma' = \sigma_x \cos \beta + \tau \sin \beta \quad \text{et} \quad \sigma'' = \sigma_y \sin \beta + \tau \cos \beta$$

en appelant σ' et σ'' les composantes de l'effort suivant les axes x et y par rapport à l'élément plan N . Il s'en suit:

$$\sigma_{\beta\gamma} = \sigma_x \cos \beta \cos \gamma + \sigma_y \sin \beta \sin \gamma + \tau (\cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma) = \sigma_{\gamma\beta} \dots \dots (1)$$

Réciproquement, toute quantité fonction bilinéaire, homogène et symétrique des \sin et \cos de deux angles définira un effort parfaitement déterminé au point P , dont on pourra calculer les trois composantes habituelles par rapport à deux axes orthogonaux quelconques. Dorénavant nous appellerons simplement l'effort en un point un tenseur tel que $\sigma_{\beta\gamma}$.

Considérons maintenant un demi-plan indéfini (en réalité un disque indéfini) limité par la droite d , un point Q situé sur d , un point P quelconque à l'intérieur du demi-plan et trois directions quelconques a , b , c (fig. 2).

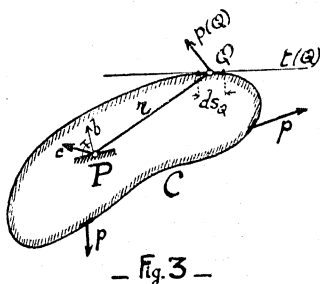
Nous appellerons par la suite *abscisse* du point P par rapport à l'origine Q et dans une direction donnée (par exemple b) la projection b du segment \overrightarrow{QP} suivant la direction b , projection mesurée avec son signe. — Nous désignons par une même lettre une direction et une longueur, ce qui ne peut prêter à confusion.

On peut alors prouver que l'effort produit au point P dans une direction c , par rapport à l'élément plan de normale extérieure b et dû à une force concentrée F située en Q et agissant dans la direction a est égal à:

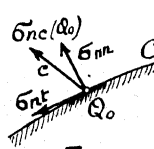
$$\sigma_{bc}^a(Q, P) = \frac{-2F}{\pi} \frac{abc}{r^4} \quad \dots \dots \dots (2)$$

r est égal à la distance entre Q et P .

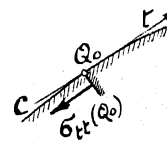
Soit maintenant un disque *simplement connexe sans point anguleux* (fig. 3). Supposons données sur le contour C des surcharges virtuelles réparties $p(Q)$ variant continûment en



— Fig. 3 —



— Fig. 4 —



— Fig. 5 —

grandeur et direction le long de C . Soit Q un point quelconque du contour, ds_Q l'élément de longueur du contour au point Q et $t(Q)$ la tangente au point Q . Soient b et c deux directions quelconques.

L'effort au point intérieur P

$$\sigma_{bc}(P) = \int_C p(Q) \sigma_{bc}^t(Q, P) ds_Q \quad \dots \dots \dots (3)$$

est parfaitement déterminé et continu en tous les points P intérieurs à C . L'abscisse \bar{p} est parallèle au vecteur $p(Q)$.

Lorsque le point P s'approche indéfiniment d'un point du contour Q_0 , la fonction (3) subit les discontinuités suivantes (fig. 4 et 5):

$$\lim_{P=Q_0} \sigma_{nc}(P) = p_c(Q_0) + \int_C p(Q) \bar{\sigma}_{nc}^t(Q, Q_0) ds_Q \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\lim_{P=Q_0} \sigma_{tt}(P) = p_n(Q_0) + \int_C^H p(Q) \bar{\sigma}_{tt}^t(Q, Q_0) ds_Q \quad \dots \dots \dots (5)$$

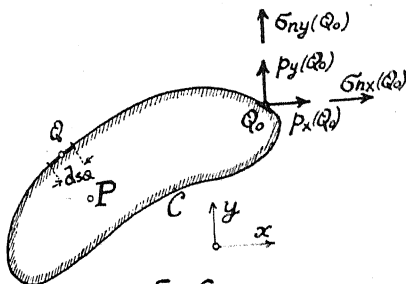
Dans ces formules n est la direction de la normale extérieure au contour C au point Q_0 et t la direction de la tangente au contour au même point, $p_c(Q_0)$ la composante de $p(Q_0)$ dans la direction c et $p_n(Q_0)$ la composante de $p(Q_0)$ dans la direction n . Dans la formule (5), le signe \int^H indique qu'il faut prendre la valeur principale de l'intégrale selon Cauchy. La direction c étant quelconque, on peut la faire successivement égale à n et à t et on obtiendra ainsi les trois composantes habituelles σ_{nn} , σ_{nt} et σ_{tt} de l'effort sur le contour.

§ 2. — Nous allons maintenant appliquer la méthode des équations intégrales au calcul de l'état élastique du disque considéré lorsque les efforts sont donnés sur le contour. Ces efforts

superficiels doivent naturellement former un système en équilibre. Choisissons deux axes orthogonaux x et y , et décomposons les surcharges virtuelles p suivant ces deux axes. Soient p_x et p_y ces deux composantes. (Fig. 6.) La formule (3) devient alors:

$$\sigma_{bc}(P) = \int_C p_x(Q) \sigma_{bc}^x(Q, P) ds_Q + \int_C p_y(Q) \sigma_{bc}^y(Q, P) ds_Q \quad \dots \quad (6)$$

En faisant tendre le point P vers un point quelconque Q_0 du contour, la direction b étant confondue avec la normale extérieure n à C au point Q_0 , la direction c étant faite succes-



— fig. 6 —

sivement parallèle à x et à y , on obtient alors les deux équations suivantes qui donnent les valeurs superficielles de l'effort correspondant aux charges virtuelles p_x et p_y .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nx}(Q_0) &= p_x(Q_0) + \int_C p_x(Q) \sigma_{nx}^x(Q, Q_0) ds_Q + \int_C p_y(Q) \sigma_{nx}^y(Q, Q_0) ds_Q \\ \sigma_{ny}(Q_0) &= p_y(Q_0) + \int_C p_x(Q) \sigma_{ny}^x(Q, Q_0) ds_Q + \int_C p_y(Q) \sigma_{ny}^y(Q, Q_0) ds_Q \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

Inversement, si les composantes σ_{nx} et σ_{ny} des efforts superficiels sont données, on peut prouver que les équations ci-dessus, dites équations intégrales, permettent de déterminer les fonctions inconnues $p_x(Q)$ et $p_y(Q)$.

Pour le calcul numérique approché, on décompose le contour C en un nombre m de segments Δs_i , $i = 1, 2, \dots, m$, le point Q_i étant au milieu de chacun d'eux. Appelons σ_{nxi} et σ_{nyi} les valeurs données de l'effort au point Q_i et p_{xi} et p_{yi} les deux valeurs inconnues en ces points. On déterminera les $2m$ valeurs inconnues p_{xi} , p_{yi} , $i = 1, 2, \dots, m$ par les $2m$ équations linéaires (8) tirées des formules (7) et de la formule générale (2).

$$\left. \begin{aligned} p_{xi} &= \sigma_{nxi} + \frac{2}{\pi} \sum'_{k=1}^m p_{xk} \Delta s_k \frac{x^2 n}{r^4} + \frac{2}{\pi} \sum'_{k=1}^m p_{yk} \Delta s_k \frac{x y n}{r^4} \\ p_{yi} &= \sigma_{nyi} + \frac{2}{\pi} \sum'_{k=1}^m p_{xk} \Delta s_k \frac{x y n}{r^4} + \frac{2}{\pi} \sum'_{k=1}^m p_{yk} \Delta s_k \frac{y^2 n}{r^4} \end{aligned} \right| \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots \quad (8)$$

Le signe Σ' indique que dans la sommation il faut laisser tomber la valeur $k = i$. Il est essentiel de remarquer que l'origine des diverses abscisses x , y et n se trouve successivement aux divers points Q_k par rapport auxquels on effectue la sommation et que la direction n est celle de la normale extérieure au point Q_i .

La résolution directe des équations (8) par élimination ou déterminants est presque impraticable si m est un peu grand; il est beaucoup plus rapide et plus sûr de les résoudre par approximations successives en remarquant que le terme principal de chaque équation est justement le membre de gauche. On obtient la première approximation pour p_{xi} et p_{yi} en posant:

$$p_{xi} = \sigma_{nxi}, \quad p_{yi} = \sigma_{nyi} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

En remplaçant ces valeurs dans les membres de droite de (8), on obtient de nouvelles

valeurs pour p_{xi} et p_{yi} et ainsi de suite. Après quelques calculs successifs, on voit facilement les limites vers lesquelles tendent p_{xi} et p_{yi} .

Les valeurs de p_{xi} et p_{yi} , une fois trouvées, on calcule aussi leurs résultantes $p^i = \sqrt{p_{xi}^2 + p_{yi}^2}$ et l'effort en un point P intérieur du disque vaut d'après la formule (3):

$$\sigma_{bc}(P) = \sum_{i=1}^m p_i \sigma_{bc}^i(Q_i, P) \Delta s_i \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9)$$

formule générale qui permet aussi de calculer les trois composantes ordinaires:

$$\begin{aligned} \sigma_x & \text{ en faisant } b = c = x, \\ \tau & \text{ » » } b = x, c = y \\ \text{et } \sigma_y & \text{ » » } b = c = y. \end{aligned}$$

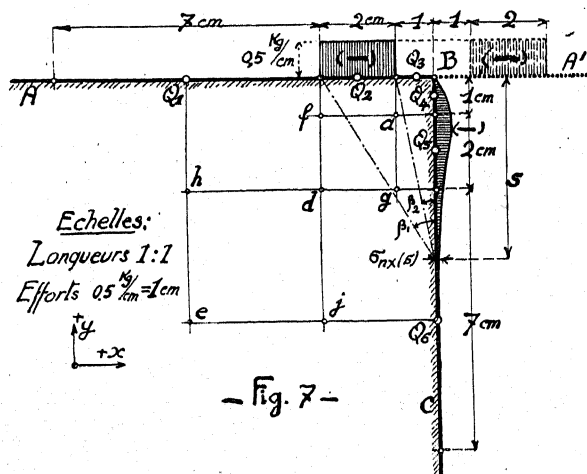
Pour calculer l'effort sur le contour, il faut ajouter encore à la valeur (9) les discontinuités indiquées par les formules (4) ou (5).

§ 3. — La méthode numérique est applicable même dans les cas où la méthode théorique est encore aujourd'hui impuissante, par exemple si le contour est anguleux, de même si le disque est illimité et si les données sont discontinues.

Prenons par exemple le disque compris dans le quart de plan indéfini A, B, C , chargé sur le côté AB par une force verticale de 1 kg. selon le schéma de la figure 7 et le long du côté BC par des pressions réparties selon la loi:

$$\sigma_{nx}(s) = -\frac{1}{\pi} \left[(\beta_1 - \beta_2) - \frac{1}{2} (\sin 2\beta_1 - \sin 2\beta_2) \right] \quad \dots \quad \dots \quad (10)$$

Ce cas de charge a été choisi pour permettre le contrôle de la méthode, car ce disque peut être calculé exactement. En effet, l'état élastique produit est identique à celui résultant de deux charges réparties de 1 kg. agissant symétriquement par rapport au point B sur le demi-plan limité par la droite AA' et l'on connaît les formules résolvant ce problème.



Pour le calcul approché, on a considéré seulement six segments (cf. fig. 7).

Le calcul de l'état élastique effectué pour les 7 points intérieurs a, d, e, f, g, h et j a été trouvé exact à 1 % près. Le calcul des efforts normaux internes le long du contour, moins exact a priori à cause de la forme particulière de l'intégrale de la formule (5) a donné en général jusqu'à 4 % d'erreur.

Vu ces résultats très satisfaisants, nous avons calculé avec plus de précision (erreur probable 0,5 % pour l'intérieur, 2 % pour le contour) un problème non encore élucidé complètement, celui de la répartition d'une pression concentrée agissant dans l'axe d'un prisme de grande longueur (fig. 8, planche IIIa). On rencontre ce cas de charge fréquemment en pratique, spécialement dans le calcul des arcs massifs à trois articulations. La question qui se pose est de savoir à quelle distance de l'extrémité, l'état de compression homogène du prisme est pratiquement établi.

Le calcul indique pour cette distance la largeur du prisme et non la demi-largeur comme on l'a cru quelquefois. A cette dernière distance, en effet, la compression dans l'axe du prisme est encore plus du triple de celles le long des deux faces. Il y a lieu de remarquer aussi la zone de traction le long de l'axe.

Indiquons aussi qu'il serait fort simple de déduire sans grands calculs les légères variations de tensions qui se produiraient si la largeur de la zone comprimée à l'extrémité du prisme variait de dimensions.

Un autre problème intéressant est celui de l'écrasement d'un cube fragile (par exemple en ciment) entre deux mâchoires pratiquement indéformables et qui empêchent le gonflement latéral sur les deux faces comprimées. Les données pour ce problème sont un peu autres, on se donne les efforts sur les faces latérales (égaux à zéro) et les déplacements sur les faces comprimées. Nous ne développerons pas les formules qui s'appliquent à ce cas, mais nous discuterons seulement les résultats valables pour un prisme quadratique épais (fig. 9):

L'effet de la friction due aux mâchoires disparaît à peu près au centre du cube. (Cf. le diagramme des efforts normaux horizontaux.) L'effort aux quatre coins du cube ne pouvant *en pratique* admettre de singularité doit être nul. En effet, l'arête d'un corps réel est toujours légèrement arrondie. Le rapport des cisaillements aux efforts normaux sur les mâchoires reste notoirement inférieur aux coefficients de frottement usuels, d'où il résulte qu'aucun glissement ne se produira.

On admet aujourd'hui que le cisaillement réel diminué du produit de la compression normale par le coefficient de frottement interne admis donne une mesure effective du cisaillement produisant la rupture des corps fragiles. Plus exactement on appelle *cisaillement effectif* en un point la valeur maximum de la différence ci-dessus quand on considère toutes les directions possibles autour du point. En chaque point il y a ordinairement deux directions pour lesquelles le cisaillement effectif est atteint. Les lignes tangentes à ces directions sont les lignes de rupture. Les lignes de tensions principales bissectent les lignes de rupture.

Le coefficient de frottement interne ayant été admis égal à 1 d'après certains essais de Considère sur l'écrasement des primes soumis à une compression latérale, on en déduit facilement l'angle de $22^{\circ} 30'$ entre les lignes de compression principale et les deux lignes de rupture correspondantes. (Voir la moitié de droite de la figure 9, planche IIIa.) Les lignes de rupture probable seront vraisemblablement celles pour lesquelles la valeur moyenne du cisaillement effectif tout le long de la ligne sera maximum. Cette valeur moyenne étant d'ailleurs notablement inférieure à la valeur du cisaillement effectif sans friction sur les bases, on expliquerait ainsi et l'origine de la double pyramide lors de l'écrasement et l'accroissement de résistance des cubes à la compression par rapport aux primes plus allongés.

Pour terminer, notons que la méthode des équations intégrales s'applique à beaucoup d'autres problèmes, par exemple aux disques multiplement connexes, aux plaques chargées normalement à leur plan etc., mais les formules et par conséquent les calculs seraient passablement plus longs.

Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren

Von E. Trefftz, Dresden

Wenn man zur Lösung der ersten Randwertaufgabe (gegebene Randwerte) partieller Differentialgleichungen das sogenannte «Ritzsche Verfahren» benutzt, welches die Minaleigenschaften der Lösung zu ihrer zahlenmäßigen Darstellung heranzieht, so ist das naturgemäße Maß für die Güte der Annäherung der Betrag, um welchen das für die Näherungsfunktion berechnete Minimalintegral von dem durch die wahre Lösung erreichten Minimalwerte abweicht. Das Ritzsche Verfahren liefert aber zunächst keine Möglichkeit, diese Abweichung zu bestimmen oder wenigstens in Grenzen einzuschließen, denn da alle Näherungswerte für das Minimalintegral zu groß sind, wird für den wahren Wert desselben nur eine obere, aber keine untere Grenze gefunden. — Es ist das Ziel der folgenden Betrachtungen, ein Analogon zum Ritzschen Verfahren aufzuzeigen, durch welches der Wert des Minimalintegrals von unten approximiert wird, so daß durch das Verfahren von RITZ einerseits und das neue Verfahren andererseits das Minimalintegral in Grenzen eingeschlossen wird. Für die praktische Rechnung ist das in allen den Fällen von besonderer Wichtigkeit, wo es in erster Linie auf den Wert dieses Integrals ankommt.

Der Einfachheit wegen lege ich meine Methode am Beispiel der ersten Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie dar, sie läßt sich ohne weiteres auf andere Differentialgleichungen übertragen.

Haben wir die Aufgabe, die Potentialfunktion u zu bestimmen, welche auf der Randkurve K eines gegebenen Gebietes G die vorgeschriebenen Randwerte $u = g(s)$ annimmt, so verfahren wir nach RITZ folgendermaßen:

Wir setzen die Näherungslösung in der Form

$$v(x, y) = g(x, y) + \sum_1^n c_h q_h(x, y) \quad \dots \dots \dots (1)$$

an, wo $g(x, y)$ eine Funktion ist, welche die vorgeschriebenen Randwerte auf K annimmt, und die $q_h(x, y)$ Funktionen sind, welche auf K verschwinden. $v(x, y)$ erfüllt dann für beliebige Werte der Koeffizienten c die Randbedingungen, die c_h werden so bestimmt, daß das für v gebildete DIRICHLETSche Integral möglichst klein wird. Bezeichnen wir jetzt mit $f(x, y)$ den Fehler der Approximation

$$f(x, y) = v(x, y) - u(x, y) \quad \dots \dots \dots (2)$$

so wird auf dem Rande $f = 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint \text{grad}^2 v \, dx \, dy &= \iint \text{grad}^2 u \, dx \, dy + 2 \iint \text{grad} u \, \text{grad} f \, dx \, dy + \iint \text{grad}^2 f \, dx \, dy \\ &= \iint \text{grad}^2 u \, dx \, dy + \iint \text{grad}^2 f \, dx \, dy \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{da das Integral } \int \int \text{grad} u \, \text{grad} f \, dx \, dy = \int_k f \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds - \int \int f \Delta u \, dx \, dy = 0 \dots \dots \dots (4)$$

verschwindet; (ν ist die äußere Normale der Randkurve).

Dies führt uns zu einer etwas modifizierten Form des Minimalproblems. Da nämlich das DIRICHLETSche Integral $\iint \text{grad}^2 v \, dx \, dy$ und das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten $\iint \text{grad}^2 f \, dx \, dy$ sich nur um den konstanten Wert des DIRICHLETSchen Integrals der wahren Lösung unterscheiden, so wird bei dem Ritzschen Verfahren mit dem Integral $\iint \text{grad}^2 v \, dx \, dy$ auch das Integral $F = \iint \text{grad}^2 f \, dx \, dy$ ein Minimum. Das Ritzsche Verfahren

liefert also unter allen Funktionen der Form (1) diejenige, für welche das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten ein Minimum wird.

Wenn wir von dieser Formulierung ausgehen, kommen wir sofort zu einem Analogon des Ritzschen Verfahrens, indem wir die Lösung nicht wie bei Ritz durch Funktionen approximieren, welche den Randbedingungen genügen, aber die Differentialgleichung nicht erfüllen, sondern solche Funktionen nehmen, welche die Differentialgleichung befriedigen, aber nicht die Randbedingung. Das ist offenbar eine Verallgemeinerung der klassischen Methode der Entwicklung nach Partikularlösungen — tatsächlich sind die bekannten Reihenentwicklungen als Spezialfälle in unserer Methode enthalten.

Wir machen also einen Ansatz

$$w(x, y) = \sum_1^n c_h p_h(x, y) \quad \dots \quad (5)$$

wo die $p_h(x, y)$ Potentialfunktionen sind, und bestimmen die Koeffizienten c so, daß das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten

$$F = \iint \text{grad}^2 f \, dx \, dy = \iint \text{grad}^2 (w - u) \, dx \, dy \quad \dots \quad (6)$$

möglichst klein wird (u ist die wahre Lösung). Es muß also

$$\frac{\partial F}{\partial c_h} = 2 \iint \text{grad} (w - u) \text{grad} \frac{\partial w}{\partial c_h} \, dx \, dy = 0 \quad \dots \quad (7)$$

sein. Hier ist

$$\frac{\partial w}{\partial c_h} = p_h(x, y) \quad \dots \quad (8)$$

Eine Integration nach dem GAUSSschen Satze liefert, wenn v die äußere Normale ist,

$$\left. \begin{aligned} \iint \text{grad} (w - u) \text{grad} p_h \, dx \, dy &= \int_K (w - u) \frac{\partial p_h}{\partial v} \, ds = 0 \\ \sum_1^n c_p \int p_p \frac{\partial p_h}{\partial v} \, ds &= \int g(s) \frac{\partial p_h}{\partial v} \, ds \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

dies sind n lineare Gleichungen für die n Koeffizienten c , da auf dem Rande die Werte von $u = g(s)$ gegeben sind.

Daß bei dieser Art der Approximation das DIRICHLETSche Integral zu klein herauskommt, ist von vornherein zu erwarten, weil das bei den klassischen Reihenentwicklungen stets der Fall ist, eine einfache Rechnung bestätigt es. Es ist, wenn wieder f den Fehler bezeichnet

$$\iint \text{grad}^2 u \, dx \, dy = \iint \text{grad}^2 w \, dx \, dy - 2 \iint \text{grad} w \text{grad} f \, dx \, dy + \iint \text{grad}^2 f \, dx \, dy$$

Das mittlere Integral der rechten Seite verschwindet, denn es ist

$$\iint \text{grad} w \text{grad} f \, dx \, dy = \int_K f \frac{\partial w}{\partial v} \, ds = \sum c_p \int (w - u) \frac{\partial p_p}{\partial v} \, ds \quad \dots \quad (10)$$

und die c_p waren gerade so bestimmt, daß dies null wird. Also wird

$$\iint \text{grad}^2 w \, dx \, dy = \iint \text{grad}^2 u \, dx \, dy - \iint \text{grad}^2 f \, dx \, dy \leq \iint \text{grad}^2 u \, dx \, dy \quad \dots \quad (11)$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Für die praktische Rechnung hat unser Verfahren vor dem Ritzschen den Vorzug, daß man keine Funktion zu suchen hat, welche die Randbedingungen befriedigt, was nicht immer einfach ist. Außerdem ist die Fehlerschätzung vereinfacht: der größte Fehler liegt auf der Randkurve. Der Konvergenzbeweis ist, wenn man die Existenz der Lösung voraussetzt, leicht zu führen, mit den Funktionswerten konvergieren auch sämtliche Ableitungen im Innern des Gebietes.

Man kann sowohl die Ritzsche als die neue Methode noch etwas erweitern, wenn man im Innern des Gebietes Unstetigkeiten zuläßt. Ich will das nur an einem ganz einfachen Beispiel erläutern, weil diese Ueberlegungen nur bei einfachen Fällen praktische Bedeutung besitzen. Wir nehmen an, das Gebiet, für welches die Randwertaufgabe zu lösen ist, bestehe aus zwei Rechtecken, welche längs einer Strecke $A—B$ zusammenstoßen (etwa der Querschnitt eines T-Trägers). Diejenigen Randstücke der Rechtecke, wo sie nicht aneinanderstoßen, nennen wir den «Außenrand», die Strecke $A—B$ den «Innenrand». Das Koordinatensystem legen wir so, daß A der Koordinatenanfang ist, B (bei $x = b$) auf der x -Achse liegt.

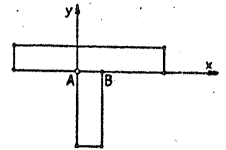


Abb. 1.

Ritzsches Verfahren. Wären längs $A—B$ die Funktionswerte u bekannt, so wäre die Randwertaufgabe durch Einzelbehandlung der beiden Rechtecke zu lösen. Da sie nicht bekannt sind, so approximieren wir sie mit zunächst unbekannten Koeffizienten durch geeignete Funktionen h_0, h_1 usw. in der Form

$$v(x) = h_0 + \sum_1^n c_p h_p(x) \quad \dots \dots \dots (12)$$

Jetzt bestimmen wir die Potentialfunktionen q_0, q_1, q_2 usw., welche die folgenden Randbedingungen erfüllen

$$\left. \begin{array}{l} q_0 \text{ habe am Außenrand die vorgeschriebenen Randwerte, am Innenrand } A—B \text{ die Werte } 0 \\ q_p \text{ habe am Außenrand die Werte } 0, \text{ am Innenrand } A—B \text{ die Werte } h_p(x). \end{array} \right\} (13)$$

Diese Funktionen $q_p(x, y)$ sind für jedes Rechteck durch Lösung der Randwertaufgabe in bekannter Weise zu finden. Längs $A—B$ sind sie zwar stetig, haben aber einen Sprung in der Normalableitung. Nun nehmen wir als Näherungslösung

$$v(x, y) = q_0(x, y) + \sum_1^n c_p q_p(x, y) \quad \dots \dots \dots (14)$$

und bestimmen die Koeffizienten c so, daß das DIRICHLETSche Integral für das Gesamtgebiet einen möglichst kleinen Wert bekommt. Der Wert dieses Integrals wird für die Näherungslösung zu groß, da jede stetige und stückweise differenzierbare Funktion, welche die Randwerte am Außenrand annimmt, einen zu großen Wert des Minimalintegrals liefert, wenn sie nicht die Lösung darstellt.

Analogie zum Ritzschen Verfahren. Wären längs $A—B$ die Werte der Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$ bekannt, so wäre wieder die Randwertaufgabe durch Einzelbehandlung der beiden Rechtecke lösbar. Da sie nicht bekannt sind, so approximieren wir sie mit zunächst unbekannten Beiwerten durch geeignete Funktionen k_1, k_2 usw. in der Form

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum c_p k_p(x) \quad \dots \dots \dots (15)$$

und bestimmen die Potentialfunktionen p_0, p_1, p_2 usw., welche die folgenden Randbedingungen erfüllen

$$\left. \begin{array}{l} \rho_0 \text{ habe am Außenrande die vorgeschriebenen Randwerte,} \\ \text{am Innenrande } A-B \text{ die Werte der Normalableitung } \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} = 0 \\ \rho_p \text{ habe am Außenrande die Werte } 0, \\ \text{am Innenrande die Werte der Normalableitung } \frac{\partial \rho_p}{\partial \nu} = k_p(x) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Diese Funktionen sind für jedes Rechteck nach bekannten Methoden zu finden, sie sind längs $A-B$ unstetig, haben aber daselbst stetige Normalableitung. Nun nehmen wir als Näherungslösung

$$w(x, y) = \rho_0(x, y) + \sum_1^n c_p \rho_p(x, y) \dots \dots \dots (17)$$

und bestimmen die Koeffizienten c so, daß das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten

$$F = \iint \text{grad}^2 (w - u) dx dy$$

möglichst klein wird, wo u wieder die wahre Lösung sei. Das liefert die Bedingung:

$$\iint \text{grad} (w - u) \text{ grad } \rho_h(x, y) dx dy = 0 \dots \dots \dots (18)$$

Dieses Integral wird durch partielle Integration umgeformt. Da sowohl u als w Potentialfunktionen sind, fallen die Flächenintegrale fort, es bleibt bloß das um beide Rechtecke zu erstreckende Randintegral

$$\int (w - u) \frac{\partial \rho_h}{\partial \nu} ds = 0 \dots \dots \dots (19)$$

übrig. Von diesem fallen wieder die über den «Außenrand» zu nehmenden Teile fort, weil hier $u = w$ ist, so daß das Integral nur noch über die Strecke $A-B$ zu nehmen ist, und zwar je einmal für jedes Rechteck. Bezeichnen wir die Werte der Funktionen $\rho_h(x, y)$ mit $\rho_h^{(1)}(x, y)$ und $\rho_h^{(2)}(x, y)$, je nachdem wir uns der Strecke $A-B$ von dem Rechteck 1 oder dem Rechteck 2 her nähern, so wird das Integral, da für das Rechteck 1 (siehe die Abb.)

$$\frac{\partial \rho_h}{\partial \nu} = \frac{\partial \rho_h}{\partial y} = k_h \dots \dots \dots (20^I)$$

für das Rechteck 2

$$\frac{\partial \rho_h}{\partial \nu} = - \frac{\partial \rho_h}{\partial y} = -k_h \dots \dots \dots (20^{II})$$

ist,

$$\int_A^B (w^{(1)} - u) k_h dx - \int_A^B (w^{(2)} - u) k_h dx = \int_A^B (w^{(1)} - w^{(2)}) k_h dx = 0 \dots \dots (21)$$

Die unbekannten Werte von u heben sich also wegen der Stetigkeit der Normalableitung heraus, und es bleiben zur Bestimmung der Koeffizienten c_h die Gleichungen

$$\int_A^B \left\{ \rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)} + \sum_1^n c_p (\rho_p^{(1)} - \rho_p^{(2)}) \right\} k_h dx = 0 \dots \dots \dots (22)$$

übrig. Daß das DIRICHLETSche Integral wirklich zu klein wird, folgt aus den gleichen partiellen Integrationen, die zu diesen Gleichungen geführt haben. Es ist nämlich

$$\iint \text{grad}^2 u dx dy = \iint \text{grad}^2 w dx dy - 2 \iint \text{grad } w \text{ grad } (w - u) dx dy + \iint \text{grad}^2 (w - u) dx dy$$

Das mittlere Integral der rechten Seite wird

$$\iint \text{grad} (w - u) \text{ grad } \rho_0 dx dy + \sum c_p \iint \text{grad} (w - u) \text{ grad } \rho_p dx dy$$

Die Summe verschwindet nach Gleichung (18). Das erste Integral wird gleich dem Randintegral

$$\int (w - u) \frac{\partial p_0}{\partial v} ds$$

und dieses verschwindet, da am Außenrande $w = u$ und längs $A-B$ $\frac{\partial p_0}{\partial v} = 0$ ist.

Also ist tatsächlich

$$\iint \text{grad}^2 w \, dx \, dy = \iint \text{grad}^2 u \, dx \, dy - \iint \text{grad}^2 (w - u) \, dx \, dy \leq \iint \text{grad}^2 u \, dx \, dy \quad (23)$$

Anwendungen. Berechnung der Torsionsfestigkeit prismatischer Stäbe.

Zur Erläuterung des Gesagten nehmen wir zunächst ein ganz einfaches Beispiel, die Berechnung der Torsionsfestigkeit eines Stabes von quadratischem Querschnitt. Gegeben sei ein prismatischer Stab, der durch ein Torsionsmoment M auf Verdrehung beansprucht sei. In den quadratischen Querschnitt legen wir ein Koordinatensystem derart, daß der Koordinatenanfang mit dem Mittelpunkt des Quadrates zusammenfällt und die Axen den Seiten parallel sind. Die Länge der Seiten sei $2a$. Die von den Querschnittsebenen übertragenen Schubspannungen lassen sich dann durch eine Spannungsfunktion in der Form

$$\tau_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \tau_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \dots \dots \dots (24)$$

ableiten. Das Gleichgewicht der Randelemente erfordert am Rande $\psi = \text{const}$ oder, da diese Konstante unwesentlich ist,

$$\psi = 0 \quad \dots \dots \dots (25)$$

Zur Bestimmung von ψ haben wir das folgende Variationsproblem: Es ist die Funktion ψ mit den Randwerten $\psi = 0$ so zu bestimmen, daß bei gegebenem Torsionsmoment

$$M = \int \int (x \tau_y - y \tau_x) \, dx \, dy = \int \int \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (26)$$

die Formänderungsarbeit pro Längeneinheit des Stabes

$$A = \frac{1}{2G} \int \int (\tau_x^2 + \tau_y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2G} \int \int \text{grad}^2 \psi \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (27)$$

möglichst klein wird. Ist dies Variationsproblem gelöst, so erhalten wir die Verdrehung ω der Längeneinheit aus der Beziehung

$$2A = M \cdot \omega \quad \dots \dots \dots (28)$$

Zur Bestimmung von ω genügt also die Kenntnis des Minimalintegrals bei gegebenem Moment M .

Ansatz nach Ritz. Machen wir unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen und der Randbedingung den Ansatz

$$\psi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \{ \alpha a^2 + \beta (x^2 + y^2) \} \quad \dots \dots \dots (29)$$

so wird das Torsionsmoment

$$M = \frac{16}{45} a^8 \{ 10\alpha + 4\beta \} \quad \dots \dots \dots (30)$$

und die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{128 a^{12}}{7 \cdot 5^2 \cdot 3^3} \frac{1}{G} \{ 105\alpha^2 + 72\alpha\beta + 44\beta^2 \} \quad \dots \dots \dots (31)$$

Bestimmen wir α und β so, daß bei gegebenem Moment die Formänderungsarbeit möglichst klein wird, so erhalten wir

$$\alpha = \frac{74\lambda}{831}, \beta = \frac{15\lambda}{831} \dots \dots \dots (32)$$

wo λ ein LAGRANGEScher Faktor ist, der sich aus dem gegebenen Moment zu

$$\lambda = \frac{45 \cdot 831}{16 \cdot 800} \frac{M}{a^3} \dots \dots \dots (33)$$

berechnet. Eliminieren wir λ , so ergibt sich

$$2A = \frac{6 \times 6648}{700 \times 128} \frac{M^2}{Ga^3} \dots \dots \dots (34)$$

Dieser Näherungswert für A ist sicher zu groß. Bezeichnen wir den wahren Wert durch einen Stern, so ist also

$$2A^* = M \cdot \omega < 0.4452 \frac{M^2}{Ga^3} \dots \dots \dots (35)$$

oder

$$\omega < 0.4452 \frac{M}{Ga^3} \dots \dots \dots (36)$$

Das Verfahren des Verfassers. Das Minimalproblem ist gleichwertig mit der Aufgabe, die Differentialgleichung

$$\Delta \psi = \text{const}$$

für die Randbedingung $\psi = 0$ zu integrieren.

Setzen wir also

$$\psi = C \{ a^2 r^2 - u \} \dots \dots \dots (37)$$

(C ist dabei der LAGRANGESche Faktor für die Nebenbedingung des Variationsproblems), so ist die Potentialfunktion u so zu bestimmen, daß sie auf dem Rande die Werte $a^2 \cdot r^2$ annimmt. Wir machen unter Berücksichtigung der Symmetrie den Näherungsansatz

$$\psi = C \{ a^2 r^2 + \alpha (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \} \dots \dots \dots (38)$$

Der Koeffizient α bestimmt sich, wenn wir $x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 = \rho$ setzen, nach dem oben gegebenen Verfahren aus der Bedingung, daß das über den Rand zu erstreckende Integral

$$\int \{ a^2 r^2 + \alpha \rho \} \frac{\partial \rho}{\partial v} ds = 0 \dots \dots \dots (39)$$

wird. Die Ausführung der Rechnung liefert

$$\alpha = 7/36 \dots \dots \dots (40)$$

Daraus folgt

$$M = \frac{8 \times 76}{135} Ca^3 \dots \dots \dots (41)$$

und

$$2A = \frac{8 \cdot 456}{3 \cdot 135} \frac{C^2 a^3}{G} \dots \dots \dots (42)$$

also nach Elimination von C

$$2A = \frac{135}{304} \frac{M^2}{Ga^4} \dots \dots \dots (43)$$

Dieser Näherungswert ist sicher zu klein, der wahre Wert $2A^*$ wird also

$$2A^* = M \cdot \omega > 0.4441 \frac{M^2}{Ga^4} \dots \dots \dots (44)$$

Nehmen wir also als Näherungswert

$$\omega = 0.4446 \frac{M}{Ga^4} \dots \dots \dots (45)$$

so ist der Fehler kleiner als 1,4 % oder $\frac{1}{7}$ %.

Das Winkeleisen. Nach der oben angegebenen Erweiterung habe ich ferner in erster Näherung die Torsionsfestigkeit eines gleichschenkligen Winkeleisens abgeschätzt und zwar für den bei normalen Profilen vorkommenden ungünstigsten Fall, wo das Verhältnis der Schenkelbreite zur Schenkellänge 1 : 5 ist. Ich lege das Koordinatensystem entlang den Innenkanten der Schenkel mit dem Anfangspunkt in der inneren Ecke. Von der Abrundung der Ecken wird abgesehen.

Zunächst berechne ich die Formänderungsarbeit bei gegebenem Moment so, als ob das Winkeleisen aus zwei getrennten, längs $O-A$ (siehe Abb. 2) zusammenstoßenden Rechtecken bestünde. Das ergibt eine Spannungsfunktion, die längs $O-A$ statt der wahren Werte den Wert Null annimmt, aber stetig und in beiden Rechtecken differenzierbar ist. Sie ist also eine für das Minimalproblem konkurrenzfähige Funktion im Sinne des RITZschen Verfahrens und liefert somit einen zu großen Wert für die Formänderungsarbeit. Die Ausrechnung ergibt

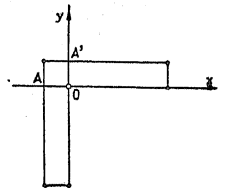


Abb. 2.

$$\omega < 0.388 \frac{M}{Ga^4} \dots \dots \dots (46)$$

Setzen wir jetzt das Gebiet aus zwei Rechtecken und einem Quadrat zusammen, die längs $O-A$ und $O-A'$ zusammenstoßen, und bestimmen die Spannungsfunktionen in den Teilgebieten so, daß an den Trennungslinien die Normalableitung verschwindet, so erhalten wir — wie man am besten durch direkte Rechnung bestätigt, — einen zu kleinen Wert für A . Diese Spannungsfunktion ist in den beiden Rechtecken gleich der Spannungsfunktion für ein Rechteck von doppelter Länge, im Quadrat gleich der Spannungsfunktion des Quadrates von doppelter Seitenlänge, also aus den bekannten Formeln für das Rechteck zu gewinnen. Die Ausrechnung ergibt

$$\omega > 0.332 \frac{M}{Ga^4} \dots \dots \dots (47)$$

Setzen wir also als Näherungswert das Mittel aus dem zu großen und dem zu kleinen Wert an

$$\omega = 0.360 \frac{M}{Ga^4} \dots \dots \dots (48)$$

so ist der Fehler in diesem ungünstigen Falle kleiner als 8 %, was bei der Unsicherheit, mit der im allgemeinen der Schubmodul G nur gegeben ist, in vielen Fällen ausreichen dürfte. Es ist eine geringe Mühe, eine bessere Approximation zu erzielen.

Ueber die Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts

Von E. Schwerin, Berlin-Halensee

Das Problem der Transversalschwingungen von Stäben ungleichförmigen Querschnitts ist seit KIRCHHOFFS berühmter Abhandlung ¹⁾ Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. VOGEL ²⁾ und MAYER ZUR CAPELLEN ³⁾ behandelten insbesondere die Schwingungen keilförmiger Stäbe; MORROW ⁴⁾ entwickelte ein Verfahren sukzessiver Näherung und MONONOBE ⁵⁾ untersuchte kegelförmige Stäbe.

In neuester Zeit hat HORT ⁶⁾ für die Bestimmung der Eigenfrequenzen schwachverjüngter Stäbe ein auf RAYLEIGHSCHE Gedankengänge zurückgehendes, praktisch brauchbares Verfahren entwickelt, das jedoch bei sehr großer Veränderlichkeit des Querschnitts, wie sie z. B. bei den Schaufeln des neuzeitlichen Dampfturbinenbaues häufig vorkommt, nicht mehr genau genug ist. Es sei daher im folgenden ein Verfahren entwickelt, das sich auf die Theorie der Integralgleichungen mit Kernen vom Polynom-Typus stützt und auch für starkverjüngte Stäbe geeignet ist; dieses Verfahren besitzt auch den Vorzug, daß es sich auf den praktisch wichtigen Fall des Stabes mit elastischer Einspannung leicht verallgemeinern läßt.

A. Einseitig starr eingespannter Stab mit freiem Ende

1. Aufstellung der Grundgleichungen.

Für den an einem Ende eingespannten, am anderen freien Stab möge bezeichnen (Abb. 1):

$q(x)$ = den Querschnitt an der Stelle x ,

q_0 = den Querschnitt an der Stelle $x = 0$,

$J(x)$ = das Trägheitsmoment an der Stelle x ,

J_0 = das Trägheitsmoment an der Stelle $x = 0$,

l = die Stablänge,

E = den Elastizitätsmodul des Stabmaterials,

$\rho = \gamma/g$ = die Dichte des Stabmaterials,

$f(x, \xi)$ = die Durchbiegung an der Stelle x infolge $P = 1$ an der Stelle ξ ,

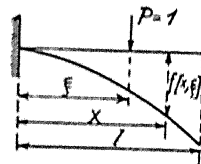


Abb. 1.

ferner:

$$\bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{l}; \quad \bar{y} = \frac{y}{l}$$

Dann lautet die bekannte Integralgleichung für die Auslenkung z des transversal schwingenden Stabes veränderlichen Querschnitts, jedoch konstanter Dichte:

$$z(\bar{x}) = \lambda \int_0^1 \varphi(\bar{\xi}) z(\bar{\xi}) K(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad \dots \quad (1)$$

worin, wenn p die Kreisfrequenz der Schwingung ist:

¹⁾ Wied. Ann. 10 (1880), S. 501.

²⁾ F. Vogel, Diss., Berlin 1881.

³⁾ Wied. Ann. 33 (1881), S. 661.

⁴⁾ Phil. Mag. 10 (1905), S. 113.

⁵⁾ Z. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 1, Heft 6, S. 449.

⁶⁾ Dffgl. d. Ingenieurs, S. 376 und Proc. of the Int. Congr. f. Appl. Mech. Delft 1924.

$$\lambda = \frac{\rho q_0 l^4}{E \mathcal{J}_0} \cdot p^2 \quad \text{der Eigenwert der Integralgleichung (I)}$$

$$K(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{E \mathcal{J}_0}{\beta^3} \cdot f(\bar{x}, \bar{\xi}) \quad \text{» Kern » (I) ... (1a)}$$

$$\varphi(\bar{\xi}) = \frac{q(\bar{\xi})}{q_0} = \text{Querschnittsverlauf des Stabes.}$$

Um nun die Kernfunktion $K(\bar{x}, \bar{\xi})$ im vorliegenden Falle zu bestimmen, beachten wir, daß die Durchbiegung $f(x, \xi)$ in x infolge von $P = 1$ in ξ nach Mohr aufgefaßt werden kann, als das $\frac{1}{E}$ -fache statische Moment der zugehörigen, im Verhältnis des veränderlichen Trägheitsmoments reduzierten Momentenfläche in bezug auf den Querschnitt in x . Auf diese Weise erhält man (Abb. 2):

$$f(x, \xi) = \frac{1}{E} \int_0^{\xi} \frac{1}{\mathcal{J}} (\xi - u) (x - u) du \quad \dots \quad (2)$$

Zwecks weiterer Auswertung wollen wir nun noch annehmen, daß gesetzt werden kann:

$$\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}} = 1 + a \bar{u} + b \bar{u}^2 \quad \left(\bar{u} = \frac{u}{l} \right) \quad \dots \quad (3)$$

d. h. daß das reziproke Trägheitsmomentverhältnis durch eine Ausgleichsparabel hinreichend genau dargestellt werden kann, was z. B. für die Schaufeln des neuzeitlichen Dampfturbinenbaues

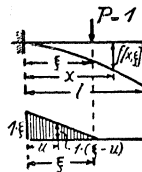


Abb. 2.

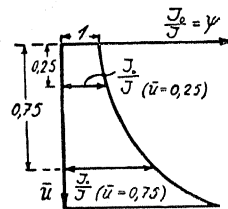


Abb. 3.

stets zutrifft, wenn über die Parameter a, b in geeigneter Weise verfügt wird. Hierbei hat sich als zweckmäßig erwiesen, a und b so zu bestimmen, daß an den Stellen $\bar{u} = 0,25$ und $0,75$ die wirklichen Werte von $\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}}$ mit den Näherungswerten übereinstimmen, d. h. zu setzen (Abb. 3):

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{16}{3} + 6 \left(\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}} \right)_{\bar{u}=0,25} - \frac{2}{3} \left(\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}} \right)_{\bar{u}=0,75} \\ b &= +\frac{16}{3} - 8 \left(\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}} \right)_{\bar{u}=0,25} + \frac{8}{3} \left(\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}} \right)_{\bar{u}=0,75} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3a)$$

Bei Einführung von (3) folgt aus (2):

$$\left. \begin{aligned} f(x, \xi) &= \frac{l^3}{E \mathcal{J}_0} \left[\bar{x} \left(\frac{\bar{\xi}^2}{2} + \frac{a \bar{\xi}^3}{6} + \frac{b \bar{\xi}^4}{12} \right) - \left(\frac{\bar{\xi}^3}{6} + \frac{a \bar{\xi}^4}{12} + \frac{b \bar{\xi}^5}{20} \right) \right] \bar{x} > \bar{\xi} \\ \text{und nach Maxwell:} \\ f(x, \xi) &= \frac{l^3}{E \mathcal{J}_0} \left[\bar{\xi} \left(\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{a \bar{x}^3}{6} + \frac{b \bar{x}^4}{12} \right) - \left(\frac{\bar{x}^3}{6} + \frac{a \bar{x}^4}{12} + \frac{b \bar{x}^5}{20} \right) \right] \bar{x} < \bar{\xi} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2a)$$

und es läßt sich daher der Kern $K(\bar{x}, \bar{\xi})$ nach (1a) in der Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} K(\bar{x}, \bar{\xi}) &= f_0(\bar{\xi}) + \bar{x} \cdot f_1(\bar{\xi}) & x > \bar{\xi} \\ &= \bar{x}^2 \cdot f_2(\bar{\xi}) + \bar{x}^3 \cdot f_3(\bar{\xi}) + \bar{x}^4 \cdot f_4(\bar{\xi}) + \bar{x}^5 \cdot f_5(\bar{\xi}) & x < \bar{\xi} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

wo:

$$\begin{aligned} f_0(\bar{\xi}) &= -\frac{\bar{\xi}^3}{6} - \frac{a\bar{\xi}^4}{12} - \frac{b\bar{\xi}^5}{20} & f_1(\bar{\xi}) &= \frac{\bar{\xi}^2}{2} + \frac{a\bar{\xi}^3}{6} + \frac{b\bar{\xi}^4}{12} \\ f_2(\bar{\xi}) &= \frac{\bar{\xi}}{2} & f_3(\bar{\xi}) &= \frac{a\bar{\xi} - 1}{6} & f_4(\bar{\xi}) &= \frac{b\bar{\xi} - a}{12} & f_5(\bar{\xi}) &= -\frac{b}{20} \end{aligned}$$

II. Entwicklung der Kernfunktion in eine Fouriersche Reihe.

Um nun die Integralgleichung (1) mit dem Kern (4) zu lösen, soll hier das GOURSATSche ⁷⁾ Verfahren angewendet werden, das darin besteht, den Kern, der hier (Abb. 4) aus einem gekrümmten, in $x = 0$ eine horizontale Tangente besitzenden Zweig $A-B$ und einem in B tangential sich anschließenden Stück $B-C$ besteht, in eine nach Vielfachem von x fort-

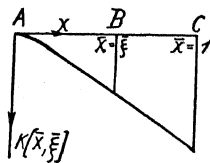


Abb. 4.

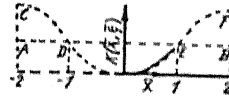


Abb. 5.

schreitende Fouriersche Reihe zu entwickeln. Hiedurch erreicht man, daß der Kern durch eine einzige für den ganzen Integrationsbereich gültige Funktion dargestellt wird, also die Trennung des ganzen Bereichs in die beiden Zweige $\bar{x} < \bar{\xi}$ und $\bar{x} > \bar{\xi}$ entfällt. Da dann jedes Glied jener Reihe aus dem Produkt einer Funktion von $\bar{\xi}$ und einer solchen von \bar{x} besteht, kann die allgemeine Theorie der Integralgleichungen mit Kernen vom Polynom-Typus in Anwendung gebracht werden.

Bei der Lösung der Gleichung (1) nach diesem Verfahren würde man jedoch, wenn der Kern (4) in üblicher Weise in eine Fourier-Reihe mit einer der reduzierten Stablänge entsprechenden Periode entwickelt wird, infolge ungenügender Konvergenz der ersteren so vieler Glieder zur Erreichung genügender Genauigkeit bedürfen, daß die praktische Brauchbarkeit in Frage gestellt wird. Hingegen gelingt es — und dieser Gedanke liegt dem folgenden zugrunde — eine rasche Konvergenz dadurch zu erreichen, daß man als Periodenlänge nicht die reduzierte Stablänge, sondern das Vierfache derselben ansieht, also nach Abb. 5 den Kern zwischen 0 und 1 als Teil der schon nahezu sinusförmigen Kurve $FDOCE$ auffaßt. Infolge der Symmetrie dieser Kurve in bezug auf die Einspannstelle sowie in bezug auf die Achse $A-B$ ergibt sich eine nur die Cosinus der ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}$ enthaltende Reihe, die wie schon aus Abb. 5 ersichtlich, rasch konvergieren muß.

Setzt man demnach an:

$$K(\bar{x}, \bar{\xi}) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m+1} \cos(2m+1) \frac{\pi}{2} \cdot \bar{x} \dots \dots \dots (5)$$

wo:

$$b_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^{+2} K(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{x} \quad b_{2m+1} = \frac{1}{2} \int_{-2}^{+2} K(\bar{x}, \bar{\xi}) \cos(2m+1) \frac{\pi}{2} \bar{x} d\bar{x}$$

⁷⁾ Vgl. z. B. Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Diff. u. Integralgl. d. Mech. u. Phys., III. Abschn.

so ergibt sich in längerer Rechnung folgende Fourierdarstellung des Kerns:

$$K(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{\bar{\xi}^2}{2} + \frac{a-1}{6} \cdot \bar{\xi}^3 + \frac{b-a}{12} \cdot \bar{\xi}^4 - \frac{b}{20} \cdot \bar{\xi}^5 - \frac{2}{K_m^4} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &1 - a \bar{\xi} - \frac{6b}{K_m^2} - \left(1 + a \bar{\xi} + b \bar{\xi}^2 - \frac{6b}{K_m^2}\right) \cos(K_m \bar{\xi}) \\ &+ \frac{2(a + 2b \bar{\xi})}{K_m} \sin(K_m \bar{\xi}) \end{aligned} \right\} \cos(K_m \bar{\xi}) \quad (6)$$

wo $K_m = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$

Nimmt man nun ferner für den Querschnittsverlauf analog (3) an:

$$\varphi(\bar{\xi}) = \frac{q(\bar{\xi})}{q_0} = 1 + c \bar{\xi} + d \bar{\xi}^2 \quad \dots \quad (7)$$

wo zweckmäßig wieder:

$$\begin{aligned} c &= -\frac{16}{3} + 6 \varphi_{0,25} - \frac{2}{3} \varphi_{0,75} \quad \dots \quad (7a) \\ d &= +\frac{16}{3} - 8 \varphi_{0,25} + \frac{8}{3} \varphi_{0,75} \end{aligned}$$

so läßt sich schließlich (1) in der Form schreiben:

$$z(\bar{x}) = \lambda \int_0^{\bar{x}} z(\bar{\xi}) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} X_i(\bar{x}) \cdot \Xi_i(\bar{\xi}) \cdot d\bar{\xi} \quad \dots \quad (1a)$$

worin:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 \\ X_i &= \cos(K_i \bar{x}) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \Xi_1 &= \left(\frac{\bar{\xi}^2}{2} + \frac{(a-1) \cdot \bar{\xi}^3}{6} + \frac{b-a}{12} \cdot \bar{\xi}^4 - \frac{b}{20} \cdot \bar{\xi}^5 \right) (1 + c \bar{\xi} + d \bar{\xi}^2) \\ \Xi_i &= -\frac{2}{K_i^4} \cdot \left[\begin{aligned} &1 - a \bar{\xi} - \frac{6b}{K_i^2} - \left(1 + a \bar{\xi} + b \bar{\xi}^2 - \frac{6b}{K_i^2}\right) \cos(K_i \bar{\xi}) \\ &+ \frac{2(a + 2b \bar{\xi})}{K_i} \sin(K_i \bar{\xi}) \end{aligned} \right] (1 + c \bar{\xi} + d \bar{\xi}^2) \end{aligned} \right.$$

III. Integration auf Grund der Theorie der Integralgleichungen mit Kernen vom Polynom-Typus.

Zufolge dieser Theorie⁸⁾ können die Eigenwerte der Integralgleichung

$$z(\bar{x}) = \lambda \int_0^{\bar{x}} z(\bar{\xi}) \sum_{i=1}^{\infty} X_i(\bar{x}) \cdot \Xi_i(\bar{\xi}) \cdot d\bar{\xi} \quad \dots \quad (1a)$$

als Wurzeln der Gleichung gewonnen werden:

$$\begin{vmatrix} \nu - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & \dots \\ -A_{21} & \nu - A_{22} & -A_{23} & \dots \\ -A_{31} & -A_{32} & \nu - A_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\lambda = \frac{1}{\nu} \right) \quad \dots \quad (9)$$

⁸⁾ s. Anm. S. 2.

worin:

$$A_{mn} = \int_0^1 X_n(\bar{x}) E_m(\bar{x}) d\bar{x}; \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \dots \dots \dots (10)$$

In längerer Rechnung liefert die Auswertung der bestimmten Integrale (10) die Werte $A_{m,n}$ in der Form:

$$A_{mn} = A_{0mn} + E_{mn} \cdot a + F_{mn} \cdot b + G_{mn} \cdot c + H_{mn} \cdot d \\ + I_{mn} \cdot ac + K_{mn} \cdot ad + L_{mn} \cdot bc + M_{mn} \cdot bd \dots \dots \dots (10a)$$

worin die Koeffizienten bei Beschränkung auf die drei ersten Glieder der Fourier-Reihe nach folgender Tabelle *) sich bestimmen:

$\begin{matrix} A \\ m \end{matrix}$	$\begin{matrix} n \end{matrix}$	A_{0mn}	E_{mn}	F_{mn}	G_{mn}	H_{mn}	I_{mn}	K_{mn}	L_{mn}	M_{mn}
1	1	+12,500	+2,500	+0,833	+9,167	+7,222	+1,944	+1,587	+0,675	+0,5655
2	1	-11,937	-2,603	-0,914	-8,826	-6,989	-2,040	-1,674	-0,744	-0,627
3	1	-0,492	+0,062	+0,070	-0,307	-0,2135	+0,065	+0,062	+0,063	+0,056
1	2	+4,795	+0,817	+0,237	+2,869	+1,903	+0,534	+0,375	+0,165	+0,121
2	2	-4,488	-0,830	-0,254	-2,715	-1,815	-0,549	-0,388	-0,178	-0,1315
3	2	-0,258	-0,002	+0,0115	-0,135	-0,080	+0,004	+0,006	+0,010	+0,009
1	3	-7,276	-1,480	-0,480	-5,3375	-3,998	-1,100	-0,841	-0,365	-0,284
2	3	+6,911	+1,535	+0,523	+5,122	+3,847	+1,146	+0,8785	+0,396	+0,312
3	3	+0,289	-0,026	-0,033	+2,201	+0,141	-0,024	-0,0224	-0,028	-0,023

Um also die Eigenwerte λ zu ermitteln, hat man nunmehr nur nötig, zunächst a, b, c, d nach (3a) und (7a), sodann A_{mn} nach (10) unter Benutzung von obiger Tabelle zu berechnen; die Auflösung der aus (9) hervorgehenden kubischen Gleichung:

$$v^3 - v^2 [A_{11} + A_{22} + A_{33}] + v [A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} + A_{11} A_{33} - A_{13} A_{31} + A_{22} A_{33} - A_{23} A_{32}] \\ - [A_{11} (A_{22} A_{33} - A_{32} A_{23}) + A_{21} (A_{32} A_{13} - A_{12} A_{33}) + A_{31} (A_{12} A_{23} - A_{32} A_{13})] = 0 \quad (11)$$

liefert dann die drei tiefsten Zahlen v_1, v_2, v_3 des vorliegenden Stabes und hieraus:

$$n_i = \frac{\phi_i}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{v_i}} \sqrt{\frac{E J_0}{\rho g_0 l^4}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \dots \dots \dots (12)$$

und: $\frac{n_i}{n_{0i}} = \frac{1}{m_i^2 \sqrt{v_i}}$, worin m_i die Rayleighschen Wurzeln der Periodengleichung:

$$\cos m_i \cdot \cos m_i + 1 = 0$$

Hierbei ergibt sich der Grundton mit vorzüglicher, der I. Oberton mit vollständig ausreichender Genauigkeit, während für den II. Oberton noch das 4. Glied der Fourier-Reihe berücksichtigt werden müßte. Doch wird der II. Oberton meist so hoch liegen und so geringe Amplituden besitzen, daß die obige Annäherung praktisch vollkommen genügt.

*) Alle Zahlenwerte derselben sind mit 10^{-2} zu multiplizieren.

B. Einseitig starr eingespannter, schwach verjüngter Stab mit freiem Ende

Die nach obigem durchzuführende Rechenarbeit läßt sich wesentlich abkürzen in dem praktisch besonders wichtigen Fall des sehr schwach verjüngten Stabes. Bei hinreichend kleinen Werten a, b, c, d werden dann nämlich deren Produkte klein gegen diese Werte selbst sein, und man wird, da nach obiger Tabelle $I_{mn}, K_{mn}, L_{mn}, M_{mn}$ höchstens von gleicher Größenordnung wie $A_{0mn}, E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}, H_{mn}$ sind, dann (10a) abkürzen können in:

$$A_{mn} = A_{0mn} + \frac{1}{2} E_{mn} a + F_{mn} b + G_{mn} c + H_{mn} d \quad \dots \quad (10b)$$

während der weitere Rechnungsgang wie oben sich gestalten würde.

C. Näherungsverfahren für den starr eingespannten Stab mit freiem Ende

Die Zahlenwerte der vorstehenden Tabelle zeigen, daß mit großer Annäherung

$$A_{11} + A_{21} + A_{31} = 0 \quad A_{12} + A_{22} + A_{32} = 0 \quad A_{13} + A_{23} + A_{33} = 0$$

ist, welche Beziehungen einem Ersatz der unendlichen Fourier-Reihe (5) durch die endliche Reihe:

$$K(\bar{x}, \bar{\xi}) = b_0 + b_1 \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l} - (b_0 + b_1) \cos \frac{3}{2} \pi \cdot \frac{x}{l} \quad \dots \quad (5a)$$

entsprechen würden.

Dieser Ansatz erfüllt die beiden Grenzbedingungen an der besonders wichtigen Einspannstelle streng und auch in $\bar{x} = 1$ die Bedingung des Verschwindens des Bieugungsmomentes, und Zahlenrechnungen zeigen, daß der Mangel des Nichtverschwindens der Querkraft in $\bar{x} = 1$ durch die genaue Befriedigung der Bedingungen in $\bar{x} = 0$ aufgewogen, die Genauigkeit der Näherung also nicht herabgemindert wird; man darf also dann die kubische Gleichung (11) durch die quadratische:

$$v^2 - v(A_{11} + A_{22} - A_{13} - A_{23}) + A_{23}(A_{12} - A_{11}) + A_{21}(A_{13} - A_{12}) + A_{22}(A_{11} - A_{33}) = 0 \quad (11a)$$

ersetzen und erhält aus deren beiden reellen Wurzeln $v_{1,2}$ nach (12) den Grundton und I. Oberton. Die Rechenarbeit wird ohne merkliche Einbuße an Genauigkeit bei diesem Verfahren wesentlich verringert.

D. Schwingungsformen des starr eingespannten Stabes mit freiem Ende

Aus (1a) folgt:

$$\frac{z(\bar{x})}{\lambda C_1} = X_1(\bar{x}) + \frac{C_2}{C_1} \cdot X_2(\bar{x}) + \frac{C_3}{C_1} \cdot X_3(\bar{x}) + \dots$$

worin:

$$C_i = \int_0^1 \Xi_i(\bar{\xi}) z(\bar{\xi}) d\bar{\xi}; \quad X_1(\bar{x}) = 1 \quad X_2(\bar{x}) = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \bar{x} \quad X_3(\bar{x}) = \cos \frac{3}{2} \pi \cdot \bar{x} \quad (13)$$

und man erhält aus den Bestimmungsgleichungen der Konstanten C_i ⁹⁾:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{A_{12} A_{13} - A_{11} A_{23} + v A_{23}}{A_{12} A_{23} - A_{22} A_{13} + v A_{13}}; \quad \frac{C_3}{C_1} = \frac{A_{12} A_{21} + (v - A_{22})(v - A_{11})}{A_{12} A_{23} - A_{22} A_{13} + v A_{13}} \quad \dots \quad (13a)$$

Durch (13) und (13a) sind die Schwingungsformen vollständig bestimmt.

⁹⁾ a. a. O. (s. Anm. S. 2).

E. Elastisch nachgiebig eingespannter Stab mit freiem Ende

Das im Vorstehenden durchgeführte Verfahren läßt sich durch folgende Ueberlegung in sehr übersichtlicher Weise auf den Fall elastischer Nachgiebigkeit und Drehbarkeit der Einspannung verallgemeinern:

Bezeichnet δ_0 die Auflagersenkung infolge $P = 1$, so wird die Wirkung der elastischen Senkbarkeit des Auflagers darin bestehen, daß zu den bei starrer Lagerung vorhandenen Durchbiegungen überall der gleiche Betrag $1 \cdot \delta_0$ hinzutritt und zwar unabhängig von der Stellung der Last; hingegen wird, wenn ϑ_0 den Drehwinkel der Auflagertangente unter Wirkung des Biegemomentes 1 bezeichnet, infolge der elastischen Drehbarkeit die Durchbiegung in \bar{x} sich um $\vartheta_0 \cdot 1 \cdot \bar{\xi} \cdot \bar{x}$ erhöhen. Bei linearer Ueberlagerung beider Einflüsse erhält man also als Zuwachs der Durchbiegung: $\bar{y} = \delta_0 + \vartheta_0 \cdot 1 \cdot \bar{x} \cdot \bar{\xi}$, so daß der Kern (6) jetzt übergeht in:

$$[K(\bar{x}_1 \bar{\xi})] = X_0 \Xi_0 + X_1 \cdot [\Xi_1] + X_2 \Xi_2 + X_3 \cdot \Xi_3 \quad \dots \quad (6a)$$

wo:

$$X_0 = \bar{x} \quad \Xi_0 = E \mathcal{J}_0 \frac{\vartheta_0}{l} \cdot \bar{\xi} (1 + c \bar{\xi} + d \bar{\xi}^2); \quad [\Xi_1] = \Xi_1 + \frac{E \mathcal{J}_0}{l^3} \delta_0 (1 + c \bar{\xi} + d \bar{\xi}^2)$$

und alle übrigen X und Ξ ungeändert nach (1 a) sich bestimmen.

Da sonst nur das Produkt $X_0 \Xi_0$ hinzukommt und Ξ_1 in $[\Xi_1]$ übergeht, ist wiederum die Theorie der Integralgleichungen mit Kernen vom Polynom-Typus anwendbar, so daß man als Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte erhält $\left(\nu = \frac{1}{\lambda}\right)$:

$$\begin{vmatrix} \nu - A_{00} & -A_{01} & -A_{02} & -A_{03} \\ -A_{10} & \nu - (A_{11}) & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{20} & -A_{31} & \nu - A_{22} & -A_{23} \\ -A_{30} & -A_{31} & -A_{32} & \nu - A_{33} \end{vmatrix} = 0$$

wo:

$$A_{00} = \frac{E \mathcal{J}_0 \vartheta_0}{60 l} (20 + 15 c + 12 d)$$

$$A_{01} = \frac{E \mathcal{J}_0 \vartheta_0}{12 l} (6 + 4 c + 3 d)$$

$$A_{02} = \frac{E \mathcal{J}_0 \vartheta_0}{l} (23,134 + 12,060 c + 7,408 d) \cdot 10^{-2}$$

$$A_{03} = \frac{E \mathcal{J}_0 \vartheta_0}{l} (25,724 + 19,310 c + 14,270 d) \cdot 10^{-2}$$

ferner:

$$(A_{11}) = A_{11} + \frac{E \mathcal{J}_0 \delta_0}{6 l^3} (6 + 3 c + 2 d)$$

$$(A_{12}) = A_{12} + \frac{E \mathcal{J}_0 \delta_0}{l^3} (63,662 + 23,134 c + 12,060 d) \cdot 10^{-2}$$

$$(A_{13}) = A_{13} + \frac{E \mathcal{J}_0 \delta_0}{l^3} (21,221 + 25,724 c + 19,310 d) \cdot 10^{-2}$$

$$A_{10} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{E \mathcal{J}_0 \delta_0}{12 l^3} (6 + 4 c + 3 d) + \frac{1}{120} (15 + 3 a + b) \\ & + (9,167 c + 7,222 d + 1,944 a c + 1,587 a d) \cdot 10^{-2} \\ & + 0,675 b c + 0,565 b d \end{aligned} \right\}$$

$$A_{20} = - \left\{ \begin{aligned} & 8,826 + 2,040 a + 0,744 b + 6,989 c + 5,779 d \\ & + 1,674 a c + 1,417 a d + 0,626 b c + 0,540 b d \end{aligned} \right\} \cdot 10^{-2}$$

$$A_{30} = \left\{ \begin{aligned} & -0,307 + 0,065 a + 0,063 b - 0,214 c - 0,159 d \\ & + 0,062 a c + 0,058 a d + 0,056 b c + 0,051 b d \end{aligned} \right\} \cdot 10^{-2}$$

Es sei noch bemerkt, daß die Rechnung im speziellen Falle $\vartheta_0 = 0$ (reine elastische Senkbarkeit) besonders einfach und übersichtlich wird, da auch die Ordnung der Determinante gegenüber dem festgelagerten Stabe sich nicht erhöht und nur die Beiwerte (A_{11}) (A_{12}) (A_{13}) statt A_{11} , A_{12} , A_{13} einzusetzen sind.

Schwingungen elastischer Seile

Von K. Wolf, Wien

Bei der Anlage von elektrischen Freileitungen müssen die Mastausleger so bemessen werden, daß unter möglichst ungünstigen Verhältnissen bei Schwingungen die Drähte nicht einander zu nahe kommen. Man verlangt da einen Sicherheitsabstand von rund 1,2 cm für 1000 V Spannungsdifferenz um ein Durchschlagen des Dielektrikums zu verhindern. Bei der Berechnung der Auslegerlänge verwendet man nun meines Wissens ziemlich willkürliche empirische Formeln. Es dürfte daher von Interesse sein, für einen besonders ungünstigen Fall den Schwingungsvorgang mathematisch näher zu verfolgen und die Ergebnisse mit einer häufig verwendeten empirischen Faustformel zu vergleichen. Als ungünstigster Fall möge jener vorausgesetzt werden, wo bei Vereisung der Seile und bei der hypothetisch größten seitlichen Windstärke das Eis an einem der Seile plötzlich herabfällt und dieses dadurch in Schwingungen gerät, während an dem parallel laufenden Seil die Eisbelastung und die damit bei der größten Windstärke vorhandene Schiefstellung noch erhalten bleibt. Das Ergebnis möge schon jetzt angeführt werden: Es zeigt sich, daß auch bei diesem extremen Fall, der Abstand der beiden Seile, der notwendig ist, um eine allzu große Annäherung zu verhindern, nur um 17 % größer angenommen werden müßte, als es die in Betracht gezogene empirische Formel verlangt, man also mit dieser meist auskommen wird. Sollte aber besonders starke Aneisung der Leitungseile von vornherein zu erwarten sein, z. B. bei von Flußtälern ansteigenden Hängen, so dürfte es sich empfehlen, den nachstehend gezeigten Rechnungsgang praktisch anzuwenden.

Da die gestellte Aufgabe es nicht zuläßt, das Seil als unausdehnbar anzusehen — dann würde ja die Eisbelastung nur die Spannung, aber nicht den Durchhang ändern — so müssen wir von den kleinen Schwingungen elastischer Seile ausgehen, und wir wollen zunächst die kleinen Schwingungen untersuchen, die ein elastisches Seil in der Vertikalebene bei nicht zu großem Durchhang um seine Gleichgewichtslage ausführt, wenn die Anfangslage in dieser Ebene durch die Eisbelastung gegeben ist, welche dann plötzlich abgeworfen wird. Wenn wir den Draht als ein vollkommen biegsames elastisches Seil vom Querschnitt f ansetzen, so ist die Spannkraft S in demselben durch den Ausdruck $S = Ef \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} - 1 \right)$ gegeben, wenn s die Länge des Seiles im ungespannten, σ die im gespannten Zustand bedeutet, E der Zug-Modul $E \cdot f$ also die Zugsteifigkeit des Seiles ist. Dann lauten die Bewegungsgleichungen bekannterweise

$$E \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} - 1 \right) \frac{\partial x}{\partial s} \right] + \frac{q_x}{f} = \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad E \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} - 1 \right) \frac{\partial y}{\partial s} \right] + \frac{q_y}{f} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots \dots (1)$$

q_x und q_y sind die Horizontal- bzw. Vertikalkomponenten der Belastung pro Längeneinheit des Seiles, μ die absolute Dichte pro Längen- und Querschnittseinheit. Die Zusammenhangsbedingungen, die an die Stelle der Unausdehnbarkeitsbedingung tritt, wollen wir in der Form hinschreiben

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 \dots \dots \dots (1a)$$

Setzen wir die Beschleunigung Null, so können wir die Gleichungen ohne weiteres integrieren und erhalten für das Gleichgewicht eines homogenen elastischen Seiles, $q_x = 0$, $q_y = -q_0$ Abb. 1, die Ausdrücke:

$$x = hs + a \lg \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}; \quad y = \frac{h}{2a} s^2 + \sqrt{a^2 + s^2} - a \dots \dots (2)$$

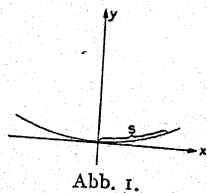


Abb. 1.

Das sind also die Gleichungen der elastischen Kettenlinie mit der von dem tiefsten Punkt an gerechneten Bogenlänge als Parameter. h ist, eine Konstante, die Dehnung im tiefsten Punkt der Kurve, $a = \frac{Efh}{q_1}$, also Horizontalschub durch spez. Belastung wie bei der gewöhnlichen Kettenlinie. Ist der Durchhang nicht allzu groß, so können wir, wie sonst, diese Kurve durch eine Parabel ersetzen, $y = \frac{x^2}{2a}(1+h)$, deren Parameter sich nur um den Faktor $\frac{1}{1+h}$ von dem Fall der gewöhnlichen Kettenlinie unterscheidet.

Um die kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage zu untersuchen, setzen wir wie üblich $x = x_1 + \xi$, $y = y_1 + \eta$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma^*$, wo $\frac{\partial \xi}{\partial s}$, $\frac{\partial \eta}{\partial s}$, $\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}$ kleine Größen sind, deren Quadrate wir vernachlässigen und x_1, y_1, σ_1 , die die Ruhelage charakterisierenden Werte sind. Mit den entsprechenden Vernachlässigungen erhalten wir dann

$$E \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}} \left[\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s} - 1 \right) \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}}{\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}} \frac{\partial y_1}{\partial s} \right] \right\} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad \dots \quad (3)$$

mit der Zusammenhangsbedingung

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{\partial y_1}{\partial s} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial s} \frac{\partial \sigma^*}{\partial s} \quad \dots \quad (3a)$$

Führt man den Winkel α , den die Tangente an die Kettenlinie in der Ruhelage mit der x -Achse bildet, als die unabhängige und die kleine Änderung φ dieses Winkels als die abhängige Variable ein und setzt man noch $\frac{\cos \alpha}{h} \cdot \frac{\partial \sigma^*}{\partial s} = U$, so bekommt man aus obenstehenden Gleichungen, wenn man nur vertikale Belastung annimmt

$$\rho \frac{\partial U^2}{\partial t^2} \frac{h}{h + \cos \alpha} = g \cos \alpha \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right\}; \quad \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = g \cos \alpha \left\{ 2 \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

ρ ist dabei der Krümmungsradius der ruhenden elastischen Kettenlinie. Aus diesen beiden Gleichungen kann man noch φ eliminieren und man erhält als endgültige Differentialgleichung für die kleinen Schwingungen eines nur vertikal belasteten elastischen Seiles die Gleichung 4. Ordnung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\rho h}{g \cos \alpha (h + \cos \alpha)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{g \cos \alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(4U + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - \frac{\rho}{g \cos \alpha (h + \cos \alpha)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \right] \quad (5)$$

Aus dieser könnte man U berechnen, dann aus der ersten oberen φ .

Diese allgemeinen Gleichungen bieten aber, selbst wenn man den Durchhang als klein annimmt, bei ihrer Lösung unter den Randbedingungen der gestellten Aufgabe zu große Schwierigkeiten. Wir wollen daher direkt von den Gleichungen (1) ausgehen und die Voraussetzung machen, daß die Bewegung in der Horizontalen gegenüber der in der Vertikalen vernachlässigt werden kann, was natürlich nur bei geringem Durchhang erlaubt ist. Die Vernachlässigungen dürfen aber nicht soweit gehen, daß nur die Gleichung für die gespannte Saite übrig bleibt. Tun wir das, so haben wir

$$E \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}}{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s} \right)^2} \frac{\partial x_1}{\partial s} \right] = 0; \quad E \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s} - 1 \right) \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}}{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s} \right)^2} \frac{\partial y_1}{\partial s} \right\} = \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad \dots \quad (6)$$

Wir ersetzen die elastische Kettenlinie in der Gleichgewichtslage durch eine Parabel, wie schon ausgeführt, dann erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + f(t) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \text{ wobei } c^2 = \frac{E f g h_1}{q_1 (1 + h_1)} \text{ eine Konstante}$$

und $f(t)$ eine beliebige Funktion der Zeit ist. Wir können, wenn wir nur symmetrische Schwingungen ins Auge fassen, die Lösung in der Form hinschreiben

$$\eta = \sum_{v=v_1}^{v=v_\infty} (A_v \sin vt + B_v \cos vt) \cos \frac{v}{c} s + \varphi(t) \dots \text{ wo } \varphi(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

gesetzt ist. Die Willkürlichkeit von $\varphi(t)$ und der Konstanten A_v , B_v und v wollen wir zur Erfüllung der Randbedingungen benützen. Diese sind folgende: Anfang und Ende des Seiles müssen dauernd fest bleiben: $s = \pm l \dots \eta = 0$. Für $t = 0$, das ist für den Augenblick, wo die gleichmäßige Eisbelastung abfällt, muß das Seil die dieser Belastung entsprechende Parabel bilden, η_0 also eine quadratische Funktion von s sein. Ferner muß im

Anfangsmoment das Seil in Ruhe sein $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$. Die bei der Befriedigung dieser Bedingungen noch übrig bleibende Willkürlichkeit der Frequenz v können wir benützen, um die Zusammenhangsbedingung näherungsweise zu erfüllen. Wir bekommen dann die v als Wurzeln einer

Periodengleichung von der Form $\operatorname{tg} \varphi = -k \varphi$, wobei $\varphi = \frac{vl}{c}$ gesetzt ist. l ist die halbe Länge des Seiles in ungespanntem Zustand. Wenn wir die Wurzeln der Periodengleichung mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ bezeichnen, so bilden die Funktionen $\cos \frac{\varphi_n s}{l} - \cos \varphi_n$ ein Orthogonalsystem und wir können daher die willkürliche Anfangslage nach Fourierart mit Hilfe dieser Funktionen in eine Reihe entwickeln, wobei wir schließlich die Lösung

$$\eta = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \varphi_n}{(1 + k \cos^2 \varphi_n) \varphi_n^2} \cos \frac{c \varphi_n}{l} t \left(\cos \frac{\varphi_n s}{l} - \cos \varphi_n \right)$$

erhalten, eine Reihe, die in dem Intervall $s - l$ gleichmäßig und sogar ziemlich rasch konvergiert. Entsprechend ist:

$$\varphi^* = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \varphi_n}{1 + k \cos^2 \varphi_n} \cos \frac{c \varphi_n}{l} t \dots \dots \dots (8)$$

Die seitlichen kleinen Schwingungen des Seiles können wir ohne Schwierigkeit bei den gestellten Anfangsbedingungen durch eine gewöhnliche Fourierdarstellung ausdrücken

$$\zeta = C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} (s+l) \cos \frac{c(2n+1)}{2l} \pi t$$

Daraus erkennt man, daß alle Punkte des Seiles nach dem gleichen Zeitintervall $\tau = \frac{2l}{c}$ den größten seitlichen Ausschlag $-\zeta_0$ zeigen, die Bewegung also die Periode 2τ hat.

Diese Ergebnisse können wir benützen, um an einem Zahlenbeispiel die gestellte Aufgabe zu lösen und den Vergleich mit empirischen Formeln bei der Berechnung der Länge der Ausleger durchzuführen. Da bei einem konstanten seitlichen Winddruck mit der speziellen Belastung q_w das Seil in einer Ebene bleibt und sich seine Ebene gegenüber der Vertikalen um einen Winkel (entsprechend $\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_w}{q_l}$) herausdreht, so kann die elastische Kettenlinie

unter dieser Bedingung genau so nach Gl. (2) berechnet werden wie die in der Vertikalebene, nur ist die spezifische Belastung q jetzt gleich $q = \sqrt{q_x^2 + q_w^2}$. Ist das Seil vereist, so wird es wegen des dann vorhandenen größeren Winddruckes noch weiter herausgedreht und beim Abfallen des Eises führt es dann auch seitliche Schwingungen um die dem Winddruck ohne Eis entsprechende Ebene aus. Wir können also unsere frühere Vertikalebene durch diese letztere Ebene ersetzen und die für die Vertikal- und seitlichen Schwingungen gefundenen Formeln benützen, um zu berechnen, wie nahe dieses Seil dem parallellaufenden kommt, das noch die Eisbelastung trägt und sich in Ruhe befindet. In dem durchgerechneten Beispiel zeigt es sich, daß die tiefsten Punkte einander am nächsten kommen, im allgemeinen Fall sind es zwei zur Mitte symmetrisch liegende Punktepaare. Man kann so die kleinste Entfernung der Aufhängepunkte a (Abb. 2) berechnen, die zu einem gegebenen Sicherheitsabstand e gehört. Vergleicht man das Ergebnis mit einer der in der Praxis gebrauchten Regeln, etwa mit folgender: «Man bestimmt den Abstand a aus dem sogenannten Schwingungsbild derart, daß die tiefsten Punkte der beiden parallelen Seile noch den Sicherheitsabstand e haben, wenn die zwei Seilebenen gegeneinander je um ein Viertel des Ablenkungswinkels α_{max} , der bei maximalem Winddruck (ohne Eislast) eintritt, aus der Vertikalebene gedreht sind und gleichzeitig der größte Durchhang (etwa bei $+40^\circ\text{C}$) auftritt», so erhält man, wie schon bemerkt, ein nicht stark abweichendes Resultat. Man sieht also, daß diese Faustregel relativ gute Ergebnisse für die Länge der Ausleger liefert.

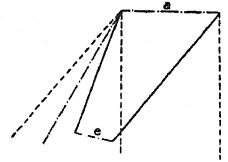


Abb. 2.

Geologische, durch Zerreivorgang entstandene Störungs­zonen als Probleme der angewandten Mechanik

Von E. Seidl, Berlin

(Hiezu Abb. 3 auf Tafel IV)

Ich befasse mich unter anderm mit planmäßigen Untersuchungen über die Beziehungen der Verformung und Zerstörung, die Gesteinsmassen bei der Gebirgsbildung erleiden, zu der Verformung und Zerstörung der in der Technik verwendeten Materialien ¹⁾ (Metalle und Gesteine), die man im Laboratorium und in Materialprüfungs-Anstalten einer die Elastizitäts­grenze überschreitenden Beanspruchung unterwirft.

Insbesondere kommt es mir darauf an, die Geometrie der Störungs­linien und die Verteilung der Massenteile, die sich bei der Beanspruchung von Metallen und Gesteinen auf *Druck* und *Zug* bzw. beim *Zerdrücken* und *Zerreißen* derselben ergeben, in Beziehung zu bringen zu der merkwürdigen, offenbar gesetzmäßigen Geometrie der Störungs­linien und Anordnung ver­lagerter Massenteile, die in einigen bisher schwer erklärbaren ²⁾, unter Annahme von Zer­drck- bzw. Zerreivorgngen aber leichter verständlichen, geologischen Störungs­zonen auf­fallen.

Diese Betrachtungsweise bedeutet für die *Geologie* und *Bergbaukunde* eine bedeutende Erweiterung der Erklärungsmöglichkeiten von geologischen Störungs­vorgängen. Denn bisher pflegten diese Wissenschaften bei der Erklärung tektonischer Störungs­zonen in erster Linie Schervorgnge verschiedener Art (*«Grabenbrüche»*, *«Horst»*, *«Uberschiebung»* usw.) und Fal­tungen verschiedener Art anzunehmen.

Eine besonders große Zahl von geologischen Störungs­zonen im Flachland wie in Gebirgen scheinen mir als *Zerrei-Zonen* erklärbar. Es sei daher hier eine durch Tiefbohrungen und

¹⁾ E. SEIDL, Probleme der Geologie, insbesondere der der Salzlagerstätten, die zugleich Probleme der angewandten Mathematik und Mechanik sind. Sonderabdruck aus: *Z. f. angewandte Mathematik* und Mechanik, Bd. 5, 1925, S. 134/5.

E. SEIDL, Die Tektonik der Nördlichen Kalkalpen (Ostalpen) als physikalisch-mechanisches Problem. Vortrag: Internationaler Geologen-Kongreß, XIV. Session, Madrid 1926; Kongreberichte.

E. SEIDL, Ueber Beziehungen zwischen Materialverformung und tektonischer Gesteinsverformung. Vortrag auf Einladung der Universität Göttingen gehalten; 1926; noch nicht veröffentlicht.

E. SEIDL, Ueber die geologischen und geographischen Verhältnisse der Salzbergbauggebiete der nördlichen Kalkalpen. Schichtenaufbau, Tektonik, hydrologische Verhältnisse. Ergebnisse in bergbaulicher Hin­sicht. Vortrag: Leobener Hochschule, Leoben, 1926; *Z. Kali* 1927, No. 3 ff.

²⁾ E. v. Mojsisowics, Das Gebirge um Hallstatt. Abhandl. d. Geol. Reichs.-A., Wien, 1875, VI/I, S. 3:

„Hier spottet die Natur der in andern Gegenden mit Erfolg angewendeten Beobachtungsmethoden; kombinatorische und deduktive Schlüsse, welche auf wohlbeobachteten Daten beruhen, sind hier aus­geschlossen, denn nichts scheint Regel zu sein, als der Wechsel der schneidendsten Gegensätze“.

E. SEIDL, Zur Geologie und Geographie der Nördl. Kalkalpen; Salzbergbau-Gebiete der Salzstock von Hallstatt; am Nordrand der Dachsteingruppe — Zerreivorgang — Salzaufpressung — Salzab­laugung —; erscheint 1927 im Selbstverlag des Verfassers. Erklärung dieses Störungs­gebiets als durch Zerreivorgang unter Aufpressung und Ablaugung von Salzmasse entstanden.

Kalisalz-Bergwerke besonders gut aufgeschlossene Störungszone in Mitteldeutschland als besonders kennzeichnendes Beispiel näher erläutert ³⁾ (Abb. 1 a, 1 b).

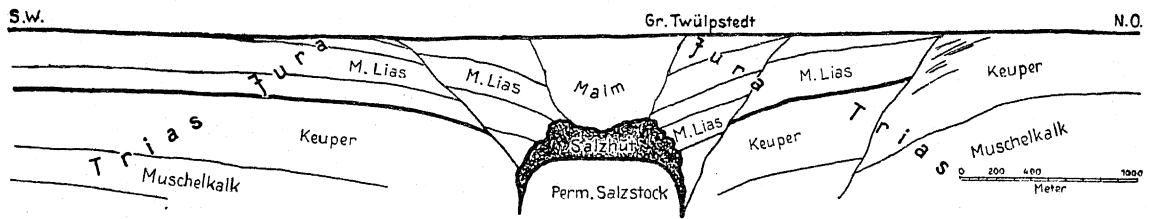


Abb. 1a

Geol. Konstr. A. Mestwerdt 1909/10; Geol. Karte v. Preußen M. 1:25000 Blatt Gr.-Twülpstedt.

Man denke sich den nicht aufgeschlossenen unteren Teil nach Analogie des Querschnittes Abb. 1b ergänzt (Aufrichten der untersten Schichten entsprechend der Herabsetzung der obersten Schichten des Trias-Jura-Deckgebirges zu beiden Seiten des Salzstocks).

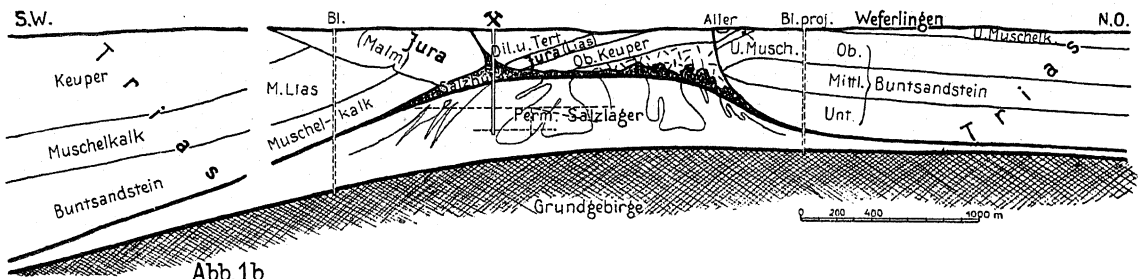


Abb. 1b

Geol. Konstr. Th. Schmierer 1908/09;

Geol. Karte v. Preußen M. 1:25000 Blatt Weferlingen, SW-Teil, ergänzt nach Blatt Helmstedt. Konstr. der Faltung der Salzlagerstätte (projiziert) E. Seidl nach den Bergbauaufschlüssen des Kaliwerks Burbach 1913.

Querschnitt durch die Salz-Störungszone des Oberen Allertals (zwischen Magdeburg und Braunschweig).

Älteste Erklärung: als Grabenbruch; spätere Erklärung als Salzhorst und Salzablaugungszone;
Erklärung E. Seidl 1925 als typische Zerreißzone mit Salzaufpressung und Salzablaugung.

In dem betreffenden, von dem Oberlauf der Aller durchflossenen Störungsgebiet (zwischen Magdeburg und Braunschweig) tritt eine (etwa 2000 m mächtige) Folge *geschichteter Gesteinsmassen* (vornehmlich Kalkgesteine, auch Sand- und Tongesteine der Trias- und Juraformation) über (etwa 500 m mächtigen) Steinsalzmassen (Permformation) auf.

Der durch den tektonischen Vorgang (der die Störungszone schuf) einer die Elastizitätsgrenze überschreitenden Beanspruchung unterworfenen «Stoff» besteht also in physikalischer Hinsicht aus einer Platte verhältnismäßig spröder «Deckgebirgs»-Schichten; und diese lagert auf einer Steinsalzmasse, die sich ihnen gegenüber durch eine verhältnismäßig hohe Plastizität (und geringes spezifisches Gewicht) auszeichnet.

³⁾ Bearbeiter Oberes Allertal übertage: TH. SCHMIERER, O. MESTWERTD, W. KOERT und W. DIENEMANN, Geologische Karte von Preußen M. 1:25000, Blätter nebst Erläuterungen Gr.-Twülpstedt, Weferlingen, Helmstedt, Seehausen, Hötensleben; untertage: Bergbaulicher Teil zu Blatt Weferlingen (Kaliwerke Burbach und Walbeck) von E. SEIDL.

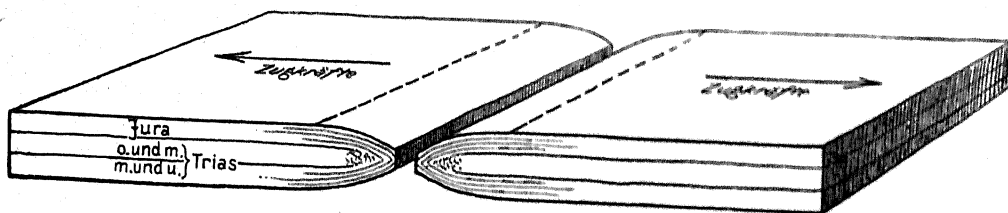
Die Deckgebirgsplatte konnte, weil sie zufolge der hohen Plastizität ihrer Unterlage auf dieser bewegbar liegt, durch die tektonischen Kräfte offensichtlich unabhängig von dieser beansprucht werden. Bei Betrachtung des Störungsvorgangs vermag man sich daher auf die Deckgebirgsplatte (und die Salzmasse) zu beschränken; die darunter folgenden Teile der Erdrinde lassen sich praktisch vernachlässigen.

Eine nähere Untersuchung der Massenverteilung der verschiedenartigen die Deckgebirgsplatte bildenden Schichten ergibt zunächst, daß die landläufig als „spröde“ angesehenen Kalk-, Ton- und Sandsteinmassen durch weitgehende Unterteilung in Bruchstücke und durch Verlagerung der letzteren insgesamt eine Umformung erlitten haben, welche derjenigen verformter „plastischer“ Massenteile vergleichbar ist.

Die Gesamtverteilung der Massenteile in dem Störungsbereich und die geometrische Anordnung der Störungslinien erweckt augenscheinlich den Eindruck folgender Gesetzmäßigkeit (Schema Abb. 2):

1. Verjüngung des Materials; und dementsprechend ein *Zuwenig* an Masse im Bereich der Störungszone.
2. Insbesondere ein *Zuwenig* an Masse der *mittleren* Partie.
3. Konvergieren der Oberflächenteile des Materials in Richtung auf die Störungszone — Herabbeugung der obersten und Hinaufbeugung der untersten Schichtenteile.
4. (Infolgedessen) weitgehende Annäherung der obersten und untersten Schichtenteile bzw. deren Sichberühren längs der Achse der Störungszone.

Eine derartige Massen-Verteilung und Geometrie der Störungslinien sehe ich als die *Hauptkennzeichen* der Bruchzonen von Stoffen an, die durch *Zugkräfte* über die Elastizitätsgrenze hinaus beansprucht wurden.



Schema des Zerreißens einer auf Salzmasse bewegbar lagernden geschichteten Gesteinsmasse.

Abb. 2

Es sei übrigens ausdrücklich darauf hingewiesen, daß ein namhafter — aber für die vorliegende Betrachtung das Wesen des Zerteilungs-Vorgangs der Deckgebirgsplatte nicht berührender — Betrag der Verlagerung der Deckgebirgsmassen auf „Salzaufpressung“ und „Salzablaugung“ zurückzuführen ist ⁴⁾.

Zum Vergleich sei um der Analogie mit den *geschichteten* Gesteinsmassen willen unter den Beispielen von Zerteilungszonen zerrissener Metalle, die sich aus der Materialkunde heranziehen lassen, hier eine zerrissene *geschichtete* Metallplatte angeführt (Abb. 3, Tafel IV).

Derartige geschichtete Metallplatten werden — für besondere industrielle Zwecke — in der Weise hergestellt, daß eine Kupferplatte zwischen zwei Bleiplatten eingeschaltet und mit diesen mechanisch (und chemisch) innig verbunden wird. Der betreffende Zerreißversuch wurde von M. RUDELOFF ausgeführt ⁵⁾.

⁴⁾ E. SEIDL, Schürfen, Belegen und Schachtabteufen auf Deutschen Kalisalzhorsten, Archiv für Lagerstättenforschung, Heft 26, 1921.

⁵⁾ M. RUDELOFF, Untersuchungen von Verbundsblechen aus Kupfer und Blei. Mitt. a. d. Mat. Prüf. Amt, Berlin, 1895, S. 73.

Man ersieht aus der Darstellung im *Querschnitt* (Abb. 3, Tafel IV) folgendes:

Das «sprödere» Kupfer ist schroff abgerissen, ohne sich merklich zu dehnen. Die beiden «plastisch» reagierenden Bleiplatten hingegen sind jede für sich nach der Zerreistelle hin ausgelngt und zugespitzt, und zwar, wie Mikroaufnahmen ergeben haben, in der Weise, daß die Oberflächen-Schichten wie eine Haut über die mittlere Partie hinweggezogen sind und sich mit diesen nunmehr unmittelbar berühren.

Den nämlichen Zustand zeigt die Gesamt-Platte. Die Platte ist nach der Zerreistelle hin ausgelngt, und zwar in der Weise, daß die beiden Bleiplatten bzw. die äußeren Partien jeder der beiden Platten über die inneren Partien derselben und insbesondere über die zurückgebliebenen Abristellen der Kupferplatte hinweggezogen sind.

Das Wesentliche dieser Einzelercheinungen kann man als *Hauptkennzeichnungen* der Zerreistelle etwa in die oben unter Ziffer 1—4 gegebene Formulierung kleiden.

Mögen diese Ausführungen dazu anregen, die Forschungen der angewandten Mechanik auch auf derartige Analogien zwischen technischen und geologischen Problemen zu erstrecken.

Note sur le changement de vitesse d'une courroie au moment où elle aborde ou quitte la poulie¹⁾

Par M. Swyngedauw, Lille

Une courroie peut être considérée comme formée de lamelles minces, parallèles et adhérentes entre elles, qui, sensiblement planes dans le brin tendu ou le brin mou, deviennent cylindriques sur la poulie; de sorte que deux lamelles élémentaires, prises dans un même segment, de longueurs égales quand elles font partie du brin mou ou du brin tendu, prennent sur la poulie des longueurs proportionnelles à leur distance à l'axe de la poulie.

Lamelle neutre. Une expérience très simple montre que lorsqu'un segment de courroie d'épaisseur e passe du brin tendu ou mou sur la poulie, la face concave ou interne, appliquée contre cette poulie, se raccourcit de ΔR , tandis que la face convexe, tournée vers l'extérieur, s'allonge de ΔA ; la lamelle neutre qui ne s'allonge ni ne se raccourcit se trouve entre les deux

lamelles externe et interne à une distance δ de la face interne égale à: $\frac{\Delta R}{\Delta A + \Delta R} e$.

Conditions aux limites du contact de la courroie et de la poulie

Considérons une courroie souple dont les brins menant et mené sont horizontaux et dont la ligne de prise ou de cessation de contact avec la poulie est dans le plan vertical OV qui passe par l'axe de la poulie (fig. 1).

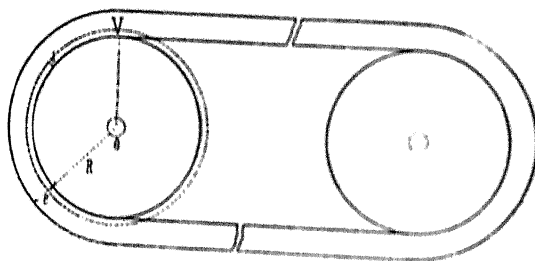


Fig. 1

De part et d'autre de ce plan, la lamelle neutre a la même vitesse; mais d'un côté elle est dans le brin mou ou tendu, les lamelles élémentaires de ce brin sont sensiblement planes et tous les points d'une section normale au déplacement sont animés de la même vitesse, laquelle est égale à la vitesse du brin mou ou tendu considéré. De l'autre côté du plan vertical OV la lamelle neutre est dans la portion de courroie enroulée sur la poulie et les lamelles élémentaires ont des vitesses différentes.

Si les conditions géométriques supposées sont rigoureusement réalisées, une lamelle située à la distance x de la lamelle neutre s'allonge ou se raccourcit de la fraction $\frac{x}{R + \delta}$ suivant que cette lamelle est plus voisine que la lamelle neutre, de la surface extérieure ou de la face interne de la courroie.

Lorsque la courroie s'engage sur la poulie, l'allongement de l'unité de longueur, ou allongement spécifique de sa lamelle externe est $\frac{e - \delta}{R + \delta}$; le raccourcissement spécifique de sa lamelle

¹⁾ Cette communication développe les considérations exposées sous le même titre dans une note à l'Académie des Sciences de Paris (Comptes-Rendus, tome 182, page 959.)

interne est $\frac{\delta}{R+\delta}$. Si la courroie quitte la poulie, les lamelles externe et interne subissent des modifications inverses des précédentes.

Or ces allongements et raccourcissements ne peuvent se faire brusquement, l'allongement de la lamelle externe de la portion de courroie qui s'engage sur la poulie ne peut pas se faire sentir sur la portion de lamelle externe voisine qui n'est pas encore engagée, et le raccourcissement de la lamelle interne de la portion de courroie engagée sur la poulie exerce sans doute une action analogue sur la portion de lamelle interne qui n'est pas engagée.

Les expériences suivantes montrent comment se fait réellement ce passage du brin tendu ou mou sur la poulie et réciproquement.

Une petite roue caoutchoutée très mobile (sur pointes) autour de son axe, est maintenue par une légère pression en contact avec la courroie en un point de sa jante; une autre roue également caoutchoutée et de diamètre sensiblement égal roule sur la poulie dans un plan parallèle à celui de la première. Chacune des roues est portée par un châssis en fer et l'ensemble forme une sorte de chariot; les axes des roues sont sensiblement parallèles.

Les roues sont pleines et percées chacune d'un trou d'environ un centimètre de diamètre. L'observateur est placé d'un côté de la poulie; un disque de carton bien éclairé est placé de l'autre côté; l'observateur aperçoit ce disque à travers les trous des deux roues chaque fois que la droite qui passe par ces trous rencontre son œil et la surface éclairée.

Si une roue fait n tours de plus que l'autre par minute, la lumière est visible n fois par minute; elle se présente sous forme d'une traînée lumineuse qui tourne dans le même sens que les roues si la roue qui est le plus voisine de la surface éclairée tourne plus vite que l'autre. Elle tourne en sens inverse si, au contraire la roue qui tourne le plus vite est la plus voisine de l'observateur.

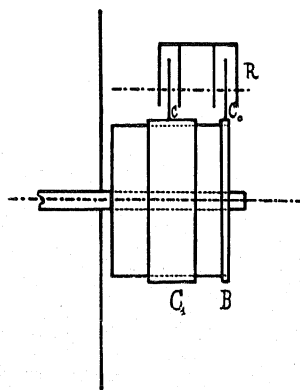


Fig. 2

B Bourrelet lié à la poulie
C₁ Courroie
R Roues et leurs châssis

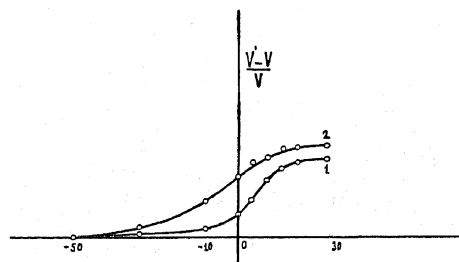


Fig. 3

Courbe 1: Enroulement

Courbe 2: Déroulement

L'unité de l'abscisse représente 1 mm d'écartement de 0 ligne limite des contacts avec la poulie.

La même longueur représente pour l'ordonnée

$V' - V : V = 0,001$.

De la différence des nombres de tours N et N_0 faits par minute par les 2 roues, on déduit immédiatement la différence de leurs vitesses linéaires V et V_0 par la relation

$$V - V_0 = NC - N_0 C_0;$$

C et C_0 étant les circonférences des roues.

Les vitesses V et V_0 des deux roues C et C_0 sont également celles des points M et M_0 de la courroie ou de la poulie avec lesquels ces roues sont en contact, à condition 1^o que le contact soit permanent et 2^o qu'il n'y ait pas de glissement des roues du chariot.

On s'assure de ces conditions par divers moyens (voir ma note à l'Académie des Sciences de Paris, Séance du 8 février 1926, t. 182, p. 616).

Lorsque le point de contact de la roue C avec la courroie devient M' pour lequel la vitesse linéaire de la courroie est V' la roue C_0 roulant toujours sur la poulie N_0 reste inchangée et N devient N' et on peut écrire

$$V' - V = N' C - N_0 C_0$$

par suite

$$V' - V = (N' - N) C$$

et

$$\frac{V' - V}{V} = \frac{N' - N}{N} = \frac{(N' - N_0) - (N - N_0)}{N} = \frac{n' - n}{N}$$

$n = N - N_0$ et $n' = N' - N_0$ représentant les nombres d'apparitions de lumière par minute dans les deux expériences stroboscopiques successives. n et n' sont affectés du signe + ou - suivant que la roue C tourne plus ou moins vite que C_0 .

La variation relative de vitesse d'un élément de courroie qui passe d'un point M à un point M' est égale au quotient par le nombre N de tours que fait par minute la roue au point M , de la différence $n - n'$ des nombres des apparitions de lumière par minute dans les 2 expériences stroboscopiques quand la roue roule sur la courroie en la touchant successivement aux points M et M' .

Si N_p représente le nombre de tours de la poulie, si R est le rayon de la poulie, r celui de la roue, e l'épaisseur de la courroie N égale sensiblement

$$N = N_p \frac{R + e}{r}$$

On détermine N_p au compte tours. R , e et r au pied à coulisse

$$\text{avec } R = 100 \text{ mm} \quad e = 4 \text{ mm} \quad r = 78 \text{ mm}$$

$$N = 1,33 \cdot N_p$$

Pour déterminer n on compte avec un chronomètre la durée qui s'écoule entre deux apparitions successives de la lumière à travers les roues; on déclanche le chronomètre au moment d'un passage de la lumière et on l'arrête au passage suivant si cette durée est de l'ordre d'au moins 30 secondes, on l'arrête au dixième passage qui suit si cette durée est de l'ordre de quelques secondes et on divise par 10 le résultat.

Le nombre de passages lumineux par minute n s'obtient en divisant 60 par cette durée évaluée en secondes.

Le tableau suivant donne dans la deuxième ligne les valeurs de $\frac{n' - n}{N}$ pour une marche à vide à 1250 tours dans divers positions M et M' ; N représentant le nombre de lumières perçues par minute quand le contact de la roue sur la courroie se fait sur le brin tendu ou mou à 5 cm. de la prise ou de la cessation de contact de la courroie avec la poulie.

TABLEAU 1.

MO en mm.	— 50	— 30	— 10	0	4,5	9	13,5	18	27
$\frac{V' - V}{V} \cdot 10^4$ enroulement	0	14	21	79	114	175	204	235	244
$\frac{V' - V}{V} \cdot 10^4$ déroulement	0	28,5	114	186	230	254	272	277	280

Au moment où la courroie s'engage sur la poulie, la vitesse d'un élément de la face externe (du brin tendu s'il s'agit de la poulie menante, du brin mou s'il s'agit de la poulie menée) augmente progressivement à partir de 4 cm. environ avant le contact de la face interne avec la poulie et l'augmentation se poursuit énergiquement au delà de la ligne de contact jusqu'à 2,5 cm. environ de cette dernière.

Elle augmente pour la courroie cuir considérée d'une valeur égale à 0,025 de la vitesse du brin tendu si le côté chair est appliqué sur la poulie et seulement 0,011 si la courroie touche la poulie par le côté fleur.

Au moment où la courroie quitte la poulie, la vitesse d'un élément de la surface externe baisse progressivement à partir de 2,5 cm. environ avant la cessation du contact de la face interne de la courroie avec la poulie, puis cette diminution s'accélère très rapidement pour cesser sensiblement 40 mm. après la cessation de contact avec le brin tendu (cas de la poulie menée) ou le brin mou (cas de la poulie menante).

La figure 3 représente les variations de vitesse à l'enroulement et au déroulement.

L'enregistrement photographique des projectiles sur plaque mobile

Par J. Kampé de Fériet, Lille, et G. Foëx, Strasbourg

I. Le principe essentiel de notre méthode¹⁾ — dont la conception remonte au début de 1918 — consiste à utiliser *une plaque mobile* pour photographier les projectiles d'artillerie. Notre procédé d'enregistrement photographique sur plaque mobile nous a permis:

1^o — de prendre des photographies posées des projectiles, fournissant des indications sur leur tenue.

2^o — de mesurer la vitesse des projectiles, spécialement leur vitesse initiale, quel que soit l'angle de tir.

3^o — d'étudier les phénomènes qui accompagnent la sortie du projectile de la bouche.

Deux appareils de fortune nous ont donné, dès les premiers essais, en 1918, des résultats photographiques excellents, confirmant parfaitement nos prévisions théoriques, mais la précision des mesures que l'on pouvait déduire de nos clichés laissait encore à désirer, à cause de la construction trop rudimentaire des appareils. En 1924 et 1925 nous avons expérimenté un troisième appareil dont la réalisation est due à M. l'Officier d'Administration MESNARD; nous avons obtenu la précision voisine du millième, actuellement exigée par la Balistique.

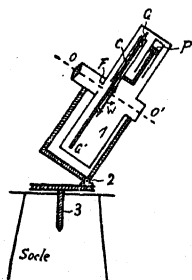


Fig. 1.

1: Chambre photographique.

2: Axe horizontal

3: Axe vertical.

La chambre photographique (Fig. 1) est portée par un dispositif de pointage robuste et précis permettant de rendre l'axe optique OO' de l'objectif O (Tessar-Zeiss $f = 25$ cm., ouverture $f : 3,5$), perpendiculaire à toute droite D de l'espace; la plaque photographique (15×25) est portée par un chariot mobile C guidé entre deux glissières GG' ; le déplacement de C est obtenu par deux pistons P , sur lesquels agit un gaz comprimé, à pression réglable; un frein rend la vitesse \vec{w} de C , sensiblement uniforme, réglable entre 0 et 5 m/sec.; par construction \vec{w} est perpendiculaire à OO' ; en outre un mouvement de rotation de la chambre photographique permet de donner à \vec{w} une orientation arbitraire autour de OO' . Dans le mouvement de translation, la couche sensible de la plaque se trouve tout près de la paroi avant de la chambre photographique; cette paroi est percée d'une fente F , dont les grands bords sont perpendiculaires à \vec{w} ; l'ouverture h de la fente est réglable.

II. Photographie posée des projectiles

Rendons l'axe optique OO' perpendiculaire à un arc D de la trajectoire d'un projectile, arc assez court pour être assimilé à un segment de droite, puis faisons pivoter la chambre photographique autour de OO' de manière que la direction du déplacement du chariot C soit parallèle à D .

Si la vitesse \vec{w} de translation du chariot est équipollente à la vitesse \vec{v} de l'image du projectile, celle-ci est en repos relatif par rapport à la couche sensible; quelle que soit la vitesse \vec{v} du projectile la durée de pose de cette image, immobile sur la plaque en mouvement, n'est

¹⁾ G. FOËX et J. KAMPÉ DE FÉRIET: Comptes Rendus Académie des Sciences, t. 181, 1925, p. 597. — J. KAMPÉ DE FÉRIET: Mémorial de l'Artillerie française, t. 4, 1925, p. 280.

limitée que par la sortie du projectile hors du champ de l'objectif (défini par l'ouverture h de la fente).

Cette durée, relativement longue, de la pose, nous permet de photographier le projectile en plein jour, sans l'aide d'aucun éclairage artificiel, ni d'aucun écran réfléchissant; nous opérons au cours d'un tir quelconque, sans modifier quoique ce soit aux conditions de ce tir; la durée de pose est même assez longue pour pouvoir photographier le projectile la nuit, quand il passe dans la zone d'éclairement d'une flamme au magnésium, allumée avant le départ du coup.

Les images obtenues sont d'une grande netteté; le flou à craindre, par suite d'un décalage entre \vec{w} et \vec{v} est peu important, si l'on a pas rigoureusement $\vec{w} = \vec{v}$ un point du projectile a pour image sur la plaque, un petit segment de droite de longueur $h \cdot (w - v) : w$; comme nous prenons $1 \text{ mm.} \leq h \leq 10 \text{ mm.}$, un décalage de 1 p. 100 donne un flou compris entre 0,01 mm. et 0,1 mm.

A notre connaissance, avant notre méthode, on n'avait obtenu des images d'une telle netteté, que pour des balles de fusil, en opérant à objectif ouvert, dans l'obscurité totale, la projectile étant illuminé par une étincelle électrique. Notre méthode se pliant à toutes les conditions d'un tir normal, même pour les projectiles d'artillerie des plus gros calibres, est évidemment beaucoup plus souple. (Fig. 2, Planche VI.)

La netteté des images permet de les utiliser pour étudier la tenue du projectile, avec une précision supérieure à celle que donne la mesure des empreintes sur des panneaux de carton; on peut les utiliser aussi pour étudier la forme de la trajectoire au voisinage de la bouche, une mesure faite sur le cliché donnant la hauteur du projectile au-dessus du sol, à l'instant de la pose; enfin, sur quelques-uns de nos clichés, on soupçonne les ondes qui accompagnent le projectile, rendues visibles par différence de transparence et d'indice de réfraction.

III. Mesure de la vitesse des projectiles

Rendons encore l'axe optique OO' perpendiculaire à un arc rectiligne D de la trajectoire du projectile, mais cette fois, faisons pivoter la chambre photographique autour de OO' , de manière que la direction du déplacement du chariot C soit normale à D ; les grands bords de la fente F deviennent ainsi parallèles à l'image de D .

La vitesse \vec{w} de translation du chariot est perpendiculaire à la vitesse \vec{v} de l'image du projectile. Le mouvement relatif de l'image par rapport à la couche sensible, résulte de la composition de ces deux vitesses; un point de l'image décrit donc sur la couche sensible une droite dont la pente a pour valeur $w : v$, par rapport au bord inférieur de la plaque. Pour expliquer le résultat photographique, supposons que le projectile se silhouette comme une tache absolument noire sur le fond bien éclairé du ciel; pendant le passage de la plaque devant la fente F , presque tous les points de la couche sensible sont constamment impressionnés par le ciel éclairé; seuls les points de cette couche, qui sont situés sur la trajectoire de l'image du projectile sont pendant une fraction de leur passage occultés par cette tache noire; la durée de pose de ces derniers points est donc moindre que celle des autres; soient h , l'ouverture de la fente, a le calibre de l'image du projectile, le rapport des deux durées de pose est $1 - a : h$. Cette différence de durée de pose a pour résultat qu'au développement la trajectoire de l'image du projectile sur la couche sensible, apparaît comme une bande claire se détachant par contraste sur le fond plus sombre.

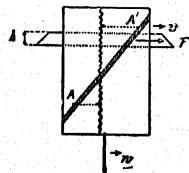


Fig. 3.

En enregistrant simultanément sur la plaque les vibrations d'un diapason, on peut déduire d'un tel cliché la vitesse du projectile; il suffit pour le comprendre de regarder la figure 3;

on mesure d'abord perpendiculairement à la direction du déplacement de la plaque, la distance d de deux points A et A' de la trace du projectile; puis en pointant la sinusoïde du diapason on évalue l'intervalle de temps t qui a séparé les passages en A et A' ; la vitesse de l'image du projectile a pour valeur $v = d : t$; connaissant la distance du foyer objet à la trajectoire D , on en déduit immédiatement la vitesse V du projectile lui-même.

L'expérience a confirmé entièrement ces vues théoriques: dès la première séance, nous avons obtenu des enregistrements photographiques très nets; nous avons opéré dans les conditions les plus diverses, le calibre variant de 58 mm. à 37 cm., l'angle de tir de 1° à 70° , la vitesse du projectile de 100 m./sec. à 900 m./sec., la luminosité allant du ciel bleu pur à la brume.

Le contraste entre le fond et la trace augmente avec la finesse de la fente, jusqu'à ce que l'ouverture h ne soit plus égale qu'au calibre a de l'image: les points situés sur la trace ont alors une durée d'exposition nulle; néanmoins, cette ouverture optima n'est pas pratiquement utilisable, car les chances de manquer le projectile (par suite de légers défauts de pointage de l'appareil ou de la dispersion du tir) sont considérables avec une fente aussi fine. En opérant avec une ouverture égale à 10 fois environ le calibre de l'image du projectile, on obtient de façon régulière des traces assez contrastées pour permettre des pointés à 0,1 mm. près.

Le relèvement du canon au moment du tir empêche que le parallélisme entre les grands bords de F et l'image de D puisse être parfaitement réalisé. Pour éliminer l'erreur qui en résulte la fente F a la forme d'un trapèze; la trace est alors limitée aux points où l'image du projectile rencontre les petits bords inclinés de F ; lorsque l'orientation est correcte, les distances des extrémités de la trace aux bords correspondants du cliché sont égales; dans le cas contraire, la mesure de ces distances permet de tenir compte du défaut d'orientation dans le calcul de V .

La détermination de la vitesse initiale d'un projectile est fondamentale pour la Balistique. Le procédé usuel à l'aide des cadres-cibles associés à des chronographes Le Boulengé-Bréguet cesse d'être pratique lorsque l'on tire sous un angle supérieur à 30° ; il conduit en effet à placer le 2^o cadre à une hauteur considérable: 160 m. pour un obus tiré à 800 m./sec. sous 45° . Le principal avantage de notre appareil, c'est que son fonctionnement est tout à fait indépendant de l'angle de tir, qui peut prendre toute valeur entre 0 et 90° . Nous avons, par ailleurs, comparé la précision de notre méthode avec celle des chronographes: l'écart relatif entre les vitesses mesurées par les deux méthodes a constamment oscillé entre un et deux pour mille.

IV. Etude des phénomènes qui accompagnent la sortie du projectile

On a vu, au paragraphe précédent, comment en croisant les vitesses \vec{w} et \vec{v} , l'image du projectile laisse sur la couche sensible une trace photographique inclinée, qui permet de mesurer sa vitesse; ce procédé d'enregistrement est applicable à d'autres objets, notamment aux gaz obscurs ou incandescents qui sortent de la bouche. Pointons encore l'appareil de manière que la trajectoire D soit parallèle aux grands bords de F , la bouche se trouvant à une des extrémités de la fente; outre le projectile le front avant des gaz, se silhouettant sur le ciel, s'enregistre très nettement sur la plaque, ainsi que les centres incandescents qui se meuvent dans la masse gazeuse. On peut ainsi enregistrer la position et la vitesse de tous ces éléments. Plaçons ensuite un second appareil immédiatement sous la trajectoire, pointons-le de manière que les grands bords de la fente soient horizontaux, la bouche apparaissant au centre du champ, nous enregistrons ainsi les fronts droit et gauche de la masse gazeuse. Si on admet que le phénomène est de révolution autour de la trajectoire, on peut déduire de l'ensemble des deux clichés, sa reconstitution dans l'espace.

Notre méthode fournit ainsi des renseignements d'un ordre tout nouveau sur les phénomènes qui accompagnent la sortie du projectile; voici à titre d'exemple, le résumé de nos résultats concernant un canon de 30 cm. Avant la sortie du projectile, un temps de l'ordre de 0,0015 sec., apparaissent à la bouche des gaz faiblement lumineux se propageant avec une vitesse voisine de 300 m./sec. Aussitôt le projectile sorti, dans la sorte de tuyère annulaire formée entre la bouche et le culot, les gaz se précipitent avec une énorme vitesse d'expansion latérale de l'ordre de 2000 m./sec.; puis dès que le culot s'est un peu écarté de la bouche, les gaz acquièrent aussi une vitesse d'expansion vers l'avant, de l'ordre de 1400 m./sec.; cette vitesse de propagation étant très supérieure à celle du projectile (720 m./sec.), la masse gazeuse rattrape et dépasse le projectile qu'elle enveloppe complètement; au bout d'un temps de 0,001 sec. la masse gazeuse presque entièrement obscure présente l'aspect d'un «potiron», dont la figure donne une coupe; le tableau suivant résume le développement du phénomène:

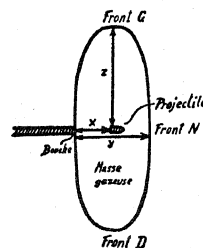


Fig. 4.

t	(sec)	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.007	0.009	0.025
x	(m)	0.72	1.44	2.16	2.88	3.60	5.04	6.48	18.00
y	(m)	1.40	2.40	3.00	3.45	3.85	4.55	5.15	9.00
z	(m)	2.00	2.50	2.90	3.20	3.45	4.25	4.65	8.00
Vitesse front AV	(m/sec)	1400	1000	600	450	350	300	270	120
Vitesse front $D \& G$	(m/sec)	2000	500	400	300	250	200	170	100

Tandis que le projectile conserve sa vitesse uniforme celle du front avant de la masse gazeuse diminue rapidement; le projectile noyé dans la masse gazeuse, rattrape le front avant, le perce et se dégage au bout de 0,007 sec. environ; il est désormais soustrait à toute action des gaz.

La masse gazeuse est d'abord presque complètement obscure, à peine çà et là apparaissent quelques points incandescents; sur certains clichés, ces centres d'incandescence manquent même totalement, sur d'autres, ils sont uniquement localisés sur le front avant qui, au contact de l'air demeure brillant. Au bout de 0,025 sec., brusquement, toute la masse gazeuse devient voilemment incandescente; c'est le début de cette véritable explosion qu'on appelle la *réinflammation*. L'incandescence de la masse gazeuse demeure longtemps très vive; au bout de 0,15 sec. (fin du cliché), la flamme est encore éclatante, la masse incandescente continue à se dilater lentement, le front avant atteint une distance de 20 m. environ, les fronts droit et gauche de presque 10 m.

Bien entendu avec un canon de plus faible calibre, l'allure générale du phénomène est moins grandiose.

Solutions of Mechanical Systems Encountered in Percussion Tools

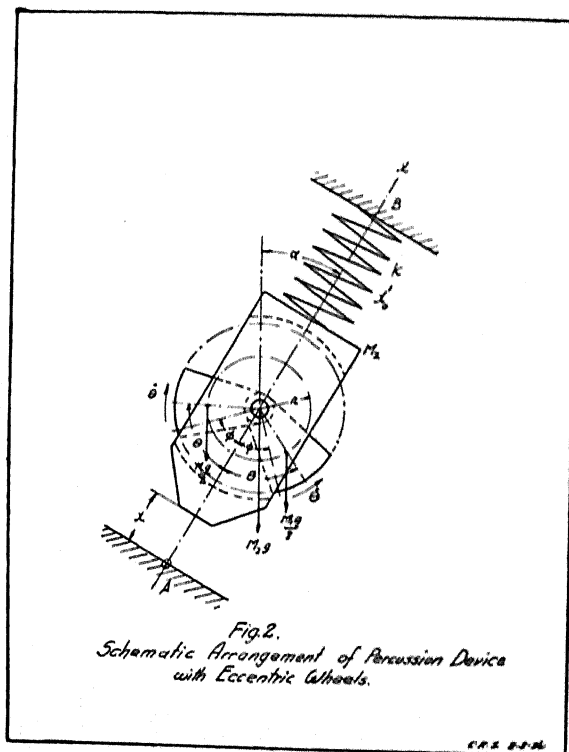
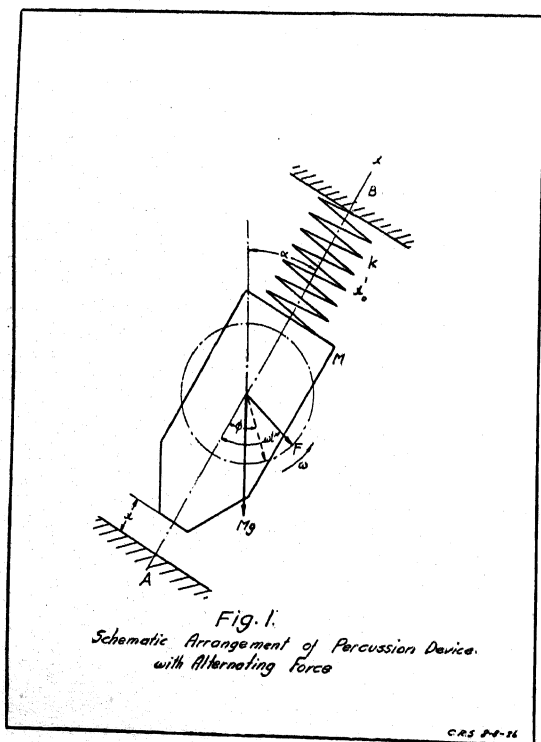
By C. Richard Soderberg, East Pittsburgh, Pa., U. S. A.

(See Plate IV for figures 7 and 10)

I. Introduction

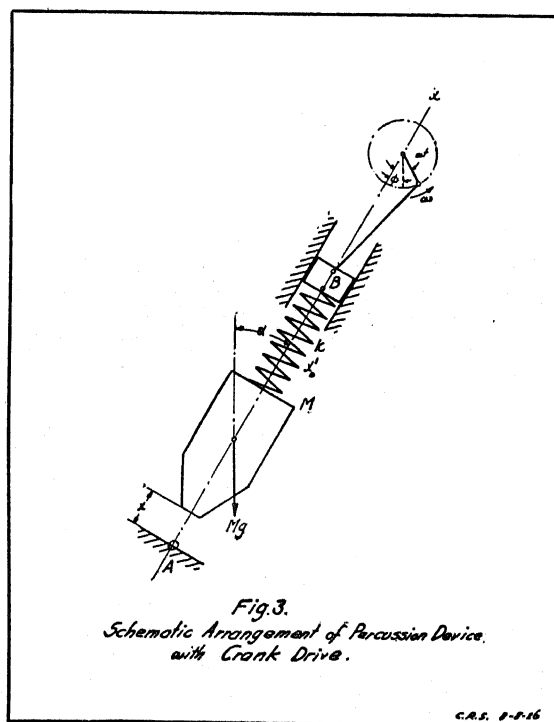
This paper deals with a type of obstructed harmonic oscillations of certain mechanical systems, which are encountered in electrically driven percussion tools. On account of their simplicity, such tools are justly receiving general interest, in spite of the fact that the art has not yet produced a tool, which is fully able to compete with the pneumatic tools, as far as effectivity of performance is concerned.

The dynamical systems, which will be discussed in the following, are illustrated schematically by Figs. 1, 2, and 3, and will be referred to as system 1, 2, and 3. In each of



these systems the reciprocating part, which will be referred to as the *tup*, is constrained to move without friction along the direction $A-B$. An elastic element, shown in all three cases as a coil spring, furnishes storage for potential energy. The spring is assumed to have an elastic resistance, which is proportional to the deflection, and is assembled with a certain initial compression. The reciprocating part can impinge against the anvil element A , which through a tool of some kind is capable to dissipate a part of the energy parcels delivered by each blow. It is assumed that experimental evidence exists, which permit us to regard the impact period as very small, and that the velocity of return is a certain fraction of the velocity of approach. This fraction may be regarded as a known coefficient of restitution. The dynamical agency,

which produces the oscillating motion, constitutes the main difference between the three systems. In Fig. 1 this agency is represented as an alternating force, which acts upon the tup without any external mechanical means. This case is approximated by the electromagnetic percussion devices. The primary energy source is, in this case, the electrical energy supplied to the magnets. In Fig. 2 this agency is represented by two rotating eccentric wheels, which, by their inertia forces, cause the oscillating motion. For the sake of simplicity, the wheels are assumed to rotate in the same plane, and geared to a common shaft, not shown. Their relative position is such that the resultant of the centrifugal forces, for constant angular velocity, lies along the direction $A-B$. The primary energy source supplies torque to the driving shaft. In Fig. 3 the reciprocating motion is created by a crank and a connecting rod, which oscillate



a crosshead, forming the upper point of suspension of the spring. The primary energy source supplies driving torque to the crank shaft.

The ultimate object of these devices is to cause the tup to perform a sustained oscillating motion with definite operating cycles, each cycle involving an impact against the anvil, accompanied by a sudden discharge of a parcel of mechanical energy, which can be used for the particular operation in question, such as chiseling, rock drilling, riveting, etc.

II. The differential equations for the motion

A. For System 1.

The mass M is constrained to move without friction along the direction $A-B$, inclined at an angle α to the vertical. The direction $A-B$ is selected as positive x -axis. The x -coordinate is selected in such a manner that $x = 0$, when the tup touches the anvil. The initial compression of the spring is x'_0 when the tup is in this position. The spring has an elastic resistance, which

is proportional to the deflection, the constant of proportionality (the spring scale) being denoted by k . The mass of the spring is assumed to be negligible, or that an appropriate correction has been included in M . The alternating force varies as a sine function, with a periodicity of ω , starting at $t = 0$ from the negative x -axis. The acceleration due to gravity is denoted by g . Projecting the forces acting on the mass M , at any time t , the equation of motion will be

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x + x_0') - Mg \cos \alpha - F \cos \omega t \quad \dots \dots \dots (1)$$

If we put

$$x = x_0' + \frac{Mg \cos \alpha}{k}, \omega_c = \sqrt{\frac{k}{M}}, q = \frac{\omega}{\omega_c}, \text{ and } a = -\frac{F}{k - M\omega^2} = \frac{F}{k} \frac{1}{q^2 - 1} \quad (2)$$

equation (1) is found to have the solution

$$x + x_0 = A \cos \frac{\omega t}{q} + B \sin \frac{\omega t}{q} + a \cos \omega t \quad \dots \dots \dots (3)$$

where A and B are integration constants, to be determined by the initial circumstances of the motion. The quantity x_0 will be defined as the *equivalent set-up* of the spring, and the quantity q as the *speed ratio*. The quantity a represents the amplitude of unobstructed forced vibrations.

B. For System 2.

The combined mass of the rotating wheels is denoted by M_1 , their eccentricity by r , their radius of gyration with respect to their centres of gravity by ρ_0 , and their radius of gyration with respect to the axis of rotation by $\rho = \sqrt{\rho_0^2 + r^2}$. The remainder of the tup has a mass denoted by M_2 . The inertia of the driving shaft is assumed to be negligible. The x -coordinate, defined as under A , and θ , the angle of rotation of the eccentric weights, measured from the negative x -axis, will be selected as generalized coordinates. The generalized force in the x -direction, is $-(M_1 + M_2) g \cos \alpha$, and in the θ -direction $K - M_1 g r \sin \theta \cos \alpha$, where K represents the torque on the common driving shaft, reduced to a gear ratio of 1:1. The kinetic energy of the system is found to be

$$T = \frac{1}{2} \left[M_1 \rho^2 \dot{\theta}^2 + (M_1 + M_2) \dot{x}^2 + 2 M_1 r \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta \right] \dots \dots \dots (4)$$

and the potential energy

$$V = \frac{1}{2} k (x + x_0')^2 \dots \dots \dots (5)$$

whence the Lagrangian equations of motion

$$(M_1 + M_2) \frac{d^2 x}{dt^2} + M_1 r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + M_1 r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + k (x + x_0') = -(M_1 + M_2) g \cos \alpha \quad (6)$$

$$M_1 \rho^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + M_1 r \sin \theta \frac{d^2 x}{dt^2} = K - M_1 g r \sin \theta \cos \alpha \dots \dots \dots (7)$$

These equations are not directly integrable, except for the case that the angular velocity of rotation of the eccentric wheels is constant during the time interval between blows. This

appears, at first, as a very daring assumption, but experiments have shown that the variation of the angular velocity in practical devices of this kind is not greater than about $\pm 10\%$. However, this does not concern the inevitable velocity change during the impact period, which is probably greater, and which must be considered separately. Assuming, then, that the angular velocity $\dot{\theta}$ is constant, and denoting it by ω , we obtain the solution (3), with the difference that now

$$x_0 = x'_0 + \frac{(M_1 + M_2)g \cos \alpha}{k}, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{k}{M_1 + M_2}}, \quad \text{and} \quad \alpha = -\frac{M_1 r \omega^2}{k - (M_1 + M_2) \omega^2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} r \frac{q^2}{q^2 - 1} \quad (8)$$

C. For System 3.

For the sake of simplicity we assume that the connecting rod is long in comparison with the crank radius r_1 , and that the arrangement is so dimensioned that the angular velocity of the crank shaft can be considered constant, so that the motion of the crosshead B may be treated as a true harmonic motion. At $t = 0$ the crank is directed towards the negative x -axis. When the tup touches the anvil in this position, the initial compression of the spring is x'_0 .

The equation of motion of the tup is now found to be

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x + x'_0 - r_1(1 - \cos \omega t)) - Mg \cos \alpha \quad \dots \dots \dots (9)$$

the solution of which is (3) if

$$x_0 = x'_0 - r_1 + \frac{Mg \cos \alpha}{k}, \quad \text{and} \quad \alpha = -\frac{k r_1}{k - M \omega^2} = r_1 \frac{1}{q^2 - 1} \quad \dots \dots \dots (10)$$

III. The properties of the oscillating motion

Next we consider the limiting circumstances of the motion, which determine the integration constants, and the requirements for a sustained sequence of impacts. The solutions thus found are valid only during the continuous part of the displacement, that is, the time interval between two blows. At the beginning of this time interval, immediately after a blow, the tup touches the anvil, and has a velocity away from the anvil, which we shall denote by v_1 . The force vector, the eccentric wheels, and the crank, are assumed to stand at an angle Φ from the negative x -axis. At the end of this time interval it is, of course, necessary that the coordinates of the entire system should again be the same, but we concede the possibility that more than one cycle of the reciprocating agency have passed since the preceeding blow, an assumption which has been verified by experiments. We assume that the operating cycle covers n complete cycles of the reciprocating agency, and define this number as *the mode of operation*, n being an integer. The initial and final circumstances are thus

$$x = 0, \quad \omega t = \Phi, \quad \frac{dx}{dt} = v_1, \quad \text{and} \quad x = 0 \quad \omega t = 2\pi n + \Phi \quad \dots \dots \dots (11)$$

which, when introduced into equation (3) gives the following three equations for the determination of A , B , and Φ .

$$x_0 = A \cos \frac{\Phi}{q} + B \sin \frac{\Phi}{q} + a \cos \Phi \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{v_1}{\omega_c} = -A \sin \frac{\Phi}{q} + B \cos \frac{\Phi}{q} - a q \sin \Phi \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$x_0 = A \cos \frac{2\pi n + \Phi}{q} + B \sin \frac{2\pi n + \Phi}{q} + a \cos \Phi \quad \dots \dots \dots (14)$$

Solving for A and B , and introducing the values so found into the equation (3), we find that the displacement x , and the velocity $\frac{dx}{dt}$, can be expressed in the following manner

$$x + x_0 = (x_0 - a \cos \Phi) \frac{\cos \frac{\pi n + \Phi - \omega t}{q}}{\cos \frac{\pi n}{q}} + a \cos \omega t \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$\frac{dx}{dt} = (v_1 + a \omega \sin \Phi) \frac{\sin \frac{\pi n + \Phi - \omega t}{q}}{\sin \frac{\pi n}{q}} - a \omega \sin \omega t \quad \dots \dots \dots (16)$$

The equation for Φ is found to be

$$x_0 - a \cos \Phi = \left(\frac{v_1}{\omega_c} + a q \sin \Phi \right) \cot \frac{\pi n}{q} \quad \dots \dots \dots (17)$$

The velocity at the end of the operating cycle, just before a blow, is now obtained by introducing into (16) $\omega t = 2\pi n + \Phi$. We denote this velocity of approach by $-v_2$, being directed in the negative x -direction, and find that

$$v_2 - v_1 = 2 a \omega \sin \Phi \quad \dots \dots \dots (18)$$

a very simple relation which holds for all modes of operation. Assuming the existence of a coefficient of restitution, defined by $v_1 = \epsilon v_2$, we find that

$$v_1 = \frac{2\epsilon}{1-\epsilon} a \omega \sin \Phi \quad \text{and} \quad v_2 = \frac{2}{1-\epsilon} a \omega \sin \Phi \quad \dots \dots \dots (19)$$

It is evident from equation (18) that in order to have an actual increase of velocity, or an actual recharging of kinetic energy of the tup, between blows, it is necessary that the product $a \sin \Phi$ be positive. a is positive when $q > 1$ and negative when $q < 1$. Consequently, we can establish the following limiting values for Φ

$$q > 1, 0 \leq \Phi \leq \pi, \quad \text{and} \quad q < 1, \pi \leq \Phi \leq 2\pi \quad \dots \dots \dots (20)$$

It is now necessary to establish the actual values of Φ . For this purpose we introduce into equation (17) the value of v_1 from equation (19), and put

$$R = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} q \cot \frac{\pi n}{q}, \quad \dots \dots \dots (21)$$

and

$$S = \frac{x_0}{a} \quad \dots \dots \dots (22)$$

We define R as a *speed function* and S as a *spring function*. Equation (17) now becomes

$$R \sin \Phi + \cos \Phi = S \quad \dots \dots \dots (23)$$

showing that under all conditions we must have $S \leq \sqrt{1+R^2}$. Sustained operation can take place only if this equation gives a unique solution in Φ , however, which is the case if

$$S = \sqrt{1+R^2} \quad \dots \dots \dots (24)$$

which is thus the principal condition for sustained operation. The angle Φ is now determined by

$$\sin \Phi = \frac{R}{S}, \quad \cos \Phi = \frac{1}{S}, \quad \Phi = \tan^{-1} R. \quad \dots \dots \dots (25)$$

So far we have made no restriction upon the signs of R and S . The latter derives its sign from x_0 and a . For practical reasons we are restricted to positive values of x_0 , because it is very difficult to design a spring of this kind for alternating tension and compression. Hence, S has the same sign as a , that is $S > 0$ when $q > 1$, but $S < 0$ when $q < 1$. Now, if $R > 0$ and $S > 0$, we find that $0 < \Phi < \pi$, which agrees with the condition established in (20). If $R > 0$ and $S < 0$, we find that $\pi < \Phi < 2\pi$, which also agrees with (20). On the other hand, if $R < 0$, and $S > 0$, we obtain $\pi < \Phi < 2\pi$, and if $R < 0$ and $S < 0$, we obtain $0 < \Phi < 2\pi$, which both conflict with (20). It is evident, therefore, that under the above assumption of positive values for x_0 , sustained operation can occur only for positive values of R . This establishes the following series of limiting values for $\frac{\pi n}{q}$,

$$0 \leq \frac{\pi n}{q} \leq \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi \leq \frac{\pi n}{q} \leq \frac{5}{2}\pi, \quad 4\pi \leq \frac{\pi n}{q} \leq \frac{9}{2}\pi, \text{ etc.},$$

and

$$\pi < \frac{\pi n}{q} \leq \frac{3}{2}\pi, \quad 3\pi < \frac{\pi n}{q} \leq \frac{7}{2}\pi, \quad 5\pi < \frac{\pi n}{q} \leq \frac{11}{2}\pi, \text{ etc.}$$

We thus obtain a series of possible values for q

$$q = 2n \text{ to } \infty, \quad \frac{2}{3}n \text{ to } n, \quad \frac{2}{5}n \text{ to } \frac{n}{2}, \quad \frac{2}{7}n \text{ to } \frac{n}{3}, \text{ etc.} \quad \dots \dots (26)$$

Consequently, all speed ratios above $2n$ represent possible operating conditions for all modes, provided, of course, that the speed function and the spring function are proportioned to satisfy equation (24). No sustained condition of operation can exist between $q = 2n$ and $q = n$. Below $q = n$ there are series of narrow strips, within which sustained operation is possible. These ranges in the speed ratio will be restricted to specific modes only, and it is very doubtful whether they will have any practical value. Thus, for practical devices it is necessary that

$$R > 0, S > 0, q > 1, \text{ and } q = 2n \text{ to } \infty, n = 1, 2, 3, \text{ etc.} \quad \dots \dots (27)$$

In order to express the requirement for sustained operation within this range, equation (24), in a more practical form, we introduce the values of R and S , equations (21) and (22), and define a new set of spring functions S_1 , S_2 and S_3 , one for each type of device. These spring functions will be defined in the following manner

$$S_1 = \frac{k x_0}{F} = \frac{1}{q^2 - 1} \sqrt{1 + \left(\frac{1 + \frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}} q \cot \frac{\pi n}{q} \right)^2} \dots \dots \dots (28)$$

$$S_2 = \frac{\frac{x_0}{M_1}}{\frac{M_1 + M_2}{r}} = \frac{q^2}{q^2 - 1} \sqrt{1 + \left(\frac{1 + \frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}} q \cot \frac{\pi n}{q} \right)^2} \dots \dots \dots (29)$$

$$S_3 = \frac{x_0}{r_1} = \frac{1}{q^2 - 1} \sqrt{1 + \left(\frac{1 + \frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}} q \cot \frac{\pi n}{q} \right)^2} \dots \dots \dots (30)$$

Each one of these three equations can be plotted in a diagram showing the values of the spring functions that correspond to each value of the speed ratio for each mode. The curves obtained in this manner may be regarded as a set of *characteristic curves* for the particular device for which they are plotted. It is evident that the characteristic curves have the same form for the devices 1 and 3, different from the curves for the device 2. These new spring functions have in each case a definite physical meaning. S_1 represents the ratio between the static pressure against the anvil, when the system is at rest, and the maximum value of the alternating force, S_2 represents the ratio between the equivalent set up of the spring and the geometrical displacement of the centre of gravity of the tup due to the rotation of the eccentric wheels, and S_3 represents the ratio between the equivalent set up of the spring and the crank radius.

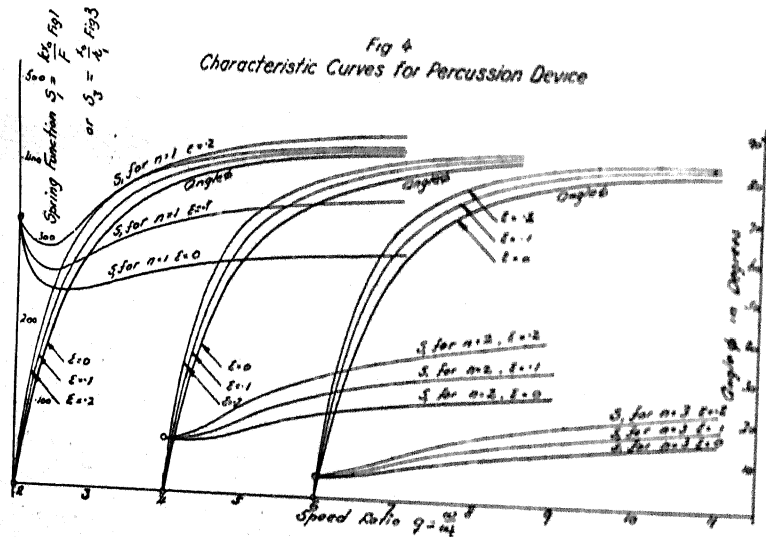
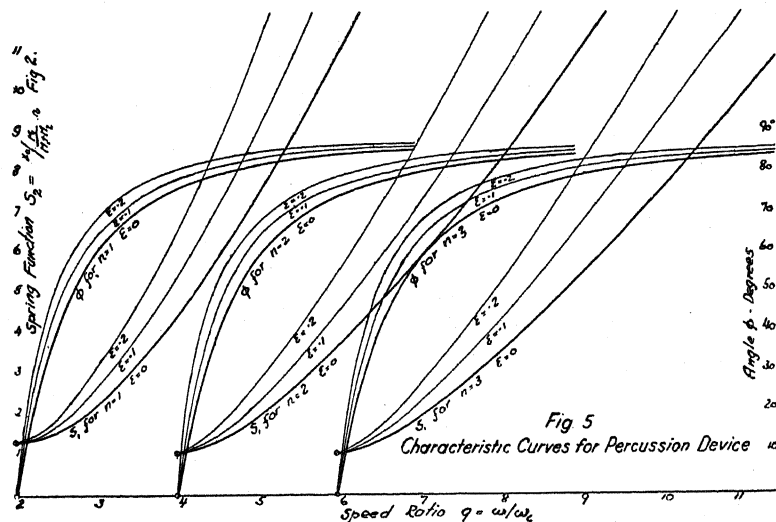


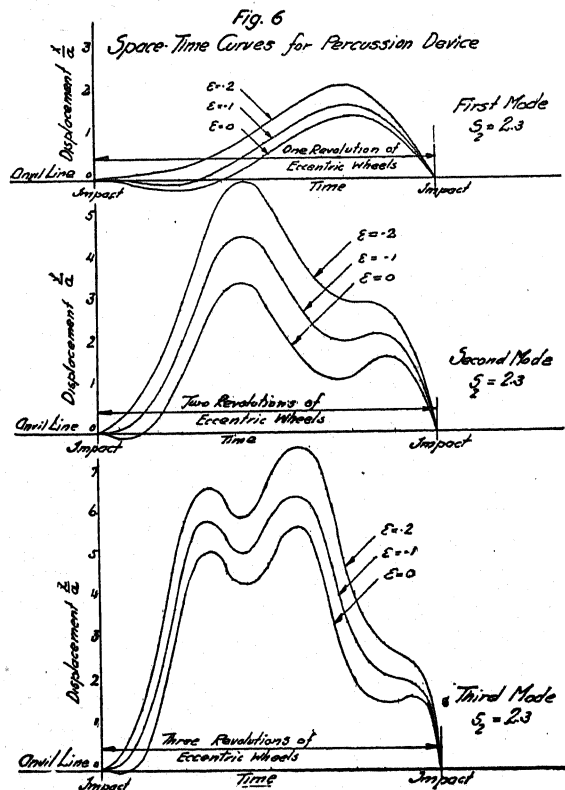
Fig. 4 shows a set of characteristic curves for the systems 1 and 3, plotted from (28) and (30). Fig. 5 shows a similar set of curves for the system 2, plotted from (29). In each diagram the curves have been plotted for the three first modes, $n = 1, 2$ and 3 , and three values of the coefficient of restitution, $\epsilon = .1, .2$ and $.3$. As a useful complement the curves also show the values of Φ that correspond to each value of q .

Fig. 6 shows some examples of the space time curves that are performed by the tup. These have been plotted for the system 3 from equation (15) and express the displacement in terms of a . It is seen from these curves that, for $\epsilon = 0$, the motion after each blow starts with a slight loop under the anvil line. This negative displacement can not take place in the actual system, so that a certain distortion of the motion will occur under these conditions. The negative displacement is very small, however, and it is not believed that this distortion will have any practical consequence.



Finally, it may be of interest to evaluate the energy dissipation in each blow, E , for our three systems. For the systems 1 and 3 this is very simple, and it is found that

$$E = \frac{1}{2} M (v_2^2 - v_1^2) = 2 M \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} a^2 \omega^2 \sin^2 \Phi. \quad \dots \dots \dots (31)$$



For the system 2, on the other hand, it is necessary to take the difference between the kinetic energy of the entire system before and after the blow. Denoting by $\dot{\theta}_2$ and $\dot{\theta}_1$ the angular velocity of the eccentric wheels before and after the blow we find that

$$E = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 \rho^2 (\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) (v_2^2 - v_1^2) - M_1 r \sin \Phi (\dot{\theta}_2 v_2 + \dot{\theta}_1 v_1) \quad (32)$$

The lowest value that E can have corresponds to $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega$, in which case $E = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) (v_2^2 - v_1^2)/\omega^2$. The true value of E must be considerably above this value, however, because the eccentric wheels contribute an important part to the kinetic energy of the system. It is possible to obtain an approximation of this true value by considering the conditions in the impact. It can be shown in this manner that, for ordinary design proportions, the energy per blow may be as much as ten times the value corresponding to $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$. Thus, while the approximate theory may give reasonable results as far as the general performance is concerned, it must not be used directly for computing the output.

IV. Experimental results

A series of experimental investigations have been made on a percussion device of the type 2, the results of which will be reviewed very briefly. The tests intended to establish:

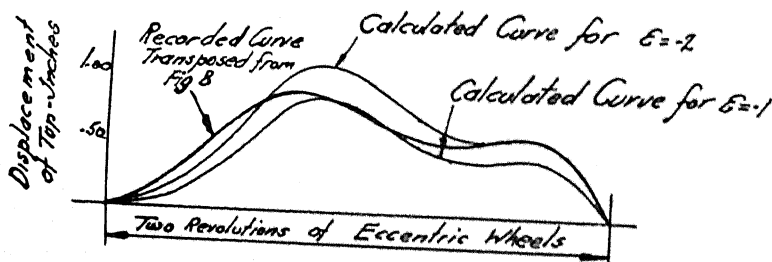


Fig. 8.

Comparison between Calculated and Recorded Displacement Curves.

(a) The space times curves for the tup motion, giving, at the same time, the blow frequency, the mode of operation, and, at least approximately, the velocity of return and approach. (b) The position of the eccentric wheels at different parts of the operating cycle. (c) A record of the voltage and the current of the driving motor, taken in such a manner that the ripples due to the armature slots were magnified to show the speed variation of the motor. Each one of these elements were recorded by an oscillograph, which also recorded a 25 cycle timing wave.

Fig. 7 (Plate IV) shows an oscillogram that was obtained from operation in the second mode during chiseling in steel. In Fig. 8 the displacement curve for the tup has been drawn in comparison with theoretical displacement curves for $\epsilon = .1$ and $\epsilon = .2$ calculated for the following measured values of various elements $M_1 g = 1.12 \text{ lbs}$, $M_2 g = 1.45 \text{ lbs}$, $r = .425 \text{ inch}$, $\rho_0 \cong .95 \text{ inch}$, $\alpha = 45^\circ$, $k = 15 \text{ lbs/inch}$ and $x_0' = .313 \text{ inch}$. This comparison shows that the coefficient of restitution had a value slightly above .1.

From the above values of the hammer elements we calculate the natural frequency of the tup for unobstructed harmonic oscillations, and the spring function. This calculation gives 7.55 cycles per second for the natural frequency, and $S_2 = 2.32$. Now, using the characteristic curves on Fig. 5 we find that, for $\epsilon = .1$, we shall have $q = 5.05$ and $\Phi = 64^\circ$. Thus, the hammer should operate at $5.05 \times 60 \times 7.55 = 2280 \text{ rpm}$. Against these values the oscillogram on Fig. 7

Fig. 9.

Diagram Showing Variation in Angular Velocity of Eccentric Wheels.

Plotted from Fig. 7

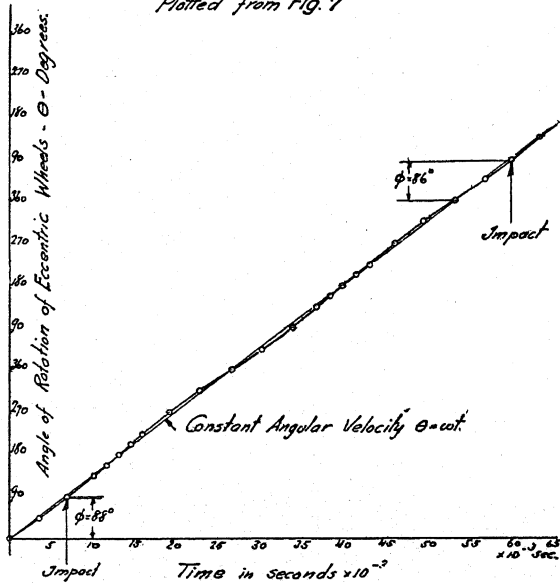


Fig. 12.

Diagram Showing Variation in Angular Velocity of Eccentric Wheels.

Plotted from Fig. 10.

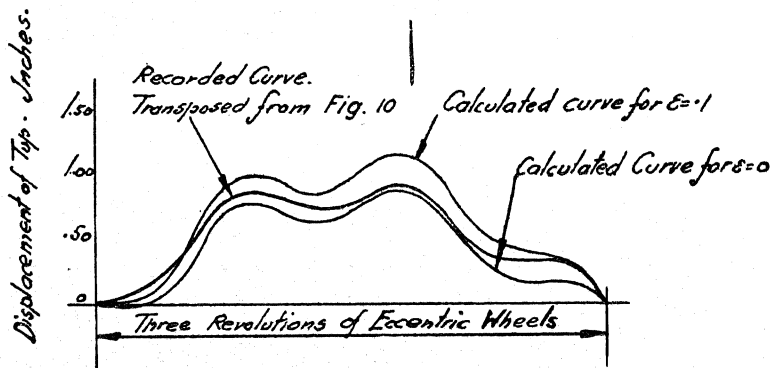
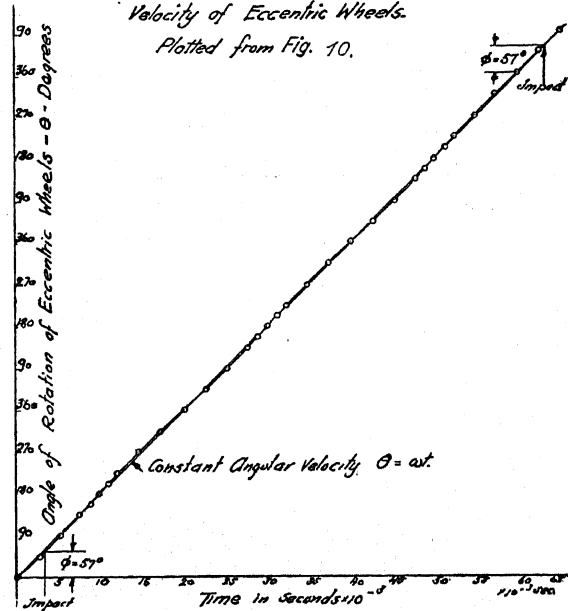


Fig. 11

Comparison between Calculated and Recorded Displacement Curves.

gives 2260 rpm and $\Phi = 90^\circ$. The calculated value of the velocity of approach is 92 against a recorded value of about 100 inches per second. The agreement between the calculated and recorded values of the operating speed and the velocity of approach is fairly good, but the angle Φ has a value considerably different from the calculated value. The author has not succeeded in advancing a satisfactory theory for this discrepancy, but it is probably due to the disturbance in the impact. There are no evidence of large variations of the angular velocity of the eccentric weights, however, as shown by the curve in Fig. 8 which has been prepared from the record

at the bottom of the oscillogram on Fig. 7. This record was not adapted to record the sudden variation of the angular velocity at the blow, so that no definite value of the energy-dissipation can be obtained. The maximum variation in angular velocity between blows seems to be about 10 %.

Figs. 10 (Plate IV), 11, and 12 give a similar set of results from the same hammer for operation in the third mode during chiseling in steel. The mechanical parts of the hammer were the same, the only difference being in the higher voltage on the motor. The calculated values of speed, angle Φ , and velocity of approach are here 3190rpm, 63 degrees, and 125 inches per second, against recorded values of 3040 rpm, 57 degrees, and 120 inches per second. The agreement is fairly good for all three quantities in this case.

It is shown by these results that the theory given above gives a reasonable basis for the design of devices of this kind. In addition to these tests there has been collected a considerable amount of information on operating speeds for more extensive variations of the different construction variables. As a general conclusion from the data obtained in this manner it seems that the performance of the hammers are quite accurately determined by the characteristic curves on Fig. 5. Certain deviations have been observed, however, such as the disagreement in the angle Φ mentioned above, and, of greater importance, the fact that it seems to be possible to operate the hammer at a speed slightly different from the synchronous speed given by the characteristic curves. This occurs when the driving motor is not a synchronous motor, and seems to indicate the existence of a certain range of speed ratios, which is widest for the first mode, and tapers down to a narrow strip for the higher modes. This phase of the theory represents a problem, for which the author has not yet found a satisfactory solution, and which is suggested as an interesting subject for further study.

Ueber ein neues Verfahren zur Ermittlung von Schwingungsperioden von Turbinenscheiben

Von M. König, Rugby (England)

Das Problem der Schwingungen kreisförmiger Platten hat in den letzten Jahren besondere praktische Bedeutung erlangt durch Brüche von Laufscheiben in Dampfturbinen, deren Ursprung in Schwingungen der Scheibe ermittelt wurde. Diese Schwingungen waren hervorgerufen durch Resonanz periodischer Störungen (wie partielle Beaufschlagung etc.) mit einer der natürlichen Perioden der Scheibe.

Als Erster darauf hingewiesen und Berechnungsmethoden entwickelt zu haben, ist das Verdienst von Prof. STODOLA.

Diese Berechnungsarten basieren auf die grundlegenden Arbeiten von KIRCHHOFF und dem Satze von RAYLEIGH über den Extremalwert der Periode einer Eigenschwingung gegenüber willkürlichen Schwingungsformen. Prof. STODOLA hat auch die Anwendbarkeit des Verfahrens von RITZ und sein Zusammenhang mit dem RAYLEIGHschen Satze erläutert.

Es liegt in der Natur dieser Näherungsverfahren, daß ohne zu große Komplikation den KIRCHHOFFschen Randbedingungen nicht mathematisch streng Genüge getan werden kann. Prof. STODOLA erwähnt in seinem Buche über Dampfturbinen, daß umständliche Rechnungen für den einfachen Fall der Schirmschwingung dartun, daß z. B. der Einfluß der Nabebefestigung erheblich sein kann.

Im übrigen findet sich meines Wissens keine Stelle in der einschlägigen Literatur, die diesen wichtigen Punkt behandelt.

In der hier auszugsweise gegebenen Untersuchung ist nun ein Verfahren entwickelt, das — innerhalb des Näherungsgrades der Methode an sich — erlaubt und verlangt, die Bedingungen, denen die Begrenzungen der Scheibe unterworfen sind, mathematisch streng zu berücksichtigen. Das Verfahren stützt sich auf ein von RAYLEIGH zur Untersuchung der Schwingungen von Saiten etc. mit ungleicher Masseverteilung benütztes Prinzip. Den Hinweis darauf und die Anregung zur Prüfung seiner Verwendbarkeit zur Untersuchung von Turbinenscheiben verdanke ich Prof. MEISSNER, der auch sonst unterstützend mit stetem Interesse die Arbeit verfolgt hat.

Wir gehen aus von den KIRCHHOFFschen Gleichungen der Schwingungen einer isotropen, homogenen, dünnen Platte konstanter Dicke. Da nur Normal-Schwingungen untersucht werden sollen, benützen wir für die Durchbiegung der Platte den bekannten Ansatz einer solchen.

$$W = \psi_r \cdot \cos(\lambda t - \epsilon) \cos(n\vartheta - \alpha) = \psi \cdot p \cdot \cos(n\vartheta - \alpha) \quad \dots \dots \dots (1)$$

wo ψ_r Funktion nur des Radius, p nur der Zeit ist. ϑ bedeutet den Polarwinkel, n die Anzahl der Knotendurchmesser des Schwingungsbildes und $\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{T}$ die Frequenz der Schwingung.

In die allgemeine Schwingungsgleichung eingesetzt, führt dieser Ansatz auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung, die in zwei BESSELSche Differentialgleichungen zerfällt. Es wird ψ die Summe von BESSELSchen Funktionen n -ter Ordnung, I. und II. Art mit reellem und imaginärem Argument

$$\psi = A_1 J_n(z) + B_1 Y_n(z) + A_2 I_n(z) + B_2 K_n(z) \quad \dots \dots \dots (2)$$

wobei das Argument $z = K\sqrt{\lambda} \cdot r$ und $K^4 = \frac{3\rho(I-v^2)}{E \cdot h^3}$

Es ist

$$I_n(z) = \mathcal{F}_n(iz) \text{ und } K_n(z) = Y(iz).$$

Die zur Ermittlung der Konstanten $A_1 B_1 A_2 B_2$ resp. ihrer Verhältnisse und der Frequenz λ notwendigen und hinreichenden Gleichungen ergeben sich aus den Randbedingungen. Damit im besonderen $A_1 B_1 A_2 B_2 \neq 0$ ausfallen, muß die Determinante der Bedingungengleichungen Null werden. Diese Forderung liefert die Frequenzgleichung der Platte.

Die Kenntnis der Frequenz für gegebene Randbedingungen bildet eine Grundlage der Anwendung des Prinzips, das RAYLEIGH entwickelt hat, um die Schwingungen eines Systems zu bestimmen, das aus einem einfachen, der strengen Bestimmung der Perioden zugänglichen Systeme durch kleine Aenderungen in den Massen- und Elastizitäts-Verhältnissen abgeleitet werden kann.

Die Normalkoordinaten, d. h. die Funktionen, welche die Eigenschwingungen ausdrücken, seien also für das einfache System bekannt und werden auch zur Untersuchung des variierten Systemes benützt, für welches sie nur noch angenähert Normalfunktionen sind. Zum Beispiel ändern sich bei der r -ten Normalschwingung des variierten Systems auch die übrigen Hauptkoordinaten des einfachen Systemes, indessen nur wenig und proportional $\cos \lambda_r t$, da die Bewegung harmonisch ist. Aus einer der Gleichungen des Systemes von simultanen Bewegungsgleichungen nach Lagrange z. B. der s -ten läßt sich das Verhältnis der r -Koordinate der betrachteten r -ten Schwingung zu einer der andern mit varierten Koordinaten — in diesem Falle die s -te — bestimmen. Damit folgt aus der r -ten Bewegungsgleichung des angenähert einfachen Systems, mit Vernachlässigung kleiner Größen, die korrigierte Frequenz. —

$$\lambda_r^2 = \frac{c_{rr} + \delta c_{rr}}{a_{rr} + \delta a_{rr}} - \sum_{s \neq r} \frac{(\delta c_{rs} - \lambda_r^2 \delta a_{rs})^2}{a_{ss} a_{rr} (\lambda_s^2 - \lambda_r^2)} \dots \dots \dots (3)$$

Das zweite Glied im RAYLEIGHschen Ausdrucke ist im allgemeinen klein und kann für Turbinenscheiben, wie die numerischen Beispiele zeigen, vernachlässigt werden.

In der Anwendung des Prinzips auf Turbinenscheiben betrachten wir als das einfache, der strengen Berechnung zugängliche System, die Kernplatte, deren Konstante halbe Dicke gleich ist der minimalen halben Stärke der Scheibe. Ihre Innen- und Außen-Radien sind diejenigen der profilierten Scheibe. Aufbauend auf diese Kernplatte wird der Rest der Scheibe in konzentrische Ringe von solcher Dicke zerlegt, daß das Profil durch einen sich ihm möglichst anpassenden gestuften Linienzug ersetzt wird. Damit wird nun über das jeweilige Intervall eines Ringes die Scheibendicke konstant, was in diesem Bereiche die Integration der Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie ermöglicht. Die totale kinetische resp. potentielle Energie des variierten Systemes, in unserem Falle der profilierten Scheibe kann dann geschrieben werden als diejenige der Kernplatte vermehrt um die Anteile der darüber gelagerten Schichten.

Zur Aufstellung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für Eigenschwingungen sind kinetische und potentielle Energie in Normalkoordinaten auszudrücken, was durch Einführung des Ansatzes (1) für eine Normalschwingung erreicht wird. Es lassen sich dann die Koeffizienten in der RAYLEIGHschen Beziehung für die Frequenz des variierten Systemes direkt ablesen.

Für die numerische Berechnung hat sich folgendes Vorgehen als zweckmäßig erwiesen:

Der Wert der Periode der Kernplatte wird aus der Frequenzgleichung, die den vorliegenden Randbedingungen entspricht, ermittelt. Das ausführliche Tabellenmaterial, wie es

¹⁾ Watson: Theory of Bessel-Functions. Cambridge 1922.

z. B. gegeben ist in WATSON's Theory of Bessel Functions¹⁾, ermöglicht die Aufstellung von Hilfskurven für die in Frage kommenden Argumentswerte, womit die Nullstellen der Frequenzgleichung durch graphisches Auftragen relativ einfach gefunden werden. Mit Kenntnis der Frequenz sind auch die Verhältnisse der Konstanten $A_1 B_1 A_2 B_2$ in (2) aus den Bedingungs-
gleichungen ermittelbar. Da über eine dieser Konstanten verfügt werden kann, folgen daraus auch die Absolutbeträge der anderen. Die Amplitude ψ der Scheibenauslenkung in der Winkel-
halbierenden zwischen zwei Knotendurchmesser und ihre Ableitung nach dem Radius

$$\psi' = K\sqrt{\lambda} \{A_1 \mathcal{F}_n'(z) + B_1 Y_n'(z) + A_2 I_n'(z) + B_2 K_n'(z)\} \dots \dots \dots (2a)$$

wird nun für Tabellenwerte der Besselfunktionen in Abhängigkeit des Radius, welcher aus

$$R = \frac{z}{K\sqrt{\lambda_0}} \text{ folgt, graphisch aufgetragen. Ebenso der Wert von}$$

$$\psi_* = A_2 I_n(z) + B_2 K_n(z) - A_1 \mathcal{F}_n(z) - B_1 Y_n(z) \dots \dots \dots (4)$$

Die im Ausdrucke für die korrigierte Frequenz

$$\lambda^2 = \frac{E h_0^2}{3 \rho (1 - \nu^2)} \times$$

$$\times \lambda_0^2 K^4 \int_0^R \psi_*'^2 r dr - 2(1 - \nu) \left/ \frac{\psi_*'^2}{2} - \frac{n^2}{r} (\psi_* \psi_*' - \frac{\psi_*^2}{2r}) \right/ \Big|_0^R + \left(\left(\frac{h_1}{h_0} \right)^3 - 1 \right) \left\{ \lambda_0^2 K^4 \int_{r_2}^{r_1} \psi_*'^2 r dr - 2(1 - \nu) \left/ \frac{\psi_*'^2}{2} - \frac{n^2}{r} (\psi_* \psi_*' - \frac{\psi_*^2}{2r}) \right/ \right|_{r_2}^{r_1} \dots$$

$$\int_0^R \psi^2 r dr + \left(\frac{h_1}{h_0} - 1 \right) \int_{r_2}^{r_1} \psi^2 r dr + \dots \dots \dots (5)$$

auf tretenden Teil-Integrale $\int_{r_i}^{r_o} \psi^2 r dr$ und $\int_{r_i}^{r_a} \psi_*^2 r dr$ werden mit Hilfe der $\psi^2 \cdot r$ und $\psi_*^2 \cdot r$ -Kurven

am einfachsten durch Planimetrierung bestimmt. Für das jeweilige Intervall, entsprechend der Stufeneinteilung, werden dazu die ψ - und ψ' -Werte aus den Kurven abgelesen. Es sind damit alle Elemente zur Ermittlung der Frequenz nach (5) bekannt.

Unsere Methode ergibt direkt die Eigenschwingungsperioden der ruhenden Scheibe allein. Bei Berücksichtigung der Fliehkraft muß dieser in der allgemeinen Schwingungsgleichung Rechnung getragen werden. Im allgemeinen Falle der profilierten Scheibe, wo kein einfacher analytischer Ausdruck für die Spannungen besteht, wird diese Gleichung praktisch unlösbar. Nun ist aber zu bemerken, daß der Einfluß der Rotation zahlenmäßig relativ klein ist und es praktisch wohl genügt, ihn unter Zugrundelegung der für die ruhende Scheibe nach vorliegender Methode ermittelten Auslenkung ψ resp. deren Ableitung nach dem Radius näherungsweise z. B. nach Prof. STODOLA zu bestimmen. — Das Gleiche gilt auch für den Einfluß ungleicher Temperaturverteilung, ihr Einfluß kann nach STODOLA der ruhenden Scheibe superponiert werden.

Einige numerische Beispiele.

1. *Platte mit konzentrischem Verstärkungsring.* Schwingung mit zwei Knotendurchmessern.

$$2 R_a = 100 \text{ cm, } 2 h_o = 2 \text{ cm, } E = 2,2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \rho = 7,95 \times 10^{-6} \text{ kg s}^2 \text{ cm}^{-4}, \nu = .3 .$$

$$\delta h = .688 \text{ cm.}$$

$$\lambda_o = \text{nach Kirchhoff} = 686.1 / \text{sec} \therefore V.P.M. = 6554, K^4 = 9.862 \times 10^{-12} \text{ s}^2 \text{ cm}^{-4}.$$

RESULTATE.

	$R a_{cm}$	0	50	38	28	18	8
	$R i_{cm}$	0	47	35	25	15	5
Volle Platte	$\lambda_0 = 686.1$		712.1	749.5	755.2	762.0	715.5
	in 0/0: 100		103.8	109.2	110.1	111.0	104.2
Eingesp. Platte	$R_i/R_a = .2$	818	841	902	930	958	
	0/0	100	102.8	110.5	113.6	117.1	

Für die Platte mit Bohrung ergibt sich im weiteren, wenn $\frac{R_i}{R_a} = .200$

frei	$\lambda = 650/cm$	$= 100$	0/0
gehalten	$\lambda = 714$	$= 110$	0/0
eingespannt	$\lambda = 818$	$= 125.9$	0/0

2. Scheibe mit trapezförmigem (konischem) Profil.

a) Ohne Bohrung. $2 R_a = 100 cm$. $h_{r=0} = 3 cm$, $h_{r=50} = 1 cm$. $\therefore h_0$ der Kernplatte $= 1 cm$, d. h. $\lambda_0 = 686.1/sec$ und bei einer Schichtendicke von:

$\delta h = 4 mm$	$\lambda = 1605.5$	$VP M = 15330$
2 mm	$\lambda =$	$= 15160$
nach Stodola-Oehler		$= 14985$
„ „ -Rayleigh		$= 15650$

b) Stärkere, konische Scheibe.

$2 R_a = 100 cm$ $h_{r=0} = 5 cm$ $h_{r=50} = 1 cm$, d. h. ohne Bohrung $\lambda_0 = 686.1/sec$.

$\delta h = 4 m/m$	$\lambda = 2691$	$VP M = 25700$
nach Stodola-Oehler		$= 24730$
„ „ „ erweitert		$= 24805$

dieselbe Scheibe mit Bohrung $R_i/R_a = .2$, 2 Knotendurchmesser.

Frei: $\delta. h. = 4 mm$	$\lambda_0 = 650.0$	$\lambda = 2332$	$VP M = 22270$
Nach Stodola-Oehler			$= 22100$
Eingespannt		$\lambda = 3625$	$= 34610$

3. Profilierte Turbinenscheibe (mit Kranz und Nabe), 2 Knotendurchmesser.

$2 R_a = 180 cm$, $\frac{R_i}{R_a} = .219$, $h_0 = 579 cm$, $K^4 = 29.41 \times 10^{-12}$

a) „gehalten“	$\lambda_0 = 130.4$	$\lambda = 319.0$	$V.P.M. = 3090$
b) „frei“	$\lambda = 116.5$	$\lambda = 265.0$	$= 2530$

c) Versuchsplatte leicht niedergehalten, nach Messung $VP M = 2600$.

Erweiterung der Methode Stodola-Oehler.

In der genaueren Formel für die Durchbiegung einer Scheibe bei einer Eigenschwingung treten an Stelle von r^s im Oehlerschen Ansatz

$$w = a r^s \sin K \varphi \dots \dots \dots (1)$$

Besselfunktionen. Angenähert muß der Exponent s dem Exponenten des ersten Gliedes der letzteren entsprechen, d. h. ganz allgemein wird s für Knotendurchmesser-Schwingungen angenähert gleich der Anzahl der Knotendurchmesser sein. Eine größere Annäherung an die wirkliche Durchbiegung ergibt sich aus der Form einer Besselschen Reihe zu

$$w = a (r^s + \beta r^{s+2}) \sin K \varphi \dots \dots \dots (2)$$

Der Wert s , welcher λ zu einem Minimum macht, kann in erster Annäherung nach (1) und daraus mit Hilfe einer Randbedingung β gefunden werden.

Mit Einführung von β ergibt sich nun eine Korrektur für s und λ_{Min} . Ist die Abweichung wesentlich, so ist die Rechnung mit dem korrigierten Werte von β nochmals durchzuführen.

$$\lambda^2 = \frac{E \cdot h_o^2}{\rho (1 - \nu^2) R_a^4} \cdot \frac{A}{B} \dots \dots \dots (3)$$

wo

$$\text{nach Oehler: } A = a_1 \cdot b_1 \quad B = c_1 \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{und erweitert: } A = a_1 b_1 + \beta R^2 a_2 b_2 + \beta^2 R^4 a_3 b_3; \quad B = C_1 + 2 \beta R^2 c_2 + \beta^2 R^4 c_2 \dots (5)$$

wo a und b Funktionen von s und den Scheibenabmessungen sind.

Kombination der graphischen Methode von Stodola mit analytischer Minimumsbestimmung

Wenn nach Stodola von zwei Annahmen die ψ -Kurven bestimmt sind, kann eine Minimumsbestimmung wie folgt durchgeführt werden. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + p \psi_2 \dots \dots \dots (6) \\ \text{d. h. } \psi' &= \psi_1' + p \psi_2' \\ \text{und } \psi'' &= \psi_1'' + p \psi_2'' \end{aligned}$$

Diese Werte eingeführt in die Ausdrücke für Φ_i , Φ_k und Φ_z ergeben

$$\Phi_i = \Phi_{i_1} + p^2 \Phi_{i_2} + p \Phi_{i_3} \quad \text{wo } \Phi_{i_3} = \text{Fkt. von } \psi_1 \text{ und } \psi_2 \text{ neu zu rechnen ist,}$$

Φ_k und Φ_z folgen analog.

$$\lambda^2 = \frac{E \cdot h_o^2}{\rho (1 - \nu^2) R^4} \times \frac{\Phi_{i_1} + p \Phi_{i_3} + p^2 \Phi_{i_2}}{\Phi_{k_1} + p \Phi_{k_3} + p^2 \Phi_{k_2}} \times \frac{\Phi_{z_1} + p \Phi_{z_3} + p^2 \Phi_{z_2}}{\Phi_{k_1} + p \Phi_{k_3} + p^2 \Phi_{k_2}} \times \omega^2 \dots (7)$$

Daraus folgt durch probeweises Annehmen von p und graphische Darstellung λ_{Min} .

Théorie du potentiel newtonien

Sur le principe de Picard

Par G. Bouligand, Poitiers

1. La présente communication a pour but de généraliser ce théorème de M. EMILE PICARD, donné depuis fort longtemps par l'illustre géomètre dans son cours de la Sorbonne¹⁾:

Soit une fonction $U(P)$ uniforme et harmonique dans une certaine région, sauf en un point A intérieur, où elle peut devenir infinie: si elle reste positive dans une sphère de centre A , elle est de la forme

$$U(P) = \frac{C}{AP} + V(P)$$

C désignant une constante positive, et $V(P)$ une fonction harmonique dans toute la région précédente.

Ce théorème peut s'étendre dans bien des directions. J'ai donné un résumé de mes premières recherches sur ce sujet dans le fascicule XI du *Mémorial des Sciences Mathématiques*²⁾: il s'agit là du cas où une fonction harmonique demeure partout finie dans son domaine d'existence, sauf en un point de sa frontière, où elle peut devenir infinie, mais en restant positive au voisinage de ce point. Notamment, un intérêt particulier s'attache au cas où la fonction s'annule en tout autre point de la frontière (sauf peut-être aux points irréguliers, au sens attaché à cette locution dans la théorie du problème de DIRICHLET³⁾): dans des conditions assez larges, la fonction est alors déterminée à un facteur constant près; mais il y a des cas d'exception dont j'ai cité des exemples. J'ai montré le lien intime qui existe entre ces questions et la théorie des substitutions linéaires à coefficients positifs dans l'espace fonctionnel. On peut d'ailleurs présenter ce lieu sous différents aspects. Dans le fascicule cité, j'ai étudié les empreintes de la fonction harmonique considérée sur une famille de surfaces tendant vers le point singulier: j'ai été ainsi conduit à développer la théorie de certaines équations intégrales solidaires de l'équation de LAPLACE. Mais on peut opérer autrement: soit O le point de la frontière où la fonction cesse d'être finie, point qui peut appartenir soit à un ensemble d'un seul tenant de la frontière, soit à un nombre fini ou même à une infinité dénombrable de tels ensembles. En faisant une inversion de pôle O , nous aurons un domaine infini, soit à une branche infinie, soit à un nombre fini ou même à une infinité dénombrable de telles branches. Dans des cas étendus, on peut dire que la fonction harmonique qui s'annule sur la frontière de ce nouveau domaine (sauf aux points irréguliers), qui devient infinie et positive lorsqu'on s'éloigne dans une des branches, mais par contre s'évanouit dans les autres branches, est déterminée à un facteur constant près. Or, si l'on se place au point de vue: *géométrie de l'espace fonctionnel*⁴⁾, on doit remarquer que cette fonction symbolise

¹⁾ Voir Bulletin Soc. Math. de France, année 1924, p. 162.

²⁾ Fonctions harmoniques: Principes de Picard et de Dirichlet, pages 15 et suiv.

³⁾ Sur le problème de Dirichlet: Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, année 1925, p. 59—112.

⁴⁾ Voir les Leçons d'analyse fonctionnelle de M. Paul LEVY. A noter que les itéries de la région positive de l'espace fonctionnel, par la substitution du texte s'emboîtent les unes dans les autres: leur convergence vers une direction principale unique a lieu quand le diamètre angulaire d'une de ces régions (dédit de la notion de produit scalaire de deux fonctions figurées par des points de cette région) tend vers zéro.

une direction principale, à coefficients de direction tous positifs, de la substitution linéaire à coefficients positifs définie en prenant une médiane⁵⁾ d'une fonction quelconque, continue dans le domaine infini et astreinte seulement à s'annuler sur la frontière et à s'annuler à l'infini dans les branches distinctes de celles à laquelle un rôle particulier a été dévolu. On a ainsi, du principe de M. PICARD, l'aperçu intuitif le plus immédiat: en même temps, on en saisit mieux la très grande généralité. A l'espace fonctionnel dont les points représentent des fonctions définies sur un champ continu, on peut substituer par exemple un autre espace dont les points correspondent à des fonctions définies sur un ensemble dénombrable: pour fixer les idées, pavons l'espace d'un réseau de cubes, et considérons un domaine infini obtenu en juxtaposant une infinité de ces cubes; appelons *fonction pré-harmonique* dans ce domaine une fonction définie aux nœuds intérieurs du réseau et telle que sa valeur en un nœud soit la moyenne arithmétique de ses valeurs aux six nœuds les plus proches. Dans des cas étendus, si une telle fonction s'annule aux nœuds périphériques et s'évanouit dans toutes les branches infinies, à l'exception d'une seule où elle devient infinie par valeurs positives, elle est encore déterminée à un facteur constant près. Mais, il y a des cas d'exception: on peut citer notamment celui du domaine compris entre deux plans parallèles empruntés au réseau; il existe alors non plus une direction principale unique à coefficients de direction tous positifs, mais bien une infinité de telles directions réparties dans une multiplicité linéaire: la substitution génératrice sera ici l'opération consistant à remplacer en un nœud du réseau la valeur d'une fonction donnée en chacun de ces nœuds par la moyenne des valeurs qu'elle acquiert aux six nœuds les plus proches.

En résumé, la discussion du principe de M. PICARD se ramène à la discussion de l'unicité d'une direction principale à coefficients de direction positifs, pour une *substitution linéaire* à coefficients positifs, cette locution étant entendue au sens général de l'analyse fonctionnelle.

2. Mais l'objet principal de cette communication sera d'étendre le résultat de M. PICARD, tel que nous l'avons énoncé au début, dans une autre direction. Nous allons établir le théorème suivant:

Soit une fonction $U(P)$, harmonique dans une certaine région (où nous la supposons uniforme), sauf sur un ensemble fermé E , tout entier intérieur à cette région et dont chaque point soit limite de points non situés sur E . On suppose que, sur cet ensemble E , cette fonction puisse devenir infinie, mais en restant positive. Nous précisons cette hypothèse en la formulant ainsi: en chaque point Q de E , on a

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} U(P) = +\infty \qquad \lim_{P \rightarrow Q} U(P) > 0$$

Dans ces conditions, la fonction $U(P)$ est la somme du potentiel d'une répartition de masses positives sur l'ensemble E et d'une fonction $V(P)$ harmonique en tout point de la région précédente⁶⁾.

Une application simple de la formule de réciprocité ramène immédiatement la démonstration de ce théorème à celle du suivant:

Soit une fonction $U(P)$, uniforme et harmonique dans tout l'espace, sauf sur un ensemble E fermé, tout entier à distance finie et n'admettant aucun point intérieur. En chaque point Q de E , on suppose que

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} U(P) = +\infty \qquad \lim_{P \rightarrow Q} U(P) > 0$$

⁵⁾ Voir fasc. XI du Mém., pages 4 et 5.

⁶⁾ Si E se réduit à un point unique, on retrouve le théorème de M. Picard.

On suppose en outre que $U(P)$ s'évanouit à l'infini. La fonction $U(P)$ est alors le potentiel d'une répartition de masses positives dont l'ensemble E est le support.

Pour établir cette dernière proposition, considérons l'équation $U(P) = C$ où la constante C a une valeur positive, non nulle. Puisque $U(P)$ s'évanouit à l'infini, cette équation définit une surface située tout entière à distance finie: on peut parler, avec précision, de la région R_c extérieure à cette surface formée par les points où l'on a au sens strict $U(P) < C$. Elle se dilate lorsque C augmente. Nous allons étudier plus en détail la disposition des surfaces

$$U(P) = C$$

Traçons une sphère quelconque contenant E à son intérieur: $U(P)$ est harmonique hors de cette sphère, sur laquelle (et hors de laquelle) elle est positive; d'ailleurs elle s'évanouit à l'infini. On peut donc l'exprimer, dans la région extérieure à cette sphère, par une intégrale de POISSON, et tirer de cette expression le résultat suivant: à l'infini, $U(P)$ a une expression asymptotique de la forme $\frac{\mu}{r}$ ou encore: ε tendant vers zéro, la surface $U(P) = \varepsilon$ tend à devenir homothétique à une sphère. Faisons croître C de ε à $+\infty$. Lorsqu'on franchira certaines valeurs de C , il y aura décomposition d'une nappe de cette surface en plusieurs autres. Si l'on a $C' > C$, le système des nappes dont se compose $U(P) = C'$ ne sera jamais extérieur au système des nappes dont se compose $U(P) = C$. Notons encore que certains points de E , pourront à partir d'une certaine valeur de C , se trouver sur la surface $U(P) = C$; on peut remarquer que $U(P)$ est la solution du problème de DIRICHLET extérieur (au sens général) pour la région R avec les données $U(P) = C$ sur la frontière à distance finie, et $U(P) = 0$ à l'infini, les points de E qui appartiennent à cette frontière en sont les points irréguliers⁷⁾.

Examinons maintenant la disposition des lignes de gradient (c'est-à-dire tangentes au vecteur $\vec{\text{grad}} U$ en chacun de leur point). Elles cheminent orthogonalement aux surfaces précédentes, et si on les suit en venant de l'infini, elles se dirigent sans cesse vers les U croissants. Finalement, chacune de ces lignes aboutit nécessairement à un point de l'ensemble E . En vertu de l'hypothèse

$$\lim_{P \rightarrow \infty} U(P) = +\infty$$

tout point de E se trouve exclu de tous les R_c , et à ce titre, il est point d'aboutissement de lignes de gradient (ou au moins limite de tels points d'aboutissement).

Cela posé, par l'intermédiaire de ces lignes de gradient, se trouve établie une correspondance remarquable entre le sphéroïde $U(P) = \varepsilon$ et l'ensemble E : c'est une correspondance par tubes de gradient, à l'intérieur de chacun desquels il y a conservation du flux, et par suite aussi, en vertu du théorème de GAUSS, conservation des charges. Sur $U(P) = \varepsilon$, la densité de la couche en équilibre est proportionnelle à la dérivée normale de U : à chaque ensemble mesurable pris sur $U(P) = \varepsilon$, correspond un ensemble analogue sur $U(P) = C$, pour une valeur quelconque de C , avec la même charge, et cette même charge se retrouve sur un sous-ensemble correspondant de E . Nous définissons donc ainsi sur E , par la correspondance en question, une répartition de masses potentialantes de somme égale à μ . A cette répartition de masses, correspond un potentiel $U_1(P)$. Ce potentiel est arbitrairement voisin de $U(P)$, car cette fonc-

⁷⁾ C'est justement ainsi que M. HENRI LEBESGUE a obtenu le premier exemple de point irrégulier. Voir notre mémoire de la Soc. Pol. sur le problème de Dirichlet, N° 9.

tion est elle-même le potentiel d'une répartition de masses arbitrairement voisine, portée par $U(P) = C$ où C est arbitrairement grand. Donc on a

$$U_1(P) = U(P)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que l'existence d'une fonction $U(P)$, donc la limite supérieure soit infinie en chaque point de l'ensemble E , entraîne que la capacité électro-statique de ce dernier est nulle ⁸⁾. Attirons en terminant l'attention sur l'exemple très simple que fournissent les considérations précédentes en matière d'intégration qualitative. Si nous considérons le système différentiel

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}$$

ses lignes intégrales sont justement les précédentes lignes de gradient, qui viennent de l'infini, dans toutes les directions possibles, pour aboutir à l'ensemble E . Toutes les lignes de gradient dont les directions asymptotiques appartiennent à un angle solide plein déterminent sur E un sous-ensemble dont la charge est proportionnelle à cet angle solide. Cette correspondance entre sous-ensembles empruntés à une sphère d'une part, à l'ensemble E de capacité électro-statistique nulle de l'autre, s'exerce ici par un processus analytique uniforme, sans détriment de la complexité de structure de E et des modalités innombrables qui peuvent se présenter dans la ramification des tubes de gradient. L'exemple ainsi obtenu offre un caractère suffisamment intuitif pour être cité, dans un cours, à seule fin de montrer les circonstances complexes qui se présentent lorsqu'on aborde, du point de vue descriptif, l'étude *en grand* des courbes intégrales d'un système différentiel.

⁸⁾ Voir notre mémoire de la Soc. Pol. sur le probl. de Dirichlet, n° 34.

Sur les origines „stokiennes“ de la cinématique

Par A. Buhl, Toulouse

1. — On sait que la formule de Stokes et ses généralisations ne proviennent que de transformations d'identités telles que

$$\int_C X dY = \iint_S dX dY, \quad \iint_S Z dX dY = \iiint_V dX dY dZ, \dots$$

Ces formules conduisent naturellement à l'Electromagnétisme, à la Dynamique classique des milieux continus, à la Gravifique, ce que j'ai rappelé notamment dans le Fascicule XVI du *Mémorial des Sciences mathématiques*. Si j'avais disposé de quelques pages de plus, j'aurais tout aussi bien reconstruit la Cinématique et, plus particulièrement la Théorie du Trièdre mobile de DARBOUX. On a reproché aux théories de cet éminent et regretté géomètre de ne point conduire aux généralités gravifiques aussi aisément que celles de BIANCHI; l'équivalence est cependant simple à mettre en évidence, ne saurait-ce qu'en montrant que les deux exposés peuvent provenir, aussi bien l'un que l'autre, des identités précédentes.

Parmi les formules qui suivent, il faut particulièrement noter que le système bien connu (5), relatif à des composantes de rotations, donne, par dérivation, le système associé relatif à des composantes de translations. L'explication intime de ce fait se rattache à l'introduction, en Géométrie, de symboles complexes dont on trouve la théorie dans l'*Introduction géométrique à la Mécanique rationnelle* de CHARLES CAILLER, publiée par H. Fehr et R. Wavre (pp. 187—201). Avec ce symbolisme, la Géométrie sphérique est réelle, la Géométrie réglée quelconque est complexe et il n'y a point de résultat concernant des droites concourantes sans une extension complexe à des systèmes réglés généraux. C'est ainsi que des translations peuvent être mises dans la dépendance de rotations.

2. L'Electromagnétisme de MAXWELL-LORENTZ-EINSTEIN repose sur l'égalité

$$\iint_S M_{ij} dx_i dx_j = 0$$

qui comprend comme cas particulier la formule de GREEN

$$\iint_S \begin{vmatrix} dx_2 dx_3 & dx_3 dx_1 & dx_1 dx_2 \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Alors S est une E_2 plongée dans E_3 et, si $F = 0$ est l'équation de S , on peut écrire encore

$$\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \frac{dx dy}{F'_z} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité peut être identiquement nul par choix de S , c'est-à-dire de F , et ceci est le raisonnement analogue à celui qui donne le premier groupe des équations électromagnétiques. Ici, il conduit à des systèmes différentiels du type

$$\frac{dx}{yZ - zY} = \frac{dy}{zX - xZ} = \frac{dz}{xY - yX}.$$

Naturellement X, Y, Z peuvent dépendre de paramètres ou variables auxiliaires. Ainsi nous pouvons considérer comme étant de ce type les systèmes

$$\left. \begin{array}{ccc} \frac{d\alpha}{P dt} & \frac{d\beta}{Q dt} & \frac{d\gamma}{R dt} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ P dt & Q dt & R dt \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

La notation indique que $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ doivent être égalés à leurs mineurs algébriques. Généralement, on aura, avec i indice de sommation,

$$P dt = p_i dt_i, \quad Q dt = q_i dt_i, \quad R dt = r_i dt_i; \quad \dots \dots \dots (2)$$

les p_i , q_i , r_i seront naturellement des fonctions des t_i et chaque t_i pourra être une fonction de t . Au système (1) on peut adjoindre le système plus général

$$\left. \begin{array}{ccc} \frac{dx - D_x}{P dt} & \frac{dy - D_y}{Q dt} & \frac{dz - D_z}{R dt} \\ x & y & z \\ P dt & Q dt & R dt \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Ici, dx , dy , dz et D_x , D_y , D_z peuvent se rapporter à un même déplacement jugé en deux espaces différents et mobiles l'un par rapport à l'autre.

Soit $z = 0$; les équations (3) donnent

$$R dt = \frac{dx}{y} - \frac{D_x}{y} = \frac{D_y}{x} - \frac{dy}{x}$$

et une simplification remarquable se présente si l'on a

$$\frac{dy}{x} = -\frac{dx}{y} = d\omega$$

d'où $x = \cos \omega$, $y = \sin \omega$. Alors

$$d\omega + R dt = \frac{D_y}{\cos \omega} = -\frac{D_x}{\sin \omega} = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = H ds \quad \dots \dots \dots (4)$$

Nous verrons bientôt que ce résultat si simple et si proche des points de départ n'est autre que la formule D'OSSIAN BONNET.

3. — Le système (1) peut être décomposé en systèmes tels que

$$\left. \begin{array}{ccc} \frac{\partial \alpha}{\partial t_i} & \frac{\partial \beta}{\partial t_i} & \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ p_i & q_i & r_i \end{array} \right\}$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p_i}{\partial t_k} - \frac{\partial p_k}{\partial t_i} = q_i r_k - r_i q_k \\ \frac{\partial q_i}{\partial t_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t_i} = r_i p_k - p_i r_k \\ \frac{\partial r_i}{\partial t_k} - \frac{\partial r_k}{\partial t_i} = p_i q_k - q_i p_k \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Imaginons que les p_i , q_i , r_i dépendent non seulement des variables t mais d'un paramètre τ . Alors, si l'on dérive le système (5) par rapport à τ en posant

$$\frac{\partial p_i}{\partial \tau} = \xi_i, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \tau} = \eta_i, \quad \frac{\partial r_i}{\partial \tau} = \zeta_i, \quad \dots \dots \dots (6)$$

on adjoint à ce système (5) un autre système bien connu qui fait de ξ, η, ζ des composantes de *translations* quand p, q, r sont composantes de *rotations* (Cf. G. DARBOUX, Surfaces, t. I, 2^{me} édition, p. 71).

Le fait de passer des rotations aux translations par les dérivations (6) est ici chose essentielle sur laquelle l'attention a déjà été attirée dans le premier paragraphe de cette note.

4. — Venons maintenant explicitement au cas d'une surface ordinaire S en coordonnées curvilignes u et v . Le système (5) devient

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= q r_1 - r q_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= r p_1 - p r_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= p q_1 - q p_1; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

il peut alors se rapporter aux rotations d'un trièdre mobile dont une face glisse sur la surface. Les équations (6) sont ici

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} &= \xi, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = \xi_1; \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} = \eta, \quad \frac{\partial q_1}{\partial \tau} = \eta_1; \\ \frac{\partial r}{\partial \tau} &= \zeta = 0, \quad \frac{\partial r_1}{\partial \tau} = \zeta_1 = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Là où G. DARBOUX pose

$$ds \cos \omega = \xi du + \xi_1 dv, \quad ds \sin \omega = \eta du + \eta_1 dv$$

nous avons

$$ds \cos \omega = \frac{\partial}{\partial \tau} (p du + p_1 dv), \quad ds \sin \omega = \frac{\partial}{\partial \tau} (q du + q_1 dv).$$

Ceci se rapporte au déplacement d'un point M de la surface; pour la représentation sphérique de M , soit M' (0, 0, 1), le système (3) donne

$$d\sigma \cos \theta = q du + q_1 dv, \quad d\sigma \sin \theta = -(p du + p_1 dv).$$

Des calculs simples donnent encore

$$ds \cos (\omega - \theta) = -\frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\sigma, \quad ds \sin (\omega - \theta) = \frac{\partial}{\partial \tau} (d\sigma)$$

$$ds^2 = \left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\sigma \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (d\sigma) \right]^2$$

Sur la surface, il y a des lignes respectivement caractérisées par les équations

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (d\sigma) = 0;$$

ce sont les *asymptotiques* et les *lignes de courbure* respectivement perpendiculaires et parallèles à leur représentation sphérique.

Observons encore que

$$(p du + p_1 dv)(q du + q_1 dv) - (q du + q_1 dv)(p du + p_1 dv) \dots \dots \dots (9)$$

est égal à

$$(p_1 q - q_1 p) (dv \delta u - du \delta v).$$

Donc, d'après la dernière équation (7) et les deux dernières (8) la dérivée par rapport à τ de l'expression (9) est identiquement nulle. Quant cette équation dérivée se scinde en

$$(p du + p_1 dv) \frac{\partial}{\partial \tau} (q \delta u + q_1 \delta v) - (q du + q_1 dv) \frac{\partial}{\partial \tau} (p \delta u + p_1 \delta v) = 0$$

et en l'équation analogue, on a

$$d\sigma \sin \theta. ds \sin \omega' + d\sigma \cos \theta. ds \cos \omega' = 0,$$

$$\cos (\omega' - \theta) = 0, \quad \omega' - \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

Alors les directions du , dv et δu , δv sont conjuguées.

Dans un ordre d'idées analogue, nous allons compléter la formule (4). On a

$$R dt = r du + r_1 dv$$

$$\int_c R dt = \iint_S \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v} \right) du dv = \iint_S (q p_1 - p q_1) du dv$$

Or, par multiplication extérieure,

$$(q p_1 - p q_1) du dv = (q du + q_1 dv) (p du + p_1 dv) = -d\sigma \cos \theta. d\sigma \sin \theta$$

ce qui est, au signe près, la représentation sphérique de l'élément d'aire dS de S .

Le dernier membre obtenu est donc $-K dS$, si K est la courbure totale de S , et la formule (4) devient

$$\int_c d\omega - \int_c H ds = \iint_S K dS$$

ce qui est bien la formule d'OSSIAN BONNET. Nous ne discuterons pas davantage H et K ni l'équation

$$H = d\omega + r du + r_1 dv = 0$$

qui est celle des géodésiques.

Sur un dispositif permettant d'enregistrer le mouvement d'un système animé d'une translation quelconque

Par B. Mayor, Lausanne

Considérons une masse liquide homogène, pesante et maintenue en équilibre relatif par rapport à des axes animés d'une translation quelconque. Si l'on admet qu'un point situé à la cote z_0 sur l'axe Oz , supposé vertical et dirigé vers le haut, soit en contact avec l'atmosphère, on trouve immédiatement que la pression en un point quelconque du liquide a pour expression

$$p = p_0 - \rho [j_1 x + j_2 y + (j_3 + g)(z - z_0)],$$

j_1, j_2, j_3 désignant les composantes de l'accélération d'entraînement.

Imaginons alors que trois lames de quartz, taillées normalement à l'axe électrique et dont les plans se confondent avec les plans coordonnés, soient immergées dans le liquide. Les compressions qu'elles subissent font apparaître sur leurs faces des quantités d'électricité données par les formules

$$q_1 = A - A_1 j_1 - A_2 (j_2 + g),$$

$$q_2 = B - B_1 j_1 - B_2 (j_2 + g),$$

$$q_3 = C - C_1 j_1 - C_2 j_2 + C_3 (j_3 + g),$$

dans lesquelles les coefficients A, B, C dépendent de la densité du liquide, ainsi que des formes, des positions et des constantes électriques de ces lames.

Résolues par rapport à j_1, j_2, j_3 , ces équations font connaître les composantes de l'accélération d'entraînement en fonction des quantités d'électricité développées qui, bien que faibles, peuvent être mesurées grâce aux procédés d'amplification dont on dispose actuellement. Les composantes de l'accélération étant ainsi calculables à toute époque, il devient possible de reconstituer le mouvement du système mobile, les conditions initiales de ce mouvement étant supposées connues.

Dans la plupart des applications, un appareil fondé sur ces principes devra être associé à un jeu de gyroscopes lui assurant un mouvement de translation. Les complications qui en résultent sont largement compensées par le fait qu'un tel appareil est rigoureusement apériodique et que ses indications sont pratiquement instantanées.

Die Anwendung der Theorie des Zufalls auf Probleme der Energiezufuhr in Zentralanlagen

Von W. Kummer, Zürich

Ein neues Anwendungsgebiet der Mechanik der Massenerscheinungen, die ihrerseits mit Hilfe der Theorie des Zufalls behandelt wird, erkennen wir in verschiedenen, technisch bedeutungsvollen Problemen der Energiezufuhr in Zentralanlagen.

Das konkrete Problem, durch welches unsere Aufmerksamkeit auf die hier in Betracht fallende Problemgruppe gelenkt wurde, liegt auf dem Gebiete des elektrischen Bahnbetriebes und hat folgende Formulierung: Wenn auf einer Gemeinschaftsstrecke die Züge verschiedener Bahnverwaltungen elektrisch, mittels der Energiezufuhr in einer Fahrleitung, gefördert werden, wie kann dann die Kraftwerksverwaltung das von jeder beteiligten Bahnverwaltung beanspruchte Leistungsmaximum zutreffend feststellen? Da man durch unmittelbare Messungen wohl die Energien und Effekte der einzelnen Züge, sowie auch die Energie und die Effekte der Gesamtheit der Zugsförderung, jedoch auf keine Weise das von jeder Bahnverwaltung für sich beanspruchte Leistungsmaximum feststellen kann, so bleibt zur Lösung der Aufgabe nur der Weg der Rechnung. Dabei läßt sich zugleich eine Reihe ähnlicher Aufgaben lösen, sofern man nur von einem genügend allgemeinen Ansatz ausgeht.

Bedient eine Zentralanlage zur Verteilung von Energie mittels Elektrizität, Gas, Wasser usw. Z Abnehmer, je mit der Anschlußleistung W_a , so kann die in einem Tag, bzw. in einem Jahr an die Abnehmer ausgegebene mechanische Arbeit A in der Form:

$$A = Z \cdot W_a \cdot T_a$$

geschrieben werden, wenn mit T_a noch die sog. *Abnehmer-Benutzungsdauer* eingeführt wird, die sich ebenfalls auf den Tag, bzw. auf das Jahr bezieht. Der Tag bzw. das Jahr weisen aber eine mögliche Betriebszeit H auf, die größer ist als T_a , und die gemäß der Beziehung:

$$\overline{W} = \frac{A}{H}$$

auf das Leistungsmittel \overline{W} der Zentralanlage führt. Diese weist weiterhin ein charakteristisches Leistungsmaximum W_{max} auf, das zwar kleiner als $Z \cdot W_a$ aber größer als \overline{W} ist. Bei Einführung des sog. Schwankungsverhältnisses $K > 1$ kann man schreiben:

$$W_{max} = K \cdot \overline{W} = K \cdot \frac{A}{H}.$$

Zur Darstellung der Arbeit A kann nun aber auch W_{max} herangezogen werden, indem man die sog. *Werk-Benutzungsdauer* T_w einführt und schreibt:

$$A = W_{max} \cdot T_w.$$

Also ist auch:

$$K = \frac{H}{T_w}.$$

In der Bestimmung von K , bzw. von T_w , liegt nun das Problem, das mit Hilfe der Theorie des Zufalls zu lösen ist. Hierzu ist als grundlegend das Theorem von JAKOB BERNOULLI

zu betrachten, mit dessen Hilfe man die Wahrscheinlichkeit für das vielmalige Eintreffen eines Ereignisses bei einer beliebigen Zahl von Fällen immer dann ermitteln kann, wenn man die Wahrscheinlichkeit für das einmalige Eintreffen des Ereignisses kennt. Im vorliegenden Problem ist das fragliche Ereignis gebildet durch das Angeschlossensein eines Abnehmers an die Zentralanlage, und dient als Maß der Wahrscheinlichkeit seines einmaligen Eintreffens die Abnehmer-Benutzungsdauer, die nun allerdings nicht mehr in beliebigen Maßzahlen T_a (wie Stunden pro Tag oder pro Jahr), sondern als echter Bruch, gemäß dem Formelausdruck $t_a = \frac{T_a}{H}$ zu verwenden ist. Nach dem Theorem von Bernoulli ergibt sich nun für das zeitliche Zusammenfallen von x Einschaltungszuständen von Abnehmern die Wahrscheinlichkeit:

$$w_x = \left(\frac{Z}{x}\right) \cdot t_a^x \cdot (1 - t_a)^{Z-x}.$$

Bildet man die Größe:

$$y = Z \cdot t_a,$$

so geht für genügend große Werte Z die Gleichung für w_x über in die von S. D. POISSON gefundene Form:

$$w_x = \frac{e^{-y} \cdot y^x}{x!}$$

in welcher $e = 2,718 \dots$ bedeutet. Da man doch nur für größere Z mit der Wirklichkeit genügend in Uebereinstimmung bleibt, so kann man sich auf die Verwendung der Formel von Poisson beschränken. Nun besitzt w_x den Maximalwert w'_x beim Sonderwert x' , für den

$$x' = y = Z \cdot t_a$$

gilt. Andererseits ist für x kein höherer tatsächlicher Zahlenwert mehr möglich, als er gemäß einem Grenzwerte w''_x der Funktion w_x als mechanisch zulässig erscheint. Es erscheint nämlich w_x als gleich einer Grenzzeit τ , gemäß welcher, nach Maßgabe der in der Zentralanlage liegenden mechanischen und sonstigen physikalischen Arbeitsverluste, eben nur x'' , und also im allgemeinen nicht alle Z , Abnehmer gleichzeitig Energie aus der Zentralanlage beziehen können. Der Abnehmerzahl x'' entspricht deshalb der Maximaleffekt $W_{max} = x'' \cdot W_a$, während der Abnehmerzahl x' der wahrscheinlichste Effekt, d. h. der Durchschnittseffekt $\bar{W} = x' \cdot W_a$ entsprechen muß. Das gesuchte Schwankungsverhältnis K ergibt sich deshalb in der Form:

$$K = \frac{W_{max}}{\bar{W}} = \frac{x''}{x'} = \frac{x''}{y} = \frac{x''}{Z \cdot t_a}.$$

Für elektrische Zentralanlagen, insbesondere auch bei elektrischen Bahnen, haben wir aus praktischen Beobachtungen einen Wert τ im Betrage von einigen Zeitsekunden als zutreffend ermittelt. Um K im Jahresbetrieb feststellen zu können, benutzen wir für τ den Zahlenwert:

$$\tau = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ Jahr.}$$

Die, für verschiedene Werte y , mit Hilfe der Formel nach Poisson, für $w_x = w''_x = \tau$, errechneten Werte K lassen sich in einem Kurvenbild, über der Mittelwertsgröße y als Abszisse,

darstellen, wie aus Abb. 1 zu entnehmen ist. Die Angabe von τ in Bruchteilen des Tages würde auf die Werte K im Tagesbetrieb führen, die im Abszissenintervall $y = 3$ bis $y = 30$ etwa den 0,8fachen Betrag der Werte K im Jahresbetrieb erreichen.

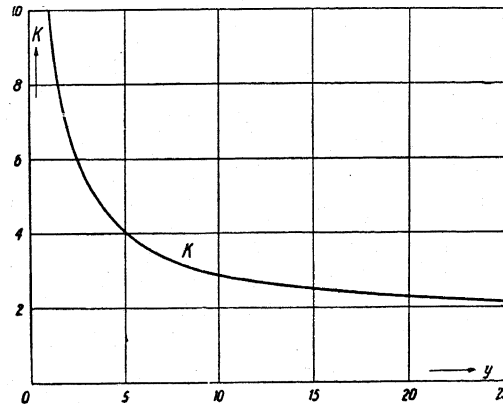


Abb. 1

Mißt man die Größen H , T_w und T_a je in Stunden (h) pro Jahr, wobei:

$$K = \frac{H}{T_w}; \quad y = Z \cdot \frac{T_a}{H},$$

so kann mit Hilfe der Abb. 1 ein Zusammenhang mit T_w mit T_a gegeben werden. Wir wählen hierzu die zwei möglichen Betriebszeiten:

$$H = 8760 \text{ h/Jahr} \quad ; \quad H = 2190 \text{ h/Jahr}$$

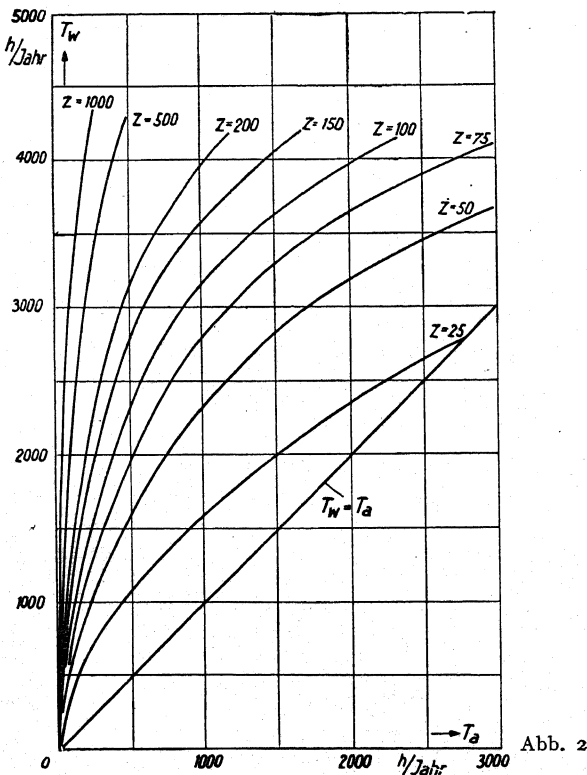


Abb. 2

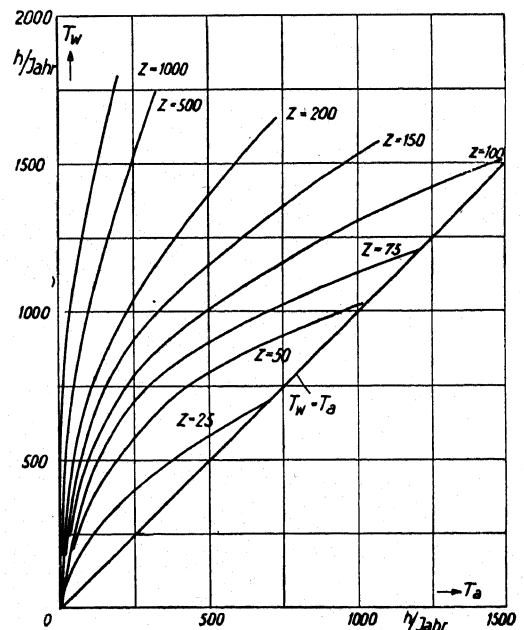


Abb. 3

und Abnehmerzahlen $Z = 25, 50, 75, 100, 150, 200, 500, 1000$; dann ergeben sich die Kurvenbilder nach Abb. 2 und Abb. 3, gemäß denen die verschiedenen Kurven T_w die Diagonal-

linien $T_v = T_a$ jeweils an denjenigen Stellen schneiden, an denen, gemäß der Bestimmung von K , die Größe x gerade gleich der Abnehmerzahl Z ist; jenseits der Diagonallinie wären die Kurven sinnlos, da größere x , also solche gleich Z , unmöglich sind.

Nach diesen, für elektrische Zentralanlagen allgemein gültigen Darlegungen möge nun die Nutzenanwendung auf das konkrete Problem, von dem wir ausgegangen sind, folgen. An Stelle der Abnehmerzahl erscheint die Zahl fahrender Züge; dabei hat sich aber Z auf eine und zwar dieselbe Zeiteinheit zu beziehen, wie T_a und H (d. h. auf ein Jahr, wenn K im Jahresbetrieb, bezw. auf einen Tag, wenn K im Tagesbetrieb zu ermitteln ist), wobei T_a nun die Fahrzeit darstellt, während der ein Zug Effekt aus der Fahrleitung aufnimmt. Die Abb. 1 genügt also, um die in unserem konkreten Problem gesuchten Größen festzustellen. Da aus Betriebsgründen auf der Gemeinschaftsstrecke alle Züge dieselbe Fahrzeit, bezw. auch dieselbe Kenngröße t_a , aufweisen müssen, so gilt für beispielsweise drei beteiligte Bahnverwaltungen:

$$y_1 = t_a \cdot Z_1 \quad ; \quad y_2 = t_a \cdot Z_2 \quad ; \quad y_3 = t_a \cdot Z_3.$$

Der Gemeinschaftsbetrieb der drei Bahnen ist andererseits gekennzeichnet durch:

$$y = t_a \cdot (Z_1 + Z_2 + Z_3).$$

Da y höher liegt, als jeder der drei Zahlenwerte y_1, y_2, y_3 , so fallen, nach Abb. 1, die Schwankungsverhältnisse K_1, K_2, K_3 der drei Bahnen, individuell, d. h. für sich betrachtet, höher aus, als das Schwankungsverhältnis K ihres kollektiven, gemeinschaftlichen Betriebs. Indem wir endlich noch den drei Bahnen gleiche nominelle Zugsleistungen, d. h. Anschlußleistungen W_a zuschreiben, lassen sich die Gemeinschaftsbetriebsgrößen \bar{W} und W_{max} zu den Einzelbetriebsgrößen $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_3$, sowie $W_{1max}, W_{2max}, W_{3max}$ in folgende Beziehungen bringen:

$$\bar{W} = \bar{W}_1 + \bar{W}_2 + \bar{W}_3 = (Z_1 + Z_2 + Z_3) \cdot t_a \cdot W_a = y \cdot W_a$$

$$W_{max} = K \cdot \bar{W}$$

$$W_{1max} + W_{2max} + W_{3max} = K_1 \cdot \bar{W}_1 + K_2 \cdot \bar{W}_2 + K_3 \cdot \bar{W}_3.$$

Nach Abb. 1 folgt nun aber:

$$W_{1max} + W_{2max} + W_{3max} > W_{max}.$$

Der Gemeinschaftsbetrieb der drei Bahnen benötigt folglich ein kleineres Leistungsmaximum, als es der individuelle Betrieb der drei Bahnen, für den die Summe der drei Einzelleistungsmaxima maßgebend wäre, erheischen würde. Da für die Zugförderungskosten die Leistungsmaxima in wesentlichem Maße in Betracht fallen, so besteht nun die Möglichkeit, das sowohl rechnerisch, als auch meßtechnisch feststellbare Kollektivmaximum in drei Teile zu spalten, die unter sich im Verhältnis $W_{1max} : W_{2max} : W_{3max}$ stehen. Obwohl diese Einzelmaxima nur rechnerisch festgestellt werden können, so liefern sie gleichwohl den, für die Anrechnung des Kollektivmaximums an jede der drei Bahnen hinreichend genauen Maßstab.

Soll schließlich noch die Frage nach der innern Berechtigung der Anwendung der Theorie des Zufalls auf Probleme der Energiezufuhr in Zentralanlagen berührt werden, so ist zu beachten, daß eine Bejahung dieser Frage lediglich auf Grund praktischer Uebereinstimmung von Rechnung und experimentellem Befund wird erfolgen können. In dieser Hinsicht hat es sich auch bei der Entdeckung jeder Art von Regelmäßigkeit im Naturgeschehen niemals anders verhalten. Bei den Massenerscheinungen, in denen uns die Regelmäßigkeiten im einzelnen verdeckt sind und sich uns erst in den Mittelwerten kundgeben, scheinen unsere, für die

Vorausberechnung der Mittelwertgrößen benutzten Prämissen zwar oft einer innern Berechtigung zu entbehren. Im vorliegenden Falle, für den die Annahme einer Grenzzeit τ die maßgebende Prämisse darstellt, glauben wir indessen die innere Berechtigung durchaus feststellen zu können. Man kann sich nämlich leicht überzeugen, daß das technische Genügen der Einrichtungen der Zentralanlagen für die Ausbildung bestimmter Leistungsmaxima durchaus von den innern Anlageverlusten abhängig ist, die ihrerseits stets aus gewissen Zeitkonstanten, die mit der Energiefortpflanzung im Zusammenhang stehen, beurteilt werden können. Je nach der Art des Energieträgers einer Zentralanlage (Elektrizität, Gas, Wasser usw.) wechselt natürlich der Anlagetypus, derart, daß auch die Grenzzeit τ jedesmal neu der Erfahrung zu entnehmen ist.

Sur les relations entre la théorie des percussions et celle des systèmes articulés de la résistance des matériaux

Par B. Mayor, Lausanne

Il est possible d'établir, entre la théorie des percussions et celle des systèmes articulés, un parallélisme extrêmement étroit, mais qui ne saurait être développé complètement ici. Je me bornerai donc à montrer que la correspondance qui lie les systèmes articulés de l'espace à ceux du plan, se retrouve sous une forme analogue dans la théorie des percussions. A cet effet, j'utiliserai la terminologie et les notations de la note des Comptes rendus de l'Académie des Sciences (30 août 1915) dans laquelle j'ai montré que tout système articulé gauche peut être représenté d'une manière parfaite, au point de vue de la Résistance des Matériaux, par un système plan ¹⁾.

Pour abréger, considérons un système S constitué par n points matériels $m_i (x_i, y_i, z_i)$, primitivement immobiles et assujettis à des liaisons persistantes, indépendantes du temps et sans frottement. Si l'on désigne, d'une manière générale, par A_i, B_i, C_i les projections de la percussion P_i appliquée au point m_i , par u_i, v_i, w_i les projections de la vitesse V_i que prend ce point immédiatement après les percussions, on sait que l'on doit avoir

$$\sum_{i=1}^n m_i (u_i \delta x_i + v_i \delta y_i + w_i \delta z_i) = \sum_{i=1}^n (A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + C_i \delta z_i) \quad \dots \quad (1)$$

pour toutes les valeurs des variations $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ qui correspondent à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons. D'ailleurs, ces variations doivent vérifier des équations qui sont nécessairement de la forme suivante

$$\sum_{i=1}^n (a_i^k \delta x_i + b_i^k \delta y_i + c_i^k \delta z_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad \dots \quad (2)$$

les valeurs numériques des coefficients a_i^k, b_i^k, c_i^k , dépendant de la nature des liaisons et de la configuration du système. Quant au nombre h de ces équations, il doit être inférieur à $3n$.

D'autre part, les liaisons étant persistantes et indépendantes du temps, les composantes des vitesses V_i doivent vérifier les équations

$$\sum_{i=1}^n (a_i^k u_i + b_i^k v_i + c_i^k w_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad \dots \quad (3)$$

au nombre de h également.

Ces diverses conditions permettent de déterminer, en appliquant par exemple la méthode des coefficients indéterminés de Lagrange, les vitesses V_i et les percussions dues aux liaisons. Toutefois, pour faire apparaître la correspondance qui lie les systèmes de l'espace à ceux du plan, il est nécessaire de les transformer.

¹⁾ Pour cette terminologie, on peut aussi se reporter soit au "*Cours de géométrie pure et appliquée*" de M. Maurice d'Ocagne (Gauthier-Villars, 1917), soit à l'ouvrage que je viens de publier sous le titre: *Introduction à la Statique graphique des systèmes de l'espace*. (Payot, Lausanne, 1926).

Considérons, à cet effet, un complexe linéaire C dont le paramètre a ne soit ni nul ni infini, et dont l'axe coïncide avec Oz . Si l'on désigne par A'_i, B'_i, N'_i , les coordonnées de l'anti-projection P'_i de P_i par rapport à C , en posant, en outre,

$$u_i = -\omega_i \beta_i, \quad v_i = \omega_i \alpha_i, \quad w_i = a \omega_i, \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\delta x_i = -\delta \pi_i \eta_i, \quad \delta y_i = \delta \pi_i \xi_i, \quad \delta z_i = a \delta \pi_i, \quad \dots \dots \dots (5)$$

les équations (1), (2) et (3) prennent immédiatement les formes suivantes:

$$\sum_{i=1}^n m_i \omega_i (\alpha_i \xi_i + \beta_i \eta_i + a^2) \delta \pi_i = \sum_{i=1}^n (A'_i \eta_i - B'_i \xi_i + N'_i) \delta \pi_i, \quad \dots \dots (1)$$

$$\sum_{i=1}^n (-a^k \eta_i + b_i^k \xi_i + c_i^k a) \delta \pi_i = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum_{i=1}^n (-a^k \beta_i + b_i^k \alpha_i + c_i^k a) \delta \pi_i = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

En tenant compte de (4), ces nouvelles équations permettent, comme celles dont elles dérivent, de déterminer toutes les vitesses V , ainsi que les percussions dues aux liaisons.

Imaginons alors qu'on fasse correspondre à chaque point m_i de S une plaque matérielle p_i , rigide, infiniment mince et contenue dans le plan xoy . Dans une grande mesure, la forme de p_i peut être arbitrairement choisie; mais il est essentiel de supposer que sa masse est égale à celle du point correspondant de S , que son centre de gravité coïncide avec O et que son moment d'inertie polaire par rapport à ce dernier point ait $m_i a^2$ pour valeur.

Admettons encore que ces plaques soient assujetties à des liaisons présentant les mêmes caractères généraux que celles de S et telles, de plus, que les déplacements virtuels qu'on peut leur imprimer vérifient les h équations

$$\sum_{i=1}^n (-a_i^k \eta'_i + b_i^k \xi'_i + c_i^k a) \delta \pi'_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad \dots \dots (2'')$$

dans lesquelles $\delta \pi'_i$ représente une rotation infiniment petite imprimée à p_i , et ξ'_i, η'_i les coordonnées du centre correspondant.

Si l'on suppose, enfin, que chaque plaque p_i soit sollicitée par une percussion représentée par le vecteur P'_i , on obtient de la sorte un nouveau système matériel qui sera désigné par S' et qui, au point de vue de la théorie des percussions, représente S d'une manière parfaite.

Le système S' étant, en effet, primitivement immobile, désignons par u', v' les projections de la vitesse que prend, immédiatement après les percussions, l'un quelconque de ses éléments matériels dont la masse sera représentée par dm' . Soient encore (x', y') les coordonnées de dm' , (x'_i, y'_i) celles du point d'application de la percussion P'_i , et $\delta x', \delta y', \delta x'_i, \delta y'_i$, les variations que subissent ces coordonnées à la suite d'un déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Appliquée à S' , l'équation fondamentale de la théorie des percussions peut être mise sous la forme suivante

$$\sum_{i=1}^n \int_{p_i} (u' \delta x' + v' \delta y') dm' = \sum_{i=1}^n (A'_i \delta x'_i + B'_i \delta y'_i),$$

le symbole \int représentant une somme étendue à tous les éléments de p_i .

Si d'ailleurs on désigne par ω_i' la rotation instantanée de cette plaque après les percussions, par α_i' , β_i' les coordonnées du centre correspondant, un calcul élémentaire donne immédiatement

$$\begin{aligned} u' &= -\omega_i' (y' - \beta_i'), \\ v' &= \omega_i' (x' - \alpha_i'), \end{aligned}$$

et, d'une manière analogue,

$$\begin{aligned} \delta x' &= -\delta\pi_i' (y' - \eta_i'), \\ \delta y' &= \delta\pi_i' (x' - \xi_i'). \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions imposées à la plaque p_i , on obtient facilement

$$\int_{p_i} (u' \delta x' + v' \delta y') dm' = m_i \omega_i' (\alpha_i' \xi_i' + \beta_i' \eta_i' + a^2) \delta\pi_i'.$$

D'autre part, on a encore

$$\begin{aligned} \delta x_i' &= -\delta\pi_i' (y_i' - \eta_i'), \\ \delta y_i' &= \delta\pi_i' (x_i' - \xi_i'), \end{aligned}$$

d'où,

$$\sum_{i=1}^n (A_i' \delta x_i' + B_i' \delta y_i') = \sum_{i=2}^n (A_i' \eta_i' - B_i' \xi_i' + N_i') \delta\pi_i'.$$

En conséquence, l'équation fondamentale prend la forme

$$\sum_{i=1}^n m_i \omega_i' (\alpha_i' \xi_i' + \beta_i' \eta_i' + a^2) \delta\pi_i' = \sum_{i=1}^n (A_i' \eta_i' - B_i' \xi_i' + N_i') \delta\pi_i'. \quad (1'')$$

Comme enfin, les liaisons de S' ont été supposées persistantes et indépendantes du temps, les rotations instantanées que prennent les plaques immédiatement après les percussions doivent encore vérifier les h équations

$$\sum_{i=1}^n (-a_i^k \beta_i' + b_i^k \alpha_i' + c_i^k a) \omega_i' = 0, \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad \dots \dots (3'')$$

Par l'application de la méthode des coefficients indéterminés, les équations (1''), (2'') et (3'') permettent de déterminer tous les effets produits par les percussions P_i' sur le système S' . D'ailleurs, comme les équations de liaison (2') et (2'') ont rigoureusement les mêmes formes et dépendent des mêmes coefficients, on peut toujours admettre que

$$\delta\pi_i' = \delta\pi_p, \quad \xi_i' = \xi_p, \quad \eta_i' = \eta_p.$$

Si, de plus, on suppose que

$$\omega_i' = \omega_p, \quad \alpha_i' = \alpha_p, \quad \beta_i' = \beta_p,$$

le système formé par les équations (1''), (2''), (3'') devient identique à celui formé par les équations (1'), (2') et (3'). Si donc on a calculé toutes les quantités ω_i' , α_i' , β_i' , on en déduit, par l'intermédiaire des formules (6) et (4) les vitesses V_i de tous les points de S . De plus, on montrerait facilement qu'il est possible de calculer les réactions de S dès que celles de S' sont connues. Si donc on se place uniquement au point de vue de la théorie des percussions, le système plan S' représente d'une manière parfaite le système S de l'espace.

Ajoutons encore que ce résultat subsiste sans modification lorsque les liaisons des systèmes envisagés dépendent du temps ou que certaines d'entre-elles sont introduites brusquement.

Mode expérimental nouveau relatif à l'application des surfaces à courbure constante à la solution du problème de la torsion des barres prismatiques

Par A. Piccard et L. Baes, Bruxelles *)

(Voir planche V pour figures 7—15)

Les surfaces à courbure constante

Les surfaces à courbure constante sont caractérisées en coordonnées rectangulaires x, y, z , par l'équation suivante:

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}} = \text{constante.}$$

Si le relief de la surface est très faible dans toute son étendue, l'équation se simplifie, elle devient:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \text{constante, ou encore } \nabla_x^2 = \text{constante.}$$

Equation de la surface d'un ménisque

On sait que la surface libre d'un liquide soustrait à l'action de la pesanteur prend une forme telle que la tension superficielle est la même en tous ses points.

On sait que cette surface est à courbure constante; elle répond donc à l'équation précédente, x, y, z étant les coordonnées d'un point du ménisque.

Fonction potentielle du problème de la torsion

Une méthode des plus féconde utilisée pour la solution analytique du problème de la torsion des barres droites prismatiques repose sur l'emploi d'une fonction potentielle. Cette méthode a été rappelée récemment par M. GYSEN à l'occasion d'une thèse de doctorat.

On sait qu'il existe, pour chacun des points de la section transversale de la pièce soumise à la torsion, une valeur déterminée et unique d'une fonction F dite potentielle, relative à cet état de contrainte. On peut donc construire une surface, dite *surface potentielle*, ayant la section considérée pour base, et, pour ordonnées, les valeurs de la fonction F . Cette surface représente complètement l'état de contrainte de la section, notamment:

- les projections des lignes équipotentiellles (courbes de niveau de la surface) sur la base sont les *trajectoires des tensions tangentiellles*, c'est-à-dire que la direction de la tension tangentielle en un point de la section est donnée par la tangente à la courbe passant par ce point;
- l'inclinaison de la surface en un point donné est proportionnelle à la tension au point correspondant de la section. Par conséquent, les projections des lignes d'égale inclinaison de la surface sur la base, sont les *lignes d'égale tension de la section*;

*) Voir: A. A. GRIFFITH, «The Use of Soap films in solving stress Problems» (Proceedings of the first International Congress for Applied Mechanics. Delft, 1924, page 39).

- c) le volume compris entre la surface et la base est une mesure du moment de torsion.
On démontre que la surface potentielle satisfait rigoureusement à l'équation

$$\nabla^2 F = \text{constante.}$$

Analogie entre la surface potentielle et la surface d'un ménisque

L'identité des équations précédentes permet de conclure à l'analogie complète entre la forme de la surface potentielle relative à une section donnée, et la surface d'un ménisque à faible relief répondant aux mêmes conditions terminales, c'est-à-dire ayant le même contour. Ce ménisque jouit de toutes les propriétés de la surface potentielle et peut lui être substitué dans l'étude expérimentale de l'état de contrainte de la section transversale d'une pièce soumise à la torsion.

Il suffit, pour avoir une représentation complète de la distribution des tensions dans la section, de faire le levé de la surface d'un ménisque ayant le même contour que cette section et d'en déduire les systèmes de courbes de niveau et d'égale inclinaison. Cette méthode n'est toutefois applicable dans toute sa simplicité que dans le cas des sections pleines.

Méthode Griffith et Taylor

L'analogie dont il a été question ci-dessus a servi de point de départ aux remarquables travaux de GRIFFITH et TAYLOR en 1919 sur la torsion des sections quelconques.

Le ménisque utilisé par ces auteurs était constitué par une lame d'eau de savon tendue en travers d'une ouverture de même contour que la section étudiée, et soumise à une légère différence de pression.

La lame étant très mince, son poids pouvait être négligé; son relief étant, en outre, faible, sa forme pouvait être assimilée à celle de la surface potentielle correspondante.

Les courbes de niveau étaient déterminées à l'aide d'un sphéromètre à aiguille qui permettait de faire un cheminement le long de la surface, suivant un plan parallèle à celui du contour. Les positions successives de l'aiguille étaient reportées automatiquement sur une feuille de papier, donnant ainsi une série de points par lesquels on faisait ensuite passer une ligne continue, laquelle constitue une des courbes de niveau cherchées.

L'inclinaison de la surface était déterminée par la mesure de l'angle, fait avec l'horizontale, d'un rayon lumineux tombant normalement sur la surface et réfléchi suivant la direction initiale (auto-collimation). Toutefois, faute de pouvoir préciser le point où cette réflexion avait lieu, la méthode n'a pu être employée que pour mesurer l'inclinaison le long du contour et, notamment, l'inclinaison maxima qui doit toujours s'y rencontrer.

La méthode GRIFFITH et TAYLOR, bien que donnant des résultats de grande valeur technique, souffrait dans son application d'inconvénients assez sérieux provenant de l'instabilité de la lame d'eau de savon. De plus, des erreurs inconnues pouvaient être introduites par des variations de température ou de pression survenant pendant les mesures.

C'est pourquoi, lorsque nous nous sommes rendu compte des difficultés rencontrées dans l'emploi des lames d'eau de savon, nous avons cherché à réaliser un appareil qui évite les inconvénients inhérents à cette méthode.

Détermination des courbes de niveau

Dans l'appareil que M. JANMOULLE a construit au Laboratoire de Physique de l'Université de Bruxelles, la lame d'eau de savon est remplacée par le ménisque formé par la surface

de séparation de deux liquides non miscibles et de même densité. Ces liquides sont contenus dans un récipient à deux compartiments séparés par un diaphragme percé d'une ouverture de la forme à étudier (fig. 1). L'un des liquides est en léger excès, de façon à produire le relief du ménisque.

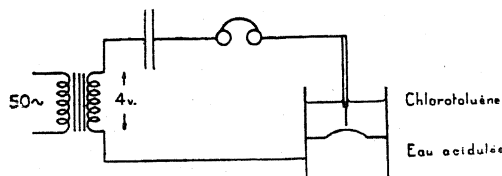


Fig. 1

Les conditions à réaliser lors du choix des deux liquides sont assez nombreuses et en partie contradictoires: il faut, en premier lieu, que les deux liquides aient la même densité, afin d'éliminer les déformations du ménisque dues à la pesanteur. En outre, les liquides doivent être sans action chimique l'un sur l'autre et sur les récipients employés, et l'un d'eux au moins doit être inaltérable à l'air. La méthode de levé que nous nous proposons d'employer exigeait, de plus, que ce dernier soit isolant et que l'autre soit conducteur.

La combinaison suivante nous a donné toute satisfaction: comme liquide isolant inaltérable à l'air, le chlorotoluène et, comme liquide conducteur, de l'eau acidulée, de concentration telle que sa densité soit la même que celle du chlorotoluène, soit 1,08 environ.

Le moyen utilisé pour faire le levé de la surface ne diffère pas matériellement de celui adopté par GRIFFITH et TAYLOR, mais prend avantage de la nouvelle disposition du ménisque. Ce dernier est exploré à l'aide d'une fine pointe de platine, laquelle plonge dans le chlorotoluène et établit un contact électrique avec l'eau acidulée. Le moment de contact est décelé par la fermeture d'un circuit comprenant un casque téléphonique et alimenté par du courant alternatif à 50 périodes fourni par le secondaire d'un transformateur de sonneries. Lorsque le contact est obtenu, la position de la pointe peut être réperée le long de trois axes perpendiculaires entre eux et cela avec une très grande précision.

Description de l'appareil

La fig. 2 montre la disposition générale de l'appareil. Un godet en laiton *G* constitue le compartiment inférieur; son couvercle est percé d'une ouverture de la forme à étudier. Ce godet est placé dans un cristallisoir en verre *C* formant le compartiment supérieur, et qui est lui-même placé dans un récipient carré en verre *R*. Le godet est rempli d'eau acidulée versée avec précaution, de façon à ne pas mouiller la face supérieure du diaphragme. On verse ensuite du chlorotoluène dans le cristallisoir jusqu'à ce que le godet en soit complètement recouvert. L'espace entre le cristallisoir et le récipient carré est rempli d'eau, de façon à pouvoir observer le ménisque de côté, sans déformation gênante. On amène ensuite le ménisque au relief voulu, en ajoutant ou en retranchant de l'eau acidulée au moyen d'une pipette.

La pointe exploratrice est montée verticalement sous un parallélogramme *MNPQ*, dont les côtés horizontaux sont constitués par des lames d'acier déformables. Ce parallélogramme est fixé au chariot transversal d'une machine à diviser Collot, à deux vis micrométriques, à l'aide desquelles les deux coordonnées horizontales du point de contact peuvent être déterminées. La coordonnée verticale est lue sur le tambour d'un sphéromètre, également porté par le chariot, et dont la vis appuie sur le parallélogramme.

Les fig. 3, 4 et 5 montrent les résultats obtenus pour quelques sections simples: le cercle, le triangle équilatéral et le carré.

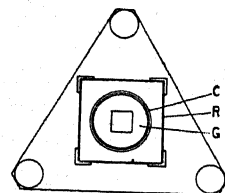
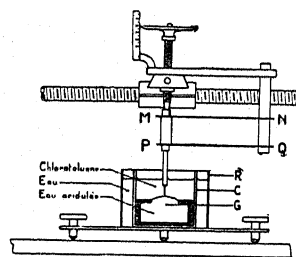


Fig. 2

Pour le triangle, une coupe médiane dressée d'après les courbes de niveau a été comparée aux résultats du calcul. M. GYSEN, docteur spécial en Résistance des Matériaux, a bien voulu nous communiquer les équations qu'il a établies pour cette section, en se servant de la fonction potentielle, et les points calculés à l'aide de ces équations ont été reportés sur le même graphique. La concordance, on le voit, est parfaite.

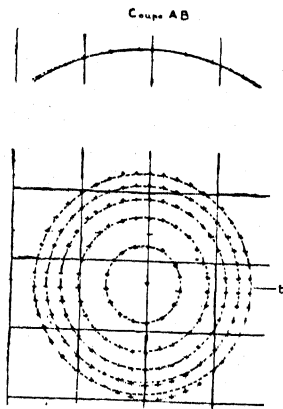


Fig. 3

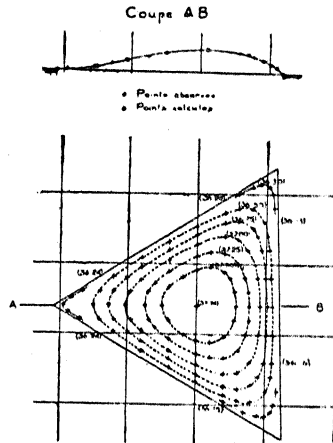


Fig. 4

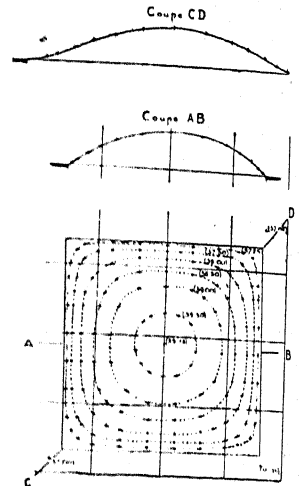


Fig. 5

Le cas du carré n'étant pas rigoureusement calculable, cette vérification n'a pu être faite. Il a été dressé une coupe médiane et une coupe diagonale; la première montre que la tension est maxima au milieu des côtés; la dernière, que la tension devient nulle aux angles, ainsi que l'avait trouvé analytiquement de SAINT VENANT.

Détermination directe des lignes d'égale tension

Il semblait intéressant de compléter la méthode d'autocollimation de GRIFFITH et TAYLOR de façon à pouvoir obtenir la répartition des tensions dans toute la section, sans devoir la déduire laborieusement des courbes de niveau.

L'appareil décrit ci-après permet d'observer ou de photographier directement les courbes d'égale inclinaison du ménisque et d'obtenir, par conséquent, sans calcul ni interpolation, les courbes d'égale tension de la section.

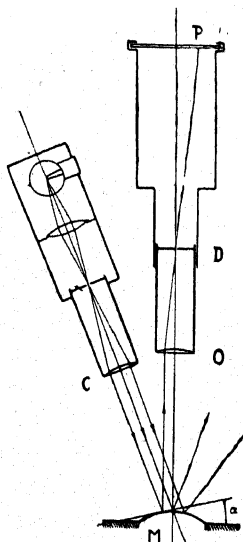


Fig. 6

La fig. 6 montre schématiquement la disposition de l'appareil. Le ménisque M est disposé avec sa base perpendiculaire à l'axe optique vertical d'un objectif O , lequel forme en P une image du ménisque sur un verre dépoli. Au foyer supérieur de l'objectif se trouve un diaphragme D , percé d'une petite ouverture; l'image du ménisque est donc formée uniquement par des rayons quittant le ménisque parallèlement à l'axe optique.

Un faisceau de lumière parallèle provenant d'une source lumineuse ponctuelle (constituée par l'ouverture d'un diaphragme sur laquelle est projetée l'image du filament d'une lampe) placée au foyer du collimateur C tombe sur le ménisque et s'y réfléchit suivant des directions diverses. Certains de ces rayons sont parallèles à l'axe optique, passent après réflexion dans l'objectif par l'ouverture du diaphragme, parviennent sur le verre dépoli et y forment l'image des points du ménisque où ils se sont réfléchis.

On voit facilement que l'inclinaison α du ménisque en ces points vaut la moitié de l'angle CMO formé par les axes optiques du collimateur et de l'objectif.

Si l'on fait tourner tout le système d'éclairage autour de l'axe optique de l'objectif, en maintenant l'angle CMO invariable, les points lumineux décriront sur le verre dépoli la courbe d'égale inclinaison α du ménisque. En donnant à l'angle CMO une série de valeurs, croissant en progression arithmétique par exemple, on pourra enregistrer directement sur une plaque photographique le système des courbes d'égale inclinaison du ménisque.

Pour que ce qui a été dit plus haut soit vrai, il faut que le faisceau parallèle issu du collimateur ne subisse pas de réfraction avant de tomber sur le ménisque. On voit donc que le collimateur doit plonger dans le liquide supérieur. D'autre part, pour que l'agitation superficielle de ce dernier ne puisse brouiller l'image du ménisque, il faut également immerger l'objectif. On est donc amené à employer des quantités assez considérables de liquide, et le chlorotoluène serait d'un prix prohibitif. Le liquide supérieur est ici simplement de l'eau et le liquide inférieur est constitué par un mélange de chlorotoluène et de toluène d'une densité égale à 1. On voit que, dans cet appareil, comme dans le précédent, le liquide soumis à l'évaporation est homogène; sa densité ne peut donc pas varier.

La figure 7 (planche V) est une photographie de l'appareil à l'aide duquel ont été obtenues les photographies reproduites aux figures suivantes.

Relevé des courbes d'égale inclinaison ou d'égale tension

Pour photographier un système de courbes, il suffit, après avoir disposé un ménisque dans le godet, de faire tourner le collimateur d'un mouvement régulier pendant un certain temps, de façon à impressionner une plaque photographique mise à la place du verre dépoli. A titre d'indication, une bonne photographie peut être obtenue après une exposition de 3 minutes par courbe, l'ouverture des diaphragmes du collimateur et de l'objectif étant respectivement $f/25$ et $f/50$. En diminuant ces ouvertures, on peut obtenir des courbes plus fines, mais la durée d'exposition doit être naturellement plus longue.

Les figures 8, 9, 10 (planche V) sont des photographies montrant des courbes d'égale tension de la section triangulaire, la figure 11 montre sur une même plaque plusieurs courbes d'égale tension de cette même forme. Les figures 12, 13, 14, 15 sont les analogues obtenues pour la section carrée.

Les petites irrégularités que l'on voit proviennent principalement des vibrations transmises du mélange par suite de la manœuvre du collimateur. En outre, l'appareil n'ayant pas été construit pour faire des mesures de précision, mais plutôt pour essayer la méthode, aucun soin spécial n'a été pris pour assurer la coïncidence parfaite de l'axe optique de l'objectif et l'axe de rotation du système d'éclairage.

Les résultats obtenus à l'aide de cet appareil sont en tous points conformes à la théorie, d'une part, et aux résultats déduits des levés topographiques, d'autre part. Ils permettent d'éliminer le travail fastidieux de la transformation des courbes de niveau en courbes d'égale inclinaison, qui sont, en dernière analyse, celles qu'on cherche à obtenir; le résultat, pour une section donnée, peut être très rapidement connu.

Résistance à l'écrasement et au flambement des piliers en béton fretté

Par L. Baes, Bruxelles

Monsieur BAES a résumé un important travail qui a fait l'objet de la thèse de docteur-ingénieur présentée par un de ses élèves Monsieur VANDEPERRE (Bruxelles).

L'étude des piliers en béton-fretté y est traitée pour la première fois comme une application de la courbe des états limites d'équilibre interne étudiée par MOHR, et à la connaissance de laquelle Monsieur v. KÁRMÁN a apporté une importante contribution expérimentale.

Il est remarquable que les divers bétons courants semblent, pour les parties utiles, donner une même courbe des états limites, à la condition d'établir celle-ci en coordonnées relatives. Le problème du flambement des armatures longitudinales est abordé comme un problème de flambement en milieu élastiquement résistant.

L'étude a été poussée jusqu'au tracé d'abaques permettant l'établissement ou le contrôle des piliers en béton fretté et tous les essais connus ont été analysés à l'aide de la théorie nouvelle.

Il n'est guère possible de condenser efficacement cette théorie en quelques pages, à cause des diagrammes et abaques nécessaires à sa compréhension. (Voir *).

(Résumé de l'auteur.)

*) «Résistance à l'écrasement des piliers en béton fretté», par L. VANDEPERRE, Dr. Ing. (Revue de l'Ecole Polytechnique de Bruxelles, mai 1926, janvier et février 1927) et «Le béton fretté» par L. BAES et L. VANDEPERRE (Bulletin de la Sté belge des ingénieurs et des industriels, Tome VII, 1927, No. 3 et 4).

Kritische Störungen elastischer Wellen infolge Nachgiebigkeit des Oelpolsters in den Lagern

Von A. Stodola, Zürich

In Bd. 85, Nr. 21, der Schweizer. Bauzeitung haben wir die Störungen behandelt, die eine belastete *starre* Welle in ihren Halslagern infolge der Nachgiebigkeit der Schmierölschicht erleidet. Da inzwischen die Brauchbarkeit jener Theorie durch Versuche¹⁾ erwiesen worden ist, gehen wir zur Theorie dieser Störungen für eine elastische Welle über.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, die zylindrische Welle sei bloß in der Lagermitte durch eine Scheibe vom Gewichte $2G$ belastet, so daß im störungsfreien Betriebe infolge der Durchbiegung durch die Schwere $O_1 O'_0 O_1$ in Abb. 1 ihre elastische Linie darstellt. O_1 ist die der Drehschnelle ω entsprechende exzentrische Lage des Wellenmittelpunktes im Lager im Beharrungszustande. Während der gestörten Bewegung sei $O_1 O_0 O_1$ die X-Achse des Koordinatensystemes mit O_0 als Aufpunkt, $x y z$ die Koordinaten eines Zwischenpunktes C .

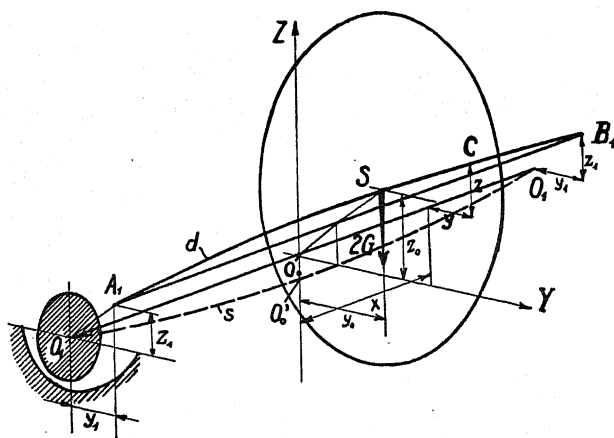


Abb. 1.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall der *symmetrischen Formänderung der Welle* und bezeichnen mit

$y_1 z_1$ die Koordinaten der verschobenen Wellenenden.

\ddot{y}_1, y'_1, y''_1 die Ableitungen nach der Zeit und nach x .

die halbe Wellenlänge.

J das Trägheitsmoment der Welle.

$m = \frac{G}{2}$ die Masse der halben Scheibe.

m_1 g die Masse der Welle für die Längeneinheit.

$$m^I = m_1 l = \frac{G^I}{g} \quad \text{die Masse der halben Welle.}$$

$y_0 z_0$ die Koordinaten des Scheibenschwerpunktes, durch den die Welle hindurchgeht.

M, S , Moment und Schubkraft in einem Wellenquerschnitt ²⁾ M_y, M_z, S_y, S_z
deren Komponenten.

¹⁾ Nähere Mitteilungen enthält eine als Forschungsheft Nr. 287 des VDI inzwischen erschienene Dissertation von Ing. HUMMEL. Darin gelangt auch meine oben zitierte Abhandlung zum Abdruck.

r, δ

Wellenhalbmesser und radiales Lagerspiel.

$\varphi, \chi, \phi, k^I, R, D, L, \Phi, \eta$ die gleichnamigen Größen der erwähnten Abhandlung, deren Kenntnis für das Verständnis des Nachfolgenden unerlässlich ist und die mit SBZ zitiert werden soll. (Man vergl. Formeln 22.)

$P = G + G'$ Lagerbelastung bei störungsfreiem Lauf.

Die Bewegungsgleichungen der Welle sind dann ²⁾ bekanntlich

$$m_1 \ddot{y} = \frac{dS_y}{dx} = - \mathcal{F} E y^{IV} \dots \dots \dots (1)$$

$$m_1 \ddot{z} = \frac{dS_z}{dx} - m_1 g = - \mathcal{F} E z^{IV} - m_1 g \dots \dots \dots (1a)$$

Als Grenzbedingungen sind einzuführen erstens die Forderung, daß in der Mitte für $x = 0$ die Schubkräfte die Bewegungskräfte der Scheibe sein sollen, wobei wir eine wagrechte störende Außenkraft

$$Q = Q_o \sin \omega t \dots \dots \dots (1b)$$

einführen wollen, demnach für die Schwerpunktsbewegung der Scheibe die Gleichungen

$$m \ddot{y}_o = S_{oy} = - \mathcal{F} E (y''')_o + Q_o \sin \omega t \dots \dots \dots (2)$$

$$m \ddot{z}_o = S_{oz} - G = - \mathcal{F} E (z''')_o - G \dots \dots \dots (2a)$$

erhalten. Die Drehung der Scheibe sei wegen großen Massenmomentes gleichförmig. Ferner sei für $x = 0$ die Tangente zur geometrischen Achse parallel, d. h.

$$(y')_o = 0; (z')_o = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Am äußeren Wellenende muß die Schwerkraft gleich sein den Lagerreaktionen, d. h. für $x = l$

$$S_y = - \mathcal{F} E (y''')_1 = Y; S_z = - \mathcal{F} E (z''')_1 = Z$$

Y und Z können mit entsprechender Umstellung der Bezeichnung durch Formeln 6, 7, 7a SBZ ausgedrückt werden. Man erhält demnach

$$- \mathcal{F} E (y''')_1 = - \frac{2P}{\delta} [y_1 - z_1 \cotg 2\varphi] \dots \dots \dots (4)$$

$$- \mathcal{F} E (z''')_1 = P - \frac{\psi P}{\delta} [y_1 \cotg \varphi + z_1] \dots \dots \dots (4a)$$

Ferner muß am frei gedachten Wellenende das Biegemoment verschwinden, d. h. für $x = l$ ist

$$(y'')_1 = 0; (z'')_1 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Um die Integration von (1) und (1a) übersichtlich durchführen zu können, zerlegen wir die Auslenkungen y, z in ihre statischen und dynamischen Anteile. Unter den ersten sind die Ordinaten der «statischen» Kurve s in Abb. 1 verstanden, die mithin überall $y_s = 0$ aufweist, während z_s hier am besten aus Gl. 1a mit $\ddot{z} = 0$, d. h. aus

$$z_s^{IV} = - \frac{m_1 g}{\mathcal{F} E} = - a_o$$

²⁾ Vorzeichen wie in STODOLA: Dampf- und Gasturbinen VI. Aufl. S. 372, auch diese Entwicklungen werden als bekannt vorausgesetzt.

durch vierfache Integration in der Form

$$z_s = -\frac{a_0 x^4}{24} + \frac{a_1 x^3}{6} + \frac{a_2 x^2}{2} + a_3 x + a_4 \dots \dots \dots (6)$$

gewonnen wird. Die Grenzbedingungen sind:

für $x = 0$ soll $z_s' = 0$ und die Scheerkraft $-\mathcal{F}E(z_s''')_0 = G$

für $x = l$ soll $(z_s)_1 = 0, (z_s'')_1 = 0$ und die Scheerkraft $-\mathcal{F}E(z_s''')_1 = P$

sein. Die letzte ist identisch erfüllt; aus den übrigen folgen die Festwerte

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{G}{\mathcal{F}E}; \quad a_2 = \frac{a_0 l^2}{2} - a_1 l \\ a_3 &= 0; \quad a_4 = \frac{a_0 l^4}{24} - \frac{a_1 l^3}{6} - \frac{a_2 l^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Wir setzen nun

$$y = y_{stat} + y_{dyn} = 0 + y_{dyn} = y_d$$

$$z = z_{stat} + z_{dyn} = z_s + z_d$$

in Gl. (1) (1a) ein und erhalten

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_d &= -\mathcal{F}E y_d^{IV} \\ m_1 \ddot{z}_d &= -\mathcal{F}E z_d^{IV} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Gleichungen (2) gehen über in

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{y}_d)_0 &= -\mathcal{F}E(y_d''')_0 + Q_0 \sin \omega t \\ m(\ddot{z}_d)_0 &= -\mathcal{F}E[z_d''' + z_s'''] - G = -\mathcal{F}E(z_d''')_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Die Randbedingungen (3) und (5) aber geben

$$\text{für } x = 0 \quad (y_d')_0 = 0 \quad (z_d')_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$,, \quad x = l \quad (y_d'')_1 = 0 \quad (z_d'')_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

Die Gleichungen der Endscheerkräfte (4) lauten

$$\mathcal{F}E(y_d''')_1 = \frac{2P}{\delta} [y_{d1} - z_{d1} \cotg 2\varphi] \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\mathcal{F}E(z_d''')_1 = \frac{\psi P}{\delta} [y_{d1} \cotg \varphi + z_{d1}] \quad \dots \dots \dots (12a)$$

Mit Rücksicht auf die störende Kraft Q machen wir den Ansatz

$$y_d = \eta \sin \omega t; \quad z_d = \zeta \sin \omega t \quad \dots \dots \dots (13)$$

wo η, ζ Abhängige von x sind.

Die Bewegungsgleichungen (8) gehen dann über in

$$\mathcal{F}E \eta^{IV} = m_1 \omega^2 \eta; \quad \mathcal{F}E \zeta^{IV} = m_1 \omega^2 \zeta \quad \dots \dots \dots (14)$$

Die Lösung derselben ist, wie man a. a. O. in «Dampf- und Gasturbinen» nachlesen kann, mit

$$k = + \sqrt[4]{\frac{m_1 \omega^2}{\mathcal{F}E}} \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$\eta = b_0 e^{kx} + b_1 e^{-kx} + b_2 \cos kx + b_3 \sin kx \dots \dots \dots (16)$$

$$\zeta = c_0 e^{kx} + c_1 e^{-kx} + c_2 \cos kx + c_3 \sin kx \dots \dots \dots (16a)$$

Zur Bestimmung der Festwerte $b_0 b_1 \dots c_0 c_1 \dots$ dienen die Randbedingungen, die wir für η in der Reihenfolge (10) (11) (9) (12) mit Benützung der Abkürzungen

$$e^{kl} = p; e^{-kl} = n; \cos kl = c; \sin kl = s; q = \frac{Q_0}{\mathcal{F}E}$$

hinschreiben:

$$b_0 - b_1 + b_3 = 0 \dots \dots \dots (17)$$

$$b_0 p + b_1 n - b_2 c - b_3 s = 0 \dots \dots \dots (17a)$$

$$\frac{m}{m_1} k^4 [b_0 + b_1 + b_2] = k^3 [b_0 - b_1 - b_3] - q \dots \dots \dots (17b)$$

$$\mathcal{F}E k^3 [b_0 p - b_1 n + b_2 s - b_3 c] = \frac{2P}{\delta} [b_0 p + b_1 n + b_2 c + b_3 s - (c_0 p + c_1 n + c_2 c + c_3 s) \cotg 2\varphi] \quad (17c)$$

Ähnliche Gleichungen erhält man für die Koordinate ζ , nur daß q darin nicht vorkommt. Die so aufgestellten 8 Beziehungen ermöglichen es, die Festwerte $b_0 b_1 \dots c_0 c_1 \dots$ als lineare Abhängige von q zu berechnen. Unendlich große Werte, d. h. kritische Verhältnisse ergeben sich, wenn die Determinante der Beiwerte jener Gleichungen verschwindet. Diese Determinante erhält man einfacher, indem man $q = 0$ setzt und $b_1 b_2 b_3$ aus den 3 ersten der Gl. (17) berechnet und in 17 c einschiebt. Ebenso verfährt man mit den Gleichungen, die für die Koordinate ζ gelten, wobei $c_1 c_2 c_3$ in 17 c und $b_1 b_2 b_3$ in die für ζ übrig bleibende Gleichung eingeschoben werden.

So entstehen schließlich nach Teilung mit JEk^3 die Gleichungen

$$\left(A - \frac{2P}{\delta k^3 \mathcal{F}E} B\right) b_0 + \frac{2P}{\delta k^3 \mathcal{F}E} B \cotg(2\varphi) c_0 = 0 \dots \dots \dots (18)$$

$$\left(-\frac{\psi P}{\delta k^3 \mathcal{F}E} B \cotg \varphi\right) b_0 + \left(A - \frac{\psi P}{\delta k^3 \mathcal{F}E} B\right) c_0 = 0 \dots \dots \dots (18a)$$

mit den Bezeichnungen

$$A = p - n\beta + \frac{s}{c}(p + s + (n-s)\beta) - c(\beta - 1) \dots \dots \dots (19)$$

$$B = p + n\beta + (p + s + (n-s)\beta) + s(\beta - 1) \dots \dots \dots (19a)$$

$$\beta = \frac{\frac{2m^I}{klm} - 1 - \frac{p+s}{c}}{\frac{2m^I}{klm} + 1 + \frac{n-s}{c}} \dots \dots \dots (19b)$$

Die Determinante der Beiwerte von (18) (18 a) wird nach Teilung mit A^2 und Ordnen der Glieder nach Potenzen von P

$$\left(\frac{P}{\delta k^3 \mathcal{F}E} \frac{B}{A}\right)^2 2\psi(1 + \cotg \varphi \cotg 2\varphi) - (2 + \psi) \left(\frac{P}{\delta k^3 \mathcal{F}E} \frac{B}{A}\right) + 1 = 0 \dots \dots (20)$$

Es verlohnt sich, diese Gleichung nach P mit seinem Faktor aufzulösen, weil dadurch die Funktionen von φ herausgesondert werden. Beachtet man, daß $2(1 + \cotg \varphi \cotg 2\varphi) = 1/\sin^2 \varphi$, so ergibt sich

$$\frac{P}{\delta k^3 \mathcal{F} E} \frac{B}{A} = \frac{\sin^2 \varphi}{\psi} \left[\left(1 + \frac{\psi}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\psi}{2}\right)^2 - \frac{\psi}{\sin^2 \varphi}} \right] \quad \dots \quad (21)$$

P ist die Lagerbelastung im störungsfreien Beharrungszustand, also haben wir nach Formel (1) (3) (6) SBZ³⁾

$$P = \frac{k' \eta \omega}{2 \Phi} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 LD; \quad k' = \frac{c'_0}{s_0 - \sin \varphi} - c'; \quad \psi = \frac{\sin \varphi}{s_0 - \sin \varphi} \left[1 + \frac{c'}{k'} \right] \quad \dots \quad (22)$$

Für ein gegebenes Lager mit Welle und Scheibe sind bekannt

$$m, m', \mathcal{F}, l, P = g(m + m')$$

Man kann aus (22) k' , daraus $\sin \varphi, \psi$ als Abhängige von $\omega, P, \frac{\nu}{\delta}$ berechnen und in (21) einsetzen, wodurch die Bestimmungsgleichung für die kritischen Werte des ω entsteht. Der un-
gemein verwickelte Bau der Gleichung läßt ein graphisches Verfahren wünschbar erscheinen, das
Rechenarbeit spart. Man kann beispielsweise, da bei festem l die J und m' Abhängige vom
Wellendurchmesser d sind, die *linke Seite* von (21) bei festgeschaltetem m als

$$X = F_1(d, \omega)$$

schreiben und erhält für eine Anzahl herausgegriffener Werte von d , X als Abhängige von ω
und umgekehrt. Die *rechte Seite* von (21) erlaubt X vermöge der Gleichung (22) in anderer
Weise als Abhängige von ω und umgekehrt, graphisch darzustellen. Die Ueberlagerung der so
gewonnenen geometrischen Oerter liefert durch die Schnittpunkte der zu einem bestimmten
 d gehörenden Linien die entsprechenden *kritischen Drehschnellen* u. zw. im allgemeinen zwei
Werte. Liefern die d -Linien *keinen Schnittpunkt*, so bedeutet das, ähnlich wie der starren
Welle, *labiles Gleichgewicht*, innerhalb dessen, nach den Versuchen von Hummel zu schließen,
die Wellenauslenkung bei gleich großer Störungskraft erheblich geringer ist als bei einer der
kritischen Drehzahlen.

Um an Rechenarbeit zu sparen, wurde der Fall einer elastischen, jedoch masselosen
Welle behandelt, für die sich erheblich vereinfachte Grundgleichungen ergeben. Die Elastizität
der Welle kennzeichnen wir durch den Betrag der statischen Durchbiegung ν in der Mitte,
die mit der normalen kritischen Drehzahl bekanntlich durch die Beziehung

$$\nu = \frac{g}{\omega_n^2} \quad \dots \quad (23)$$

zusammenhängt. Es stellt sich heraus, daß für diesen Fall zur Kennzeichnung einer Welle
mit den zugehörigen Lagern die Größe:

$$\Gamma = \left[\frac{2 \Phi \rho}{\eta} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right]^2 \frac{\delta}{g} \quad \text{und das Verhältnis} \quad \frac{\nu}{\delta} \quad \dots \quad (24)$$

hinreichen. Wir bezeichnen ferner die an einer Welle mit der normalen kritischen Drehzahl ω_n
infolge der Lagerwirkung auftretende neue Kritische mit ω_L . Durch im einzelnen nicht wieder-
gebbare Rechnungen gelangt man zu der in Abb. (2) dargestellten Kurvenschar, in welcher
 Γ die Abszisse und $\frac{\omega_L}{\omega_n}$ die Ordinate bilden. Bei $\frac{\nu}{\delta} = \infty$, d. h. einer unendlich biegsamen Welle

ist $\frac{\omega_L}{\omega_n} = 1$, d. h. $\omega_L = \omega_n$, die normale kritische Drehzahl wird durch die Anwesenheit des Oelpolsters nicht geändert. Je höher die kritische Drehzahl ist, desto stärker wird sie durch den Einfluß des Lagerpolsters herabgesetzt. Für das Gebiet von etwa 1700 bis 2500 min.

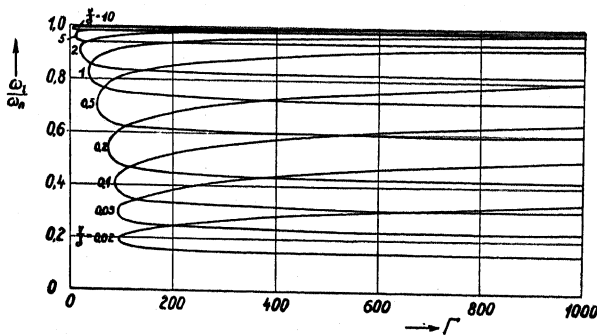


Abb. 2.

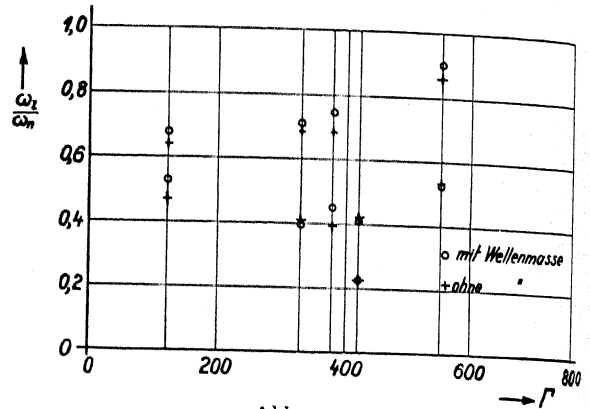


Abb. 3.

Umdrehungen als normale kritische Drehzahl dürfte eine Herabsetzung bis auf etwa 0,6 des normalen Wertes erfolgen. Im übrigen darf nicht übersehen werden, daß zu jeder Kenngröße Γ bei einem bestimmten $\frac{v}{\delta}$ innerhalb des stabilen Gebietes zwei kritische Drehzahlen gehören.

Nun wurden nach den vollständigen Gleichungen die kritischen Drehzahlen für einige mit Masse behafteten Wellen berechnet und in Abb. (2) zu derjenigen Kenngröße Γ aufgetragen, welche gleichem Flächendruck usw. entspricht. Wie Abb. (3) zeigt, weichen die so berechneten Drehzahlen von denjenigen, die (bei gleich großem Γ) an der masselosen Welle erscheinen, so wenig (d. h. höchstens um 10 v. H.) ab, daß man die Kurvenschar Abb. (2) auch für die mit Masse behafteten Wellen mit für die Praxis hinreichender Annäherung zur Berechnung der ω_L benutzen darf.

⁸⁾ Wir ändern c_o in Gl. (3) in c_o' , damit keine Verwechslung mit c_o in Gl. (18) entsteht.

Ueber die Eigenfrequenzen der Schaufelgruppen von Dampfturbinen

Von E. Schwerin, Berlin-Halensee

Die bisher übliche Berechnung der Eigenfrequenzen von Dampfturbinenschaufeln geht von der Auffassung aus, daß alle Schaufeln eines Rades sich dynamisch genau gleich verhalten und daß es daher zulässig ist, jede Schaufel als einen isolierten, schwingenden Stab zu betrachten, der am unteren Ende eingespannt, am oberen gewissen, für alle Schaufeln gleichen Grenzbedingungen unterworfen ist. Da jedoch wegen der Notwendigkeit der Deckbandunterbrechung mit Rücksicht auf die Wärmedehnung die Endschaufeln jeder Gruppe oben in anderer Weise gehalten sind als die mittleren Schaufeln, entsteht die Frage, um wieviel die Eigenfrequenz des Gesamtsystems der Gruppe von denen der Einzelschaufel verschieden ist und wie die zugehörigen Beanspruchungen innerhalb der Gruppe sich verteilen. Diese beiden Fragen mögen den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden.

A. Aufstellung der Grundgleichungen

Für die m -te Schaufel der aus n Schaufeln bestehenden Gruppe mögen folgende Bezeichnungen gelten (s. Abb. 1):

\overline{M}_{0m} das auf den Kopf der m -ten Schaufel wirkende Biegemoment,

$\overline{M}_m', \overline{M}_m''$ das unmittelbar rechts bzw. links dieser Schaufel auf das Deckband wirkende Biegemoment,

\overline{X}_m die Querkraft am Schaufelkopf,

worin alle Momente in dem in Abb. 1 angegebenen Sinne positiv seien.

Ferner sei:

t die Deckband-Teilung,

l die wirksame Schaufellänge,

F_s den Schaufelquerschnitt,

E_B, E_S die Elastizitätsmoduln von Deckband bzw. Schaufel,

$\mathcal{J}_B, \mathcal{J}_S$ die Trägheitsmomente von Deckband bzw. Schaufel,

$\overline{y}_B, \overline{y}_S$ die Auslenkungen von Deckband bzw. Schaufel,

x die Abszisse, vom oberen Schaufelende aus positiv gerechnet.

Wir gehen nun von dem bekannten Ansatz für die Auslenkung des transversal schwingenden Stabes aus:

$$\overline{y}_S = y_S \sin \beta t = l \cdot \sin \beta t (A_m \sin \alpha \xi + B_m \cos \alpha \xi + C_m \sin \alpha \xi + D_m \cos \alpha \xi) \quad \dots (I)$$

worin:

t die Zeit,

β die Kreisfrequenz,

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = l \cdot \sqrt{\frac{\rho F_s \beta^2}{E_S \mathcal{J}_S}}$$

und A_m, B_m, C_m, D_m die aus den Grenzbedingungen zu bestimmenden Konstanten bedeuten.

Die letzteren lauten hier, wenn $\eta_S = \frac{y_S}{l}$

für

$$\xi = 1 \quad \eta_S = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\eta_S}{d\xi} = 0$$

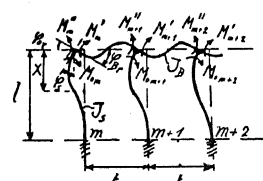


Abb. 1.

$$\text{für } \xi = 0 \quad \frac{d^2 \eta_S}{d\xi^2} = -\frac{M_{0m} l}{E_S \mathcal{F}_S} \quad \frac{d^3 \eta_S}{d\xi^3} = -\frac{X_m l^2}{E_S \mathcal{F}_S} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Ferner ist, wenn die Verbindung zwischen Deckband und Schaufelkopf als vollkommen starr vorausgesetzt wird und Längenänderungen vernachlässigt werden, nach Abb. 1:

$$\eta_m = \eta_{m+1} \quad \text{und} \quad \varphi_{Bl} = \varphi_{Br} = \varphi_S \quad \dots \dots \dots (3a) (3b)$$

und das Gleichgewicht der Momente am Knoten m erfordert:

$$M_{0m} + M'_m - M''_m = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

Mit Hilfe des Ansatzes (1) sowie der Bedingungen (2), (3), (4) ergibt sich nach längerer Rechnung folgendes System von drei simultanen linearen Differenzgleichungen für X_m, M'_m, M''_m :

$$(\bar{X}_m = X_m \sin \beta t; \bar{M}'_m = M'_m \sin \beta t; \bar{M}''_m = M''_m \sin \beta t)$$

$$M'_m + 2(M''_{m+1} + M'_{m+1}) + M''_{m+2} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$- \frac{3\mu}{\alpha} \left[(M''_m - M'_m) f_2 + X_m \cdot l \cdot \frac{f_0}{\alpha} \right] + 2M'_m + M''_{m+1} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$(M'_m - M''_m) f_0 + X_m \cdot l \cdot \frac{f_1}{\alpha} = (M'_{m+1} - M''_{m+1}) f_0 + X_{m+1} \cdot l \cdot \frac{f_1}{\alpha} \quad \dots \dots (7)$$

worin:

$$\mu = \frac{2l \cdot E_B \mathcal{F}_B}{t \cdot E_S \mathcal{F}_S} \quad f_{1,2}(\alpha) = \frac{Tg \alpha \mp tg \alpha}{1 \pm sec \alpha Sec \alpha} \quad f_0(\alpha) = \frac{Tg \alpha tg \alpha}{1 \pm sec \alpha Sec \alpha}$$

B. Integration der Grundgleichungen

Um das System (5), (6), (7) zu integrieren, führen wir den Ansatz

$$X_m \cdot l = c \cdot z^m; \quad M'_m = c' \cdot z^m; \quad M''_m = c'' \cdot z^m$$

in (5), (6), (7) ein und erhalten ein System von 3 linearen Gleichungen für z , das nur dann von Null verschiedene Werte für c, c', c'' ergibt, wenn entweder:

$$z = +1 \quad \dots \dots \dots (8a)$$

oder:

$$z^2 + \left(4 + \frac{F_0}{\mu}\right) z + 1 = 0 \quad \dots \dots \dots (8b)$$

ist, worin:

$$F_0 = \alpha \cdot \frac{Tg \alpha - tg \alpha}{1 - sec \alpha Sec \alpha}$$

Demnach wird das vollständige Integral:

$$X_m \cdot l = c_1 z_1^m + c_2 z_2^m + c_3; \quad M'_m = c'_1 z_1^m + c'_2 z_2^m + c'_3; \quad M''_m = c''_1 z_1^m + c''_2 z_2^m + c''_3 \quad (9)$$

worin z_1, z_2 die zueinander reziproken Wurzeln von (8b) und

$$c_1 = -(1 + K_1) \frac{\alpha f_0}{f_1} c'_1; \quad c_2 = -(1 + K_2) \frac{\alpha f_0}{f_1} c'_2; \quad c_3 = \frac{\alpha}{f_0} \left(2 f_2 + \frac{\alpha}{3\mu}\right) c'_3$$

$$c_1'' = -c'_1 \cdot K_1; \quad c_2'' = -c'_2 \cdot K_2; \quad c_3'' = -c'_3 \quad \dots \dots \dots (9a)$$

wenn: $1 = \frac{1}{K_2} = \frac{z_2 + 2}{z_1 + 2}$ gesetzt wird.

C. Aufstellung der Frequenzgleichung

Um nun mittelst (9), (9a) die Frequenzgleichung für die Eigenschwingungen der Schaufelgruppe aufzustellen, trennen wir zweckmäßig die Schwingungstypen mit in Ruhe bleibendem Schaufelkopf von denen, wo er horizontal hin- und herschwingt.

a) *Schwingungen mit in Ruhe bleibendem oberem Schaufelende.*

Für diesen Fall muß: $\eta_m (\xi = 0) = 0$ sein und die Lösung (9), (9a) vereinfacht sich dann infolge Wegfalls der Partikularlösung: $z = \pm 1$ zu:

$$X_m \cdot l = -(1 + K_1) \frac{\alpha f_0}{f_1} c_1' z_1^m - (1 + K_2) \frac{\alpha f_0}{f_1} c_2' z_2^m \quad \dots \quad (10)$$

$$M_m' = c_1' z_1^m + c_2' z_2^m; \quad M_m'' = -c_1' K_1 z_1^m - c_2' K_2 z_2^m$$

Aus den Bedingungen an den Gruppenenden:

$$M_1'' = 0 \quad M_n' = 0 \quad \dots \quad (11)$$

erhält man dann zwei Gleichungen für c_1', c_2' , deren Werte nur dann von Null verschieden sind, wenn

$$K_1 = \pm z_1^{n-1} \quad \dots \quad (12)$$

Die genauere Untersuchung der beiden, der symmetrischen bzw. gegensymmetrischen Schwingungsform entsprechenden Frequenzgleichungen (12) zeigt, daß jede derselben nur ein reelles Wurzelpaar (außer $z = \pm 1$) besitzt, das mit wachsendem n sehr rasch gegen den Wert:

$$z_1 = -\frac{1}{2} \quad z_2 = -2 \quad \dots \quad (13)$$

strebt und daß dann (11) ersetzt werden kann durch

$$F_0 = -\frac{3}{2} \mu \quad \dots \quad (12a)$$

während nach der üblichen Berechnungsweise ($z = \pm 1$):

$$F_0 = -6 \mu \quad \dots \quad (12b)$$

wäre.

Die Wurzeln von (11a), (11b) sind zwar im allgemeinen nicht sehr voneinander verschieden, doch kann der Unterschied immerhin bis zu 13 % bei $\mu = 2$ bis 3, wie es praktisch vorkommt, betragen (Abb. 2).

Aus (10) gewinnt man ferner nach längerer Rechnung unter Beachtung von (12) folgende Werte für X_m, M_m', M_m'' sowie für die Momente M_{0m}, M_{0m}' am Schaufelfuß bzw. -kopf:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_m'}{c_1'} &= z_1^m - z_1^{2n-m}; \quad \frac{M_m''}{c_1'} = \mp z_1^{m+n-1} \pm z_1^{n+1-m}; \quad \frac{X_m \cdot l}{c_1'} = \frac{\alpha f_0}{f_1} \cdot \frac{M_m'' - M_m'}{c_1'} \\ \frac{M_{0m}}{c_1'} &= \frac{M_m'' - M_m'}{c_1'} \cdot \frac{\sin \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}; \quad \frac{M_{0m}'}{c_1'} = \frac{M_m'' - M_m'}{c_1'} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Für die praktisch gebräuchlichen großen Werte von n gewinnt man aus vorstehendem das interessante Ergebnis, daß bei diesen Schwingungsformen auf der ganzen linken Gruppenhälfte die Momente M'' sehr klein gegen die Momente M'_m sind und daß letztere mit alternierendem Vorzeichen sehr rasch — fast genau nach einer geometrischen Reihe von Quotienten — $\frac{1}{2}$ —

nach der Gruppenmitte zu abklingen (Abb. 3). Da auch die Schaufelkopf- und Fußmomente M_{0m} bzw. M_{nm} einen fast genau gleichen Verlauf zeigen, folgt also, daß bei diesen Schwingungsformen die Endschaufeln in sehr viel höherem Maße als die Mittelschaufeln beansprucht sind.

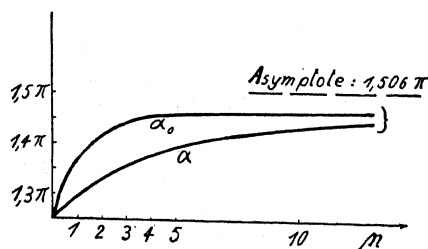


Abb. 2.

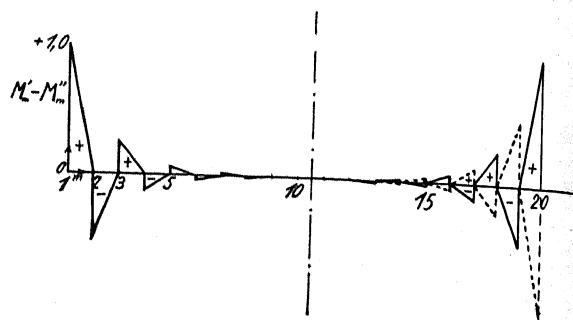


Abb. 3.

b) Schwingungen mit Horizontalbewegung des Schaufelkopfes.

Für den praktisch wichtigeren Fall, daß das obere Ende der Schaufel horizontal hin- und herschwingt, lautet die Bewegungsgleichung der gesamten Deckbandmasse:

$$2\mathfrak{M} \cdot \frac{d^2 \bar{y}_S}{dt^2} (\xi=0) = \sum_i^n \bar{X}_m, \quad \text{wo: } 2\mathfrak{M} = n \cdot t \cdot F_B \cdot \frac{\gamma_B}{g} \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{Da } \bar{X}_m = X_m \sin \beta t, \quad \bar{y}_S = \sin \beta t; \quad \frac{d^2 \bar{y}_S}{dt^2} = -\beta^2 y_S \sin \beta t$$

ist die Gleichung (7) zu ersetzen durch:

$$\eta_S(\xi=0) = -\frac{\sum_i^n X_m \cdot l}{l^2 \beta^2 \mathfrak{M}} = \left[(M'_m - M''_m) f_0 + X_m \cdot l \cdot \frac{f_1}{\alpha} \right] \cdot \frac{l^2}{E_S F_S \alpha^2}$$

und man erhält nach einiger Rechnung folgende Werte für die Deckbandmomente M'_m, M''_m :

$$M'_m = c'_1 \left[z_1^m + \frac{(1 + K_1) z_1 (z_1^n - 1)}{2 n N (z_1 - 1)} \right] + c'_2 \left[z_2^m + \frac{(1 + K_2) z_2 (z_2^n - 1)}{2 n N (z_2 - 1)} \right] \dots \quad (16)$$

$$M''_m = -c'_1 \left[z_1^m K_1 + \frac{(1 + K_1) z_1 (z_1^n - 1)}{2 n N (z_1 - 1)} \right] - c'_2 \left[z_2^m K_2 + \frac{(1 + K_2) z_2 (z_2^n - 1)}{2 n N (z_2 - 1)} \right]$$

wo:

$$N = \left(\frac{\alpha f_1}{f_0} \right)^2 \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{6\mu} \right) \left(\frac{1}{\alpha f_1} + \frac{t}{l} \cdot \frac{\gamma_B}{\gamma_S} \cdot \frac{F_B}{F_S} \right) - 1 \quad \dots \dots \dots (16a)$$

Aus den Grenzbedingungen (II) an den Gruppenenden folgt ganz analog wie unter a) die Frequenzgleichung:

$$\frac{m_B}{m_S} \cdot \alpha = - \frac{\frac{Z_0}{f_2} + \frac{1}{6\mu f_1}}{\frac{f_1}{f_1 \alpha} + \frac{1}{6\mu f_1}} + \frac{\frac{\Delta Z_0}{K_1 + 1} \cdot \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} \cdot \frac{f_0^2}{f_1^2 n \alpha}}{\frac{1}{6\mu} + \frac{1}{F_0}}; \quad m_B = t \cdot F_S \cdot \frac{\gamma_S}{g} \quad (17)$$

worin ΔZ_0 ein meist kleines Korrektionsglied und die Gleichung

$$\frac{m_B}{m_S} \cdot \alpha = - \frac{Z_0}{N_0}$$

der üblichen Berechnungsweise ($z = +1$) entspricht.

Mit Benutzung von (17) geht (16) über in:

$$\frac{M'_m}{c'_1} = z_1^m - z_1^n - (1 + z_1^{n-m}) \cdot \frac{1 + 2z_1}{2 + z_1}; \quad \frac{M''_m}{c'_1} = -z_1^{n+1-m} + z_1^n + (1 - z_1^{m-1}) \cdot \frac{1 + 2z_1}{2 + z_1};$$

$$M_{om} = M''_m - M'_m \quad X_m \cdot l \cdot \frac{f_0}{\alpha} = f_2 (M'_m - M''_m) + \frac{\alpha}{3\mu} (2 M'_m + M''_{m+1}) \quad (18)$$

$$M_{om} = M_{om} \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha \cos \alpha} + \frac{X_m l}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha \cos \alpha}$$

D. Zahlenbeispiel

Um nun über die wichtige Frage nach den Aenderungen hinsichtlich Frequenz und Spannungsverteilung gegenüber der bisherigen Berechnungsweise Klarheit zu gewinnen, seien im folgenden die numerischen Ergebnisse in einem mittleren Verhältnissen entsprechenden Fall mitgeteilt.

$$\begin{aligned} \text{Für:} \quad n &= 20 \quad l = 100 \text{ mm} \quad \mathcal{F}_S = 0,02 \text{ cm}^4 \quad F_S = E_B = 0,35 \text{ cm} \\ t &= 10 \text{ mm} \quad \mathcal{F}_B = 0,005 \text{ cm}^4 \quad F_B = E_S; \quad \gamma_B = \gamma_S \end{aligned}$$

wird: $\mu = 5$ und ferner für:

a) Schwingungen mit in Ruhe bleibendem Schaufelkopf.

Nach (12b) und Abb. 2 erhält man:

$$\text{Grundton: } \alpha = 245^\circ 45' \quad \text{I. Oberton: } \alpha = 423^\circ 30',$$

während nach der bisher üblichen Berechnungsweise sich ergeben würde:

$$\text{Grundton: } \alpha = 263^\circ 35' \quad \text{I. Oberton: } \alpha = 438^\circ 30'.$$

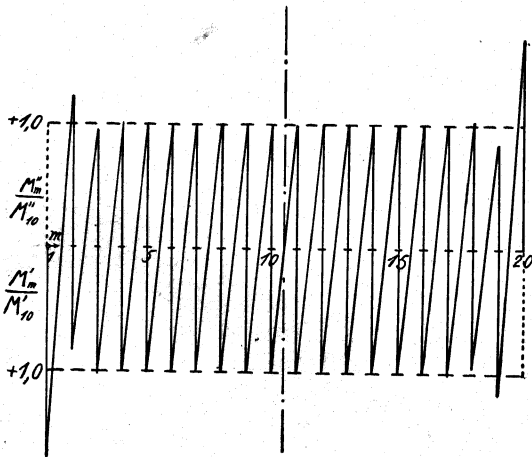


Abb. 4.

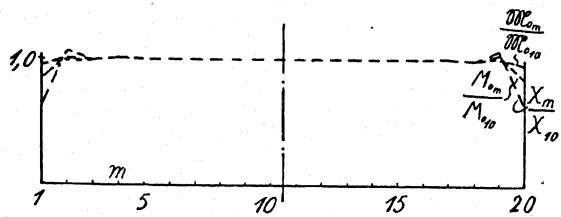


Abb. 5.

Der Frequenzunterschied beträgt also hier ca. 10 % für den Grundton, ca. 7 % für den I. Oberton, da die Frequenzen β nach (1) proportional α^2 sind.

b) Schwingungen mit Horizontalbewegung des Schaufelkopfes.

Hierfür erhält man aus (17):

$$\text{Grundton: } \alpha = 126^0 \quad \text{I. Oberton: } \alpha = 296^0 30',$$

während die bisher übliche Methode ergeben würde:

$$\text{Grundton: } \alpha = 126^0 30' \quad \text{I. Oberton: } \alpha = 297^0.$$

Die Frequenzunterschiede sind also im vorliegenden Falle verschwindend.

Für die Bieugungsmomente und Querkräfte ergibt sich nach (18) die in folgender Tabelle angegebene, in Abb. 4/5 veranschaulichte Verteilung innerhalb der Gruppe:

m		$\frac{M'_m}{M'_{10}}$	$\frac{M''_m}{M''_{11}}$	$\frac{M_{om}}{M_{o10}}$	$\frac{M_{0m}}{M_{010}}$	$\frac{X_m}{X_{10}}$
20	1	1,704	0	0,852	0,957	0,652
19	2	0,844	1,221	1,033	1,013	1,071
18	3	1,035	0,952	0,994	0,995	0,986
17	4	0,994	1,010	1,002	1,002	1,002
16	5	1,002	0,997	0,999	0,999	0,999
15—12	6—9	ca. 1,0	ca. 1,0	ca. 1,0	ca. 1,0	ca. 1,0
11	10	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Aus dieser Tabelle sowie aus Abb. 4/5 ersieht man zunächst das wichtige Ergebnis, daß das letzte Deckbandfeld um 70 %, also sehr beträchtlich höher beansprucht ist als die mittleren Felder. Was die Schaufelbeanspruchung betrifft, so wird die letzte Schaufel ca. 15 % im Kopf und ca. 4 % im Fuß gegenüber den Mittelschaufeln entlastet, dagegen wird die vorletzte Schaufel im Kopf um ca. 3 %, im Fuß um ca. 1 % mehr belastet. Die Querkraft am Kopf der letzten Schaufel ist um ca. 35 % kleiner, für die vorletzte um ca. 7 % größer als für die Mittelschaufeln. Ent- und Mehrbelastungen wechseln ab, die Lastaufnahme zeigt also auch hier oszillatorischen Charakter.

E. Zusammenfassung

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß, wenn die oberen Schaufelenden in Ruhe bleiben, die Frequenz der Gruppenschwingung nicht unbeträchtlich von der Frequenz der Einzelschaukel abweichen kann (bei $\mu = 2$ bis 3 um maximal ca. 13 %), und daß auch die Schwingungsenergie in diesem Falle größtenteils in die Endschaufeln wandert. Die dynamischen Beanspruchungen der letzteren sind daher weit größer als die der Mittelschaufeln und alle Beanspruchungen klingen vom Gruppenende aus oszillatorisch etwa nach einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $-\frac{1}{2}$ ab. Bei den Schwingungen mit Horizontalbewegung des oberen Schaufelendes hingegen weichen sowohl Frequenz wie auch die Schaufelbeanspruchungen nur wenig von den unter Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung errechneten Werten ab, wobei die letzte Schaufel etwas ent-, die vorletzte etwas mehr belastet wird; doch kann die Mehrbelastung des letzten Deckbandfeldes bis 70 % gegenüber der Gruppenmitte betragen. Im übrigen zeigt aber auch hier die Lastverteilung einen ähnlichen oszillatorischen Charakter wie bei dem oben behandelten Schwingungstyp.

Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnell laufender Wellen

Von J. J. Koch, Delft

1. Wie bekannt ist, wird die Bestimmung der kritischen Drehzahlen einer schnell-drehenden Welle beherrscht von der Differentialgleichung

$$(EI y'')'' - m \omega^2 y = 0$$

in welcher EI den Steifheitsfaktor, m die spezifische Masse, ω die Winkelgeschwindigkeit und y die Durchbiegung der Welle darstellt. Eine exakte Lösung dieser Gleichung ist bei willkürlich veränderlichen EI und m nicht zu erhalten. Dagegen steht zur näherungsweisen Bestimmung der ersten kritischen Drehzahl ein wohlbekanntes Näherungsverfahren zur Verfügung, welches kurz erwähnt werden möge¹⁾.

Es wird eine willkürliche Ausbiegungskurve y_1 , welche mit den Randbedingungen verträglich ist, angenommen. Die Ordinate dieser Kurve wird mit m multipliziert und die also entstandene Kurve (welche nicht mehr stetig zu sein braucht) zweimal integriert. Dabei treten zwei Integrationskonstanten auf, welche mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden. Die Ordinate der so erhaltenen Kurve wird durch EI dividiert und ebenfalls zweimal integriert. Nachdem die zwei neuen Integrationskonstanten aus den Randbedingungen bestimmt worden sind, erhält man eine Kurve y_2 . Wäre die zuerst angenommene Funktion y_1 die gesuchte Lösung der Differentialgleichung gewesen, so würde das Resultat y_2 des oben geschilderten Verfahrens $\frac{y_1}{\omega^2}$ geworden sein. Aus dem Quotient von y_1 und y_2 wäre also ω^2 zu bestimmen.

2. Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu untersuchen, wie y_2 sich ändert, wenn für y_1 eine, von der Lösung der Differentialgleichung abweichende Kurve angenommen wird. Dazu entwickeln wir die Funktion y_1 in eine, nach den normierten Eigenfunktionen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ fortschreitende Reihe

$$y_1 = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_3 \eta_3 + \dots$$

und wenden das vorher beschriebene Integrationsverfahren auf diese Reihe an. Nennen wir die zu den Funktionen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ gehörigen Werte von ω^2 respektive $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$, so erhalten wir für y_2 :

$$y_2 = \frac{\alpha_1}{\omega_1^2} \eta_1 + \frac{\alpha_2}{\omega_2^2} \eta_2 + \frac{\alpha_3}{\omega_3^2} \eta_3 + \dots$$

Da $\omega_2, \omega_3, \dots$ bedeutend größer sind als ω_1 , so wird $\omega_1^2 y_2$ schon viel besser als y_1 mit $\alpha_1 \eta_1$ übereinstimmen.

Wird das Verfahren verschiedene Male wiederholt, so wird die Funktion $\omega^{2n-2} y_n$ mehr und mehr nach $\alpha_1 \eta_1$ konvergieren, so daß aus dem Quotient zweier aufeinanderfolgender Kurven η_n und η_{n+1} , ω_1^2 mit sehr großer Genauigkeit bestimmt werden kann.

3. Die Eigenfunktionen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ zeigen aber eine wichtige Eigenschaft, welche es ermöglicht, ω_1^2 schon mit genügender Genauigkeit aus y_1 und y_2 zu berechnen. Es ist nämlich allgemein:

$$\int_0^l \eta_p \eta_q m dx = 0, \text{ wenn } p \neq q. \quad (\text{vergl. App. 1.})$$

¹⁾ Vergleiche STODOLA, Dampf- und Gasturbinen, 5. Auflage, S. 381.

Deshalb ist:

$$\begin{aligned}\int_0^l y_1 y_2 m dx &= \int_0^l (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_3 \eta_3 + \dots) \left(\frac{\alpha_1}{\omega_1^2} \eta_1 + \frac{\alpha_2}{\omega_2^2} \eta_2 + \frac{\alpha_3}{\omega_3^2} \eta_3 + \dots \right) m dx = \\ &= \frac{\alpha_1^2}{\omega_1^2} \int_0^l \eta_1^2 m dx + \frac{\alpha_2^2}{\omega_2^2} \int_0^l \eta_2^2 m dx + \frac{\alpha_3^2}{\omega_3^2} \int_0^l \eta_3^2 m dx + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^l y_2^2 m dx &= \int_0^l \left(\frac{\alpha_1}{\omega_1^2} \eta_1 + \frac{\alpha_2}{\omega_2^2} \eta_2 + \frac{\alpha_3}{\omega_3^2} \eta_3 + \dots \right)^2 m dx = \\ &= \frac{\alpha_1^2}{\omega_1^4} \int_0^l \eta_1^2 m dx + \frac{\alpha_2^2}{\omega_2^4} \int_0^l \eta_2^2 m dx + \frac{\alpha_3^2}{\omega_3^4} \int_0^l \eta_3^2 m dx + \dots\end{aligned}$$

Sind die η so normiert, daß $\int_0^l \eta^2 m dx = 1$ ist, und vernachlässigt man in den Ausdrücken $\int_0^l y_1 y_2 m dx$ und $\int_0^l y_2^2 m dx$ die Glieder mit $\int_0^l \eta_3^2 m dx$ usw., so ist:

$$\frac{\int_0^l y_1 y_2 m dx}{\int_0^l y_2^2 m dx} \approx \frac{\frac{\alpha_1^2}{\omega_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\omega_2^2}}{\frac{\alpha_1^2}{\omega_1^4} + \frac{\alpha_2^2}{\omega_2^4}} \approx \frac{1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}}{1 + \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}} \cdot \omega_1^2 \approx \omega_1^2 \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \right).$$

Der Klammerausdruck weicht, weil $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}$ bei vernünftiger Wahl von y_1 klein ist ($\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$ beträgt ungefähr $\frac{1}{16}$, und $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ braucht nicht größer als $\frac{1}{10}$ zu sein), sehr wenig von 1 ab, so daß mit großer Genauigkeit

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l y_1 y_2 m dx}{\int_0^l y_2^2 m dx}$$

geschrieben werden kann.

Eine noch größere Genauigkeit kann erzielt werden, wenn man mit dem Iterationsverfahren bis y_3 weitergeht, und nun

$$\frac{\int_0^l y_2 y_3 m dx}{\int_0^l y_3^2 m dx}$$

berechnet.

In diesem Falle findet man

$$\frac{\int_0^l y_2 y_3 m dx}{\int_0^l y_3^2 m dx} = \omega_1^2 \frac{1 + \frac{\omega_1^6}{\omega_2^6} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} + \frac{\omega_1^6}{\omega_3^6} \cdot \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2} + \dots}{1 + \frac{\omega_1^8}{\omega_2^8} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} + \frac{\omega_1^8}{\omega_3^8} \cdot \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2} + \dots}$$

so daß der spezifische Fehler jetzt nur $\approx \frac{\omega_1^6}{\omega_2^6} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}$ ist.

4. Das hier beschriebene Verfahren ist auch zur Berechnung der höheren kritischen Drehzahlen geeignet. Zur Berechnung von ω_2^2 z. B. geht man aus von einer Kurve \bar{y}_1 , deren Entwicklung nach den η -Funktionen, das Glied $\alpha_1 \eta_1$ nicht enthält. Eine derartige Kurve erhält man, indem man von einer willkürlichen Kurve

$$y_1 = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_3 \eta_3 + \dots$$

ausgehend, zuerst den Koeffizienten α_1 bestimmt mit Hilfe der Beziehung:

$$\int_0^l \eta_1 y_1 m dx = \alpha_1 \int_0^l \eta_1^2 m dx = \alpha_1$$

und dann von y_1 die Funktion $\alpha_1 \eta_1$ subtrahiert. Das unter 3 beschriebene Verfahren auf

$$\bar{y}_1 = y_1 - \alpha_1 \eta_1$$

angewandt, liefert das gesuchte ω_2^2 , sowie die Funktion η_2 . Sollte z. B. durch Ungenauigkeit in der Bestimmung von α_1 beim Integrationsprozeß, doch noch ein Rest der dann nicht vollständig ausgemerzten Funktion η_1 sich geltend machen, so ist es immer möglich, bei jeder Zwischenstufe den von η_1 herstammenden Bestandteil in der angedeuteten Weise zu eliminieren. Gleichwohl muß dabei ein ziemlich genaues Integrationsverfahren verwendet werden. Zur Berechnung der ersten kritischen Drehzahl ist graphische Integration mit Hilfe von Seilpolygonen genau genug. Für die Bestimmung der höheren ω empfiehlt sich aber ein numerisches Integrationsverfahren, welches in Appendix II angegeben ist.

5. Weil die Differentialgleichung des freischwingenden Balkens

$$(EI y'')'' - m \mu^2 y = 0$$

vollständig mit derjenigen der schnellumlaufenden Welle übereinstimmt, ist das soeben beschriebene Verfahren unverändert anwendbar auf die Bestimmung der Schwingungszahlen eines solchen Balkens.

In gleicher Weise lassen sich auch die Eigenschwingungszahlen einer tordierten Welle bestimmen.

6. Entsprechend modifiziert kann die oben beschriebene Methode auf die Berechnung der Knickkraft willkürlich belasteter Stäbe mit veränderlichem Trägheitsmomente angewendet werden.

Ist N die Normalkraft eines willkürlich gewählten Stabquerschnittes, welche also als eine, bis auf einen Faktor μ^2 explicit gegebene Funktion \bar{N} der Querschnittslage aufzufassen ist, so gilt für eine von der Geraden abweichende Gleichgewichtsform, die Gleichung

$$(E \mathcal{F} y'')' + \mu^2 \bar{N} y' - Q = 0$$

wobei Q die konstante, im Balken auftretende Querkraft darstellt. Dabei ist, wenn $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ die Lösungen sind, welche der Differentialgleichung genügen:

$$\int_0^l \eta_p \eta_q \bar{N} dx = 0 \quad \text{wenn } p \neq q \text{ (App. 3).}$$

Man geht von einem angenommenen y_1' aus, welches so gewählt sein muß, daß das zugehörige y_1 den Randbedingungen entspricht. Dieses y_1' wird mit \bar{N} multipliziert und nachdem einmal integriert und die Integrationskonstante und die Konstante Q aus den Randbedingungen bestimmt worden sind, entsteht hieraus das Moment bei der Einheitsbelastung mit entgegengesetztem Zeichen. Wird dieses durch EI dividiert und zweimal integriert, so

kommt das y_2 heraus, wobei die Integrationskonstanten aus den Randbedingungen gefunden werden. Wenn das Verfahren einige Male fortgesetzt wird, wird die Kurve y_n immer besser dem η_1 gleichkommen. μ_1^2 ist jetzt zu finden aus:

$$\mu_1^2 = \frac{y'_n}{y'_n + x}$$

Wie bei den schnell drehenden Wellen braucht man hier auch nur bis y_2 fortzufahren, wenn μ_1^2 aus:

$$\mu_1^2 = \frac{\int_0^l y_1' y_2' \bar{N} dx}{\int_0^l y_2'^2 \bar{N} dx}$$

berechnet wird. Das Berechnen der höheren Knickkräfte ist auch hier möglich, aber praktisch von keinem Wert.

Appendix I.

Satz: Sind η_p und η_q zwei zu ω_p^2 und ω_q^2 gehörende Lösungen der Differentialgleichung $(EI y'')'' - m \omega^2 y = 0$, so ist

$$\int_0^l \eta_p \eta_q m dx = 0.$$

Beweis: Es gilt:

$$(EI \eta_p'')'' - m \omega_p^2 \eta_p = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$(EI \eta_q'')'' - m \omega_q^2 \eta_q = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

Aus (1) folgt $m \eta_p = \frac{1}{\omega_p^2} (EI \eta_p'')''$, so daß

$$\int_0^l \eta_p \eta_q m dx = \frac{1}{\omega_p^2} \int_0^l (EI \eta_p'')'' \eta_q dx.$$

Wiederholte partielle Integration und Einführung von $(EI \eta_q'')'' = m \omega_q^2 \eta_q$ liefert für diesen Ausdruck:

$$\frac{1}{\omega_p^2} \left\{ (EI \eta_p'')' \eta_q - EI \eta_p'' \eta_q' + EI \eta_q'' \eta_p' - (EI \eta_q'')' \eta_p \right\} \Big|_0^l + \frac{\omega_q^2}{\omega_p^2} \int_0^l \eta_p \eta_q m dx;$$

oder mit:

$$(EI \eta_p'')' = Q_p; \quad EI \eta_p'' = M_p; \quad (EI \eta_q'')' = Q_q; \quad EI \eta_q'' = M_q;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_p^2} \left\{ Q_p \eta_q - M_p \eta_q' + M_q \eta_p' - Q_q \eta_p \right\} \Big|_0^l + \frac{\omega_q^2}{\omega_p^2} \int_0^l \eta_p \eta_q m dx = \\ & = \frac{1}{\omega_p^2} \left\{ k_l \eta_p \eta_q + \gamma_l \eta_p' \eta_q' - \gamma_l \eta_q' \eta_p' - k_l \eta_q \eta_p \right\}_{x=l} - \\ & - \frac{1}{\omega_p^2} \left\{ -k_o \eta_p \eta_q - \gamma_o \eta_p' \eta_q' + \gamma_o \eta_q' \eta_p' + k_o \eta_q \eta_p \right\}_{x=0} + \\ & + \frac{\omega_q^2}{\omega_p^2} \int_0^l \eta_p \eta_q m dx = \frac{\omega_q^2}{\omega_p^2} \int_0^l \eta_p \eta_q m dx. \end{aligned}$$

Es ist hierbei der allgemeine Fall vorausgesetzt, daß die Enden derart elastisch unterstützt und eingespannt sind, daß:

$$Q_l = k_l \eta_l; \quad M_l = -\gamma_l \eta_l'; \quad Q_o = -k_o \eta_o; \quad M_o = \gamma_o \eta_o'.$$

Es ist also:

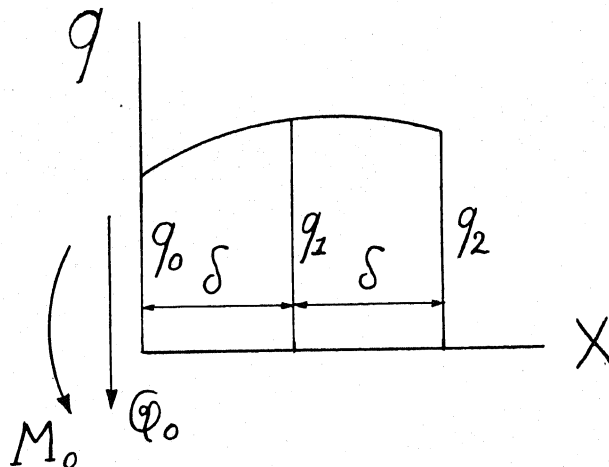
$$\int_o^l \eta_p \eta_q m dx = \frac{\omega_q^2}{\omega_p^2} \int_o^l \eta_p \eta_q m dx,$$

d. h. für $p \neq q$

$$\int_o^l \eta_p \eta_q m dx = 0.$$

Appendix II.

Zur Bestimmung der Funktion M (des Biegemomentes) aus ihrer zweiten Abteilung q (der Belastungsfunktion) verteilt man die Länge l in eine gerade Anzahl gleicher Intervalle δ . Die zu den Abzissen $0, \delta, 2\delta, \dots$ gehörigen Ordinaten von q mögen q_0, q_1, q_2, \dots heißen.



Durch drei aufeinanderfolgende Punkte q_0, q_1 und q_2 wird nun eine Parabel

$$q_{0,1,2} = q_0 + \frac{-3q_0 + 4q_1 - q_2}{2\delta} x + \frac{q_0 - 2q_1 + q_2}{2\delta^2} x^2$$

gelegt und durch Integration wird mit Hilfe dieser Näherungsfunktion das Moment in den Punkten 1 und 2 berechnet. Vorausgesetzt wird, daß an der Stelle 0 ein Moment M_0 und eine Querkraft Q_0 auftreten. Es wird:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + Q_0 \delta + \delta^2 \left(\frac{7}{24} q_0 + \frac{1}{4} q_1 - \frac{1}{24} q_2 \right) = \\ &= M_0 + Q_0 \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \cdot q_0 + \frac{1}{24} \delta^2 (-q_0 + 6q_1 - q_2). \end{aligned}$$

$$M_2 = M_0 + 2Q_0 \delta + \frac{1}{3} \delta^2 (2q_0 + 4q_1),$$

im allgemeinen, wenn $M_n = \bar{M}_n + \bar{\bar{M}}_n$ geschrieben wird:

$$\bar{M}_n = \bar{M}_{n-1} + Q_0 \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \{ q_0 + 4q_1 + 2q_2 + 4q_3 \dots (3 - (-1)^p) q_p + \dots (3 - (-1)^{n-1}) q_{n-1} \}$$

$$\bar{\bar{M}}_n = \frac{\delta^2}{24} (-q_{n-1} + 6q_n - q_{n+1}), \text{ für } n \text{ ungerade und } \bar{\bar{M}}_n = 0, \text{ für } n \text{ gerade.}$$

Appendix III.

Satz: Sind η_p und η_q Lösungen der Differentialgleichungen:

$$(EI\eta_p'')' + \mu_p^2 \bar{N} \eta_p' - Q_p = 0$$

$$(EI\eta_q'')' + \mu_q^2 \bar{N} \eta_q' - Q_q = 0$$

so ist $\int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx &= -\frac{1}{\mu_q^2} \int_0^l \{ (EI\eta_q'')' - Q_q \} \eta_p' dx = \\ &= \frac{1}{\mu_p^2} \{ -EI\eta_q'' \eta_p' + EI\eta_p'' \eta_q' + Q_q \eta_p - Q_p \eta_q \} \Big|_0^l + \frac{\mu_p^2}{\mu_q^2} \int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx = \\ &= \frac{1}{\mu_p^2} \{ -M_q \eta_p' + M_p \eta_q' + Q_q \eta_p - Q_p \eta_q \} \Big|_0^l + \frac{\mu_p^2}{\mu_q^2} \int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx = \\ &= \frac{1}{\mu_p^2} \{ \gamma_l \eta_q' \eta_p' - \gamma_l \eta_p' \eta_q' + k_l \eta_q \eta_p - k_l \eta_p \eta_q \} \Big|_{x=l} - \\ &\quad - \frac{1}{\mu_p^2} \{ -\gamma_o \eta_q' \eta_p' + \gamma_o \eta_p' \eta_q' - k_o \eta_q \eta_p + k_o \eta_p \eta_q \} \Big|_{x=0} + \\ &\quad + \frac{\mu_p^2}{\mu_q^2} \int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx = \frac{\mu_p^2}{\mu_q^2} \int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx. \end{aligned}$$

(Auch hier ist wieder (wie in Appendix I) federnde Unterstützung vorausgesetzt worden.)

Deshalb ist:

$$\int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx = \frac{\mu_p^2}{\mu_q^2} \int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx,$$

d. h. wenn $\mu_p^2 \neq \mu_q^2$

$$\int_0^l \eta_p' \eta_q' \bar{N} dx = 0.$$

Resonanzerscheinungen beim Schlingertank

Von M. Schuler, Göttingen

(Hiezu Abb. 3 auf Tafel VI)

Der Frahm'sche Schlingertank hat den Zweck, die Schlingerbewegungen des Schiffes, d. h. die Schwingungen des Schiffes um die Längsachse, zu verringern. Er besteht in der älteren Ausführung aus zwei Wassertanks, die zu beiden Seiten des Schiffes angeordnet sind und die unten durch einen Wasserkanal und oben durch einen Luftkanal miteinander verbunden sind (Abb. 1). Die Tanks sind zur Hälfte mit Wasser gefüllt, und dieses kann in dem U-förmigen Rohre schwingen. Bei der neueren Ausführung (Abb. 2), wie sie auf dem Dampfer «Deutschland» verwendet ist, sind die Tanks außen am Schiff angebaut. Sie stehen unten mit

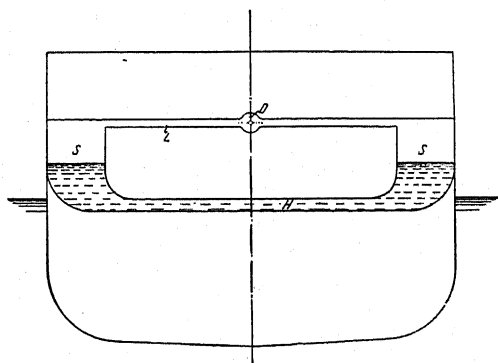


Abb. 1

Frahm'scher Schlingertank, ältere Ausführung.

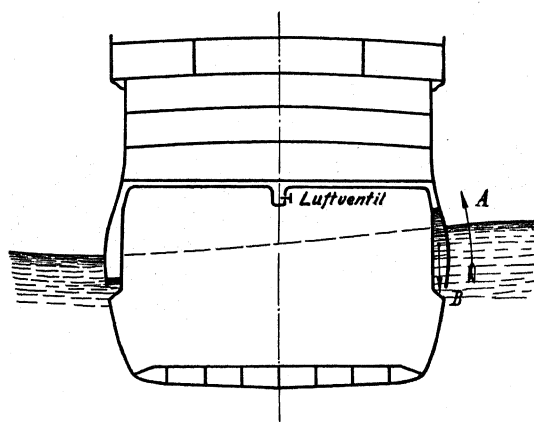


Abb. 2

Frahm'scher Schlingertank, neue Ausführung.

- S = Wassertanks;
 H = unterer Verbindungskanal, der mit Wasser gefüllt ist;
 L = oberer Verbindungskanal;
 D = Luftventil, durch dessen Schließen die Wasserschwingungen im Tank verhindert werden können.

dem Außenwasser in Verbindung und sind oben durch einen Luftkanal zusammen verbunden. Auch hier kann das Wasser in den Tanks schwingen, denn das untere Verbindungsrohr bildet gewissermaßen das Meer, und in das obere Verbindungsrohr kann keine Luft von außen zu treten, so daß der eine Spiegel ebensoviel fallen muß, wie der andere steigt.

Die Wirkungsweise des Tanks erklärt FRAHM folgendermaßen¹⁾:

Große Schlingerbewegungen treten nur im Falle der Resonanz des Wellenanstoßes mit der Schiffsschwingung auf. Dann hat das Schiff einen Phasenwinkel von 90 Grad gegenüber der Welle. Das Schiff stößt nun seinerseits die Wasserschwingung des Tanks an. Steht diese in Resonanz mit der Schiffsschwingung, so hat sie ihrerseits einen Phasenwinkel von 90 Grad gegen das Schiff, also von 180 Grad gegen die Wasserwelle. Die Wasserbewegung des Tanks wirkt also der Wellenbewegung stets entgegen und verringert so die Schlingerbewegung des Schiffes. Voraussetzung ist, daß die *Eigenschwingung des Tankwassers genau auf die Eigenschwingung des Schiffes abgestimmt ist*. Die Reibung zwischen dem Tankwasser und dem Schiff wird von FRAHM vernachlässigt.

¹⁾ H. FRAHM, neuartige Schlingertanks zur Abdämpfung von Schiffsrollbewegungen und ihre erfolgreiche Anwendung in der Praxis, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1911.

Ich habe nun im Anschluß an die Ausbildung eines kleinen Schlingertanks zur Dämpfung des Kreiselkompasses *den Fall eines einmaligen Anstoßes* betrachtet. Setzt man, wie dies FRAHM getan hat, die Reibung Null, so kann die Schwingung nach dem Energiesatz nicht abnehmen, es gibt nur Schwebungen zwischen der Schwingung des Schiffes und des Tankwassers. Man hat also die Reibung bei der Rechnung in erster Linie zu berücksichtigen.

Wie die Reibung wirkt, läßt sich am besten an dem Modell (Abb. 3, Tafel VI) sehen. Ein Rad (A), das einseitig durch ein Gewicht beschwert ist, kann um seine Achse (B) schwingen. Es versinnbildlicht das Schiff. An dem Rade ist ein rundgebogenes Rohr (C) angebracht, das halb mit Wasser gefüllt ist. Oben im Luftkanal sitzt ein Ventil (D), mit dem man die durchströmende Luft drosseln und so eine bestimmte Reibung einstellen kann. Öffnet man den Hahnen ganz und stößt dann das Rad an, so erhält man nur eine geringe Dämpfung der Radschwingungen, die durch die Lagerreibung und die kleine Flüssigkeitsreibung bedingt ist. Schließt man nun den Hahnen ganz, so wird die Reibung ∞ , und man erhält wieder eine Schwingung mit sehr geringer Dämpfung, da das Wasser jetzt im Rohr nicht mehr schwingen kann. Wenn man aber den Hahnen halb öffnet und das Rad anstößt, so erhält man eine kräftige Dämpfung, die durch die Energievernichtung bei dem Durchströmen des Hahnes erzeugt wird. Es gibt offenbar eine Hahnstellung, bei der die stärkste Dämpfung erreicht wird. Rechnet man die Abhängigkeit der Dämpfung von der Reibung aus, so erhält man Abb. 4. b ist die Reibung und μ der Dämpfungs-

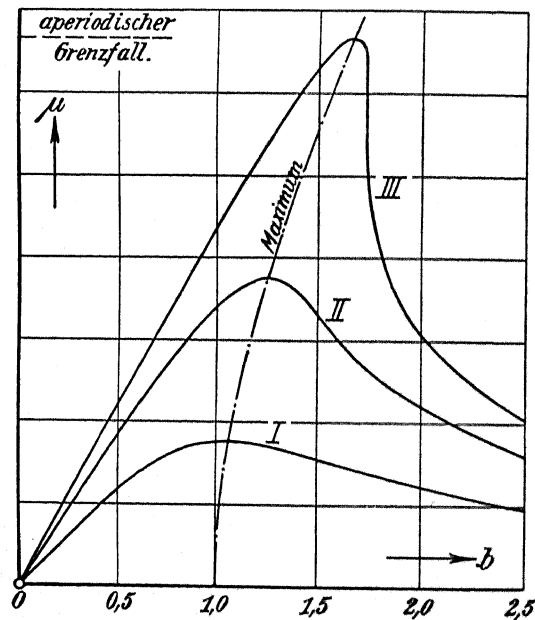


Abb. 4.

Abhängigkeit der Dämpfung von der Reibung.

b = Reibung zwischen Tankwasser und Schiff; μ = Dämpfungsexponent;
 Kurve I berechnet für kleinen Schlingertank;
 " II " " großen
 " III " " sehr großen Schlingertank.

exponent. Für $b = 0$ und $b = \infty$ wird $\mu = 0$; dazwischen liegt ein ziemlich flaches Maximum bei einer verhältnismäßig großen Reibung. Bei der Berechnung der Kurve nahm ich den idealen Fall an, daß zwei Pendel, das Schiff und die Flüssigkeit, um denselben Punkt schwingen und proportional ihrer Geschwindigkeitsdifferenz aufeinander einwirken; d. h. ich rechnete *zwei reibungsgekoppelte Pendel*.

Der Ansatz lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + b_1 \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \right) + n_1^2 \varphi = 0 \\ \text{II. } \frac{d^2\psi}{dt^2} + b_2 \left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} \right) + n_2^2 \psi = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Dabei ist:

- φ = Neigungswinkel des Schiffes gegen den Horizont.
- ψ = Neigungswinkel des Tankwassers gegen den Horizont.
- n_1 = Eigenschwingungszahl des Schiffes.
- n_2 = Eigenschwingungszahl des Tankwassers.
- b_1 = Reibungskonstante des Schiffes gegen das Tankwasser.
- b_2 = Reibungskonstante des Tankwassers gegen das Schiff.

$b_1/b_2 = c$ = positive Konstante, die von dem Größenverhältnis $\frac{\text{Tank}}{\text{Schiff}}$ abhängt.

Die Gl. (1) lassen sich nach den bekannten Methoden der gekoppelten Schwingungen auflösen. Doch ist die Diskussion der Wurzeln nicht ganz einfach. Bei der Berechnung der Kurve (Abb. 4) habe ich die Vereinfachung gemacht, dass das Trägheitsmoment des Tankwassers klein sei gegen das Trägheitsmoment des ganzen Schiffes.

Bei den bisherigen Betrachtungen spielte die Abstimmung des Wassers im Tank keine Rolle, und in dem Modell ist auch die Wasserschwingung viel kürzer als die Radschwingung. Da aber die Ausführungen FRAHMS sehr überzeugend sind, so dachte ich, daß bei *periodischen Anstößen* die Abstimmung von Bedeutung sein werde. Ich rechnete deshalb die erzwungenen Schwingungen eines Schiffes mit Tank, wenn man die Reibungskopplung zugrunde legt. Die Rechnung ist verhältnismäßig einfach.

Der Ansatz lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + b_1 \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \right) + n_1^2 \varphi = P \cdot e^{iNt} \\ \text{II. } \frac{d^2\psi}{dt^2} + b_2 \left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} \right) + n_2^2 \psi = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Man erhält daraus die Amplitude des Schiffes:

$$A = P \cdot \sqrt{\frac{\alpha_2^2 + b_2^2 N^2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 + b_2^2 N^2 (\alpha_1 + c \alpha_2)^2}} \dots \dots \dots (3)$$

P = Grösse des Anstoßes durch den Seegang auf das Schiff.

N = Schwingungszahl des Wellenanstoßes.

$\alpha_1 = n_1^2 - N^2$ = Verstimmung des Schiffes gegen den Seegang.

$\alpha_2 = n_2^2 - N^2$ = Verstimmung des Tanks gegen den Seegang.

Ausschlaggebend für die Amplitude ist der Wert der Wurzel in Gl. (3).

1. Der Zähler:

Das erste Glied verschwindet bei Resonanz mit dem Tank, sonst ist es immer positiv. Das zweite Glied ist immer positiv, da die Reibung nie ganz verschwinden kann. Der Zähler hat also immer einen positiven Wert.

2. Der Nenner:

Das erste Glied verschwindet bei Resonanz mit dem Schiff und bei Resonanz mit dem Tank; sonst ist es positiv. Das zweite Glied verschwindet, wenn $\alpha_1 = -c \cdot \alpha_2$ ist. Dann verschwindet aber sicher nicht das erste Glied des Nenners. Der Nenner bleibt also im allgemeinen positiv und die Amplitude des Schiffes endlich. Ein Ausnahmefall ist nur vorhanden, wenn

$\alpha_1 = \alpha_2$ ist, d. h. wenn die Periode des Wassers im Tank abgestimmt ist auf die Eigenperiode des Schiffes. Dann werden alle Glieder des Nenners bei Resonanz mit dem Seegang gleichzeitig null, und die Amplitude des Schiffes wird unendlich, d. h. der Schlingertank versagt gerade in dem Falle, der sich nach der Betrachtung von Frahm als Optimum ergibt.

Um einen besseren Ueberblick zu bekommen, habe ich die Amplitude des Schiffes abhängig von dem Verhältnis Wellenperiode/Schiffsperiode aufgezeichnet (Abb. 5). Bei der

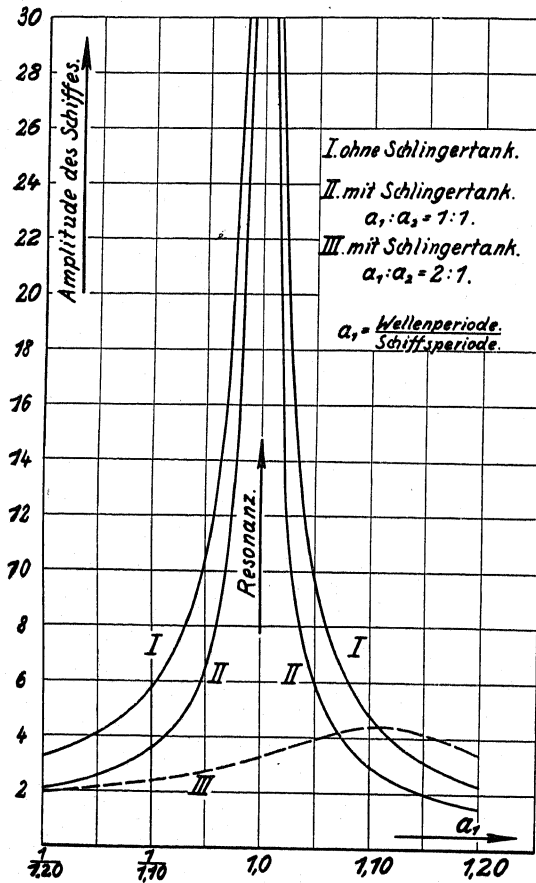


Abb. 5.
Resonanzfunktion bei Reibungskoppelung.

$$\alpha_1 = \frac{\text{Wellenperiode}}{\text{Schiffsperiode (ungedämpft)}}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\text{Periode des Tankwassers (ungedämpft)}}{\text{Periode des Schiffes (ungedämpft)}}$$

Kurve I Schiff ohne Schlingertank;
 " II " mit Schlingertank, Abstimmung $\alpha_1/\alpha_2 = 1/1$;
 " III " " " " " $\alpha_1/\alpha_2 = 2/1$.

Abzisse bedeutet der Wert 1 die Resonanz von Welle und Schiff. Rechts hiervon schwingt die Welle schneller, links hiervon das Schiff schneller. Mit den Maßzahlen der Ordinate muß man die statische Neigung des Schiffes für den betreffenden Wellenimpuls multiplizieren, um den dynamischen Ausschlag zu bekommen. Ohne Schlingertank erhält man die normale Resonanzkurve I. Sie läuft bei Resonanz ins Unendliche. Haben wir einen mit dem Schiff abgestimmten Tank, so erhalten wir Kurve II. Sie ist ähnlich der Kurve I, liegt aber tiefer. Trotz-

dem läuft sie ebenfalls ins Unendliche, d. h. der Tank versagt bei Resonanz. Allerdings muß die Resonanz schärfer sein, wenn sie gefährlich werden soll. Kurve III ist gezeichnet für dieselbe Größe des Tanks, wenn dieser gegen das Schiff im Verhältnis 1 zu 2 verstimmt ist, d. h. wenn das Tankwasser doppelt so schnell schwingt wie das Schiff. Diese Kurve ist viel günstiger, denn die Resonanzerscheinung ist verschwunden und die Amplitude erreicht nie mehr große Werte.

Abb. 6 zeigt die Kurve III mit vergrößerten Ordinaten und zusammengedrängten Abscissen, so daß wir ein weiteres Gebiet überblicken. Wir erkennen bei dem Werte 1 die

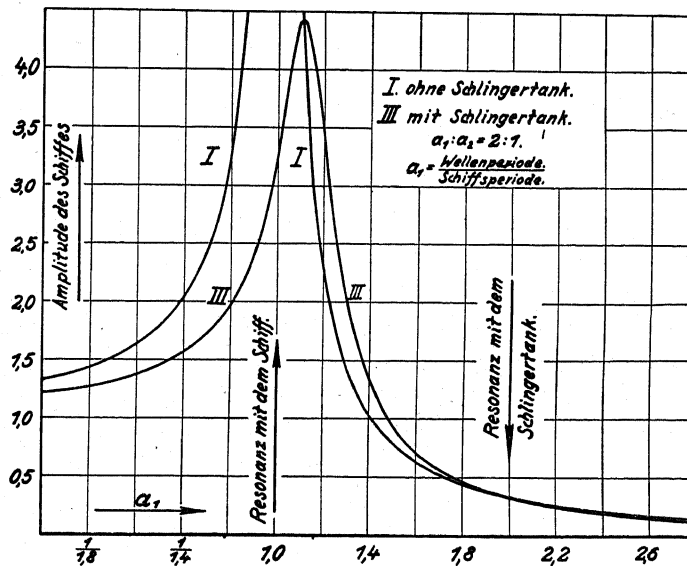


Abb. 6.

Resonanzfunktion bei Reibungskoppelung.

Kurve I Schiff ohne Schlingertank;
 „ III „ mit Schlingertank, Abstimmung $a_1/a_2 = 2/1$.

Resonanz mit dem Schiffe und bei dem Werte 2 die Resonanz mit dem Tankwasser, das ja doppelt so schnell schwingt. Kurve I, die Resonanzfunktion ohne Schlingertank, ist zum Vergleich auch eingetragen. Man sieht jetzt, daß Kurve III ähnlich ist wie die Resonanzkurve einer gedämpften Schwingung, nur daß das Maximum gegen den Resonanzpunkt verschoben ist in Richtung nach der Eigenschwingung des Tanks. Bei der Resonanz mit dem Tankwasser tritt ein weiteres Maximum nicht auf. Es gibt eine günstigste Reibung, bei der die Resonanzkurve am niedrigsten bleibt, und diese ist annähernd dieselbe wie die günstigste Reibung, die aus dem einmaligen Anstoß in Abb. 4 gerechnet wurde.

Für den Bau von Schlingertanks ergibt sich daraus die Folgerung, daß die bisherige, mühsame Abstimmung von Schiff und Tank nicht nur unnötig, sondern falsch war. Man muß eine Verstimmung zwischen beiden von wenigstens 20 % anstreben. Dagegen muß die Reibung in den Drosselventilen genau eingestellt werden und am besten regulierbar sein, um den Tank völlig ausnützen zu können.

Bisher haben sich die Schlingertanks auf Schiffen gut bewährt. Dies liegt wohl daran, daß eine genaue Abstimmung zwischen Schiff und Tank nicht möglich ist, weil sich die Schwingungszeit des Schiffes mit der Ladung ändert. Sollte aber zufällig einmal genaue Resonanz zwischen Schiff, Schlingertank und Seegang gleichzeitig eintreten, so müßte der Schlingertank versagen und das Schiff plötzlich sehr stark schlingern. So soll z. B. «Deutsch-

land», deren Tankquerschnitt in Abb. 2 dargestellt ist, plötzlich stark geschlingert haben, obwohl der Tank angestellt war. Diese Erscheinung verschwand nachher wieder. Vielleicht lag hier ein derartiger Resonanzfall vor. Jedenfalls beugt man solchen Versagern am besten durch eine absichtliche Verstimmung zwischen Schiff und Tank vor.

Für die praktische Verwendung meiner Rechnung muß ich darauf hinweisen, daß ich die Reibung proportional der Geschwindigkeit gesetzt habe. In Wirklichkeit geht aber die Flüssigkeitsreibung mit einer höheren Potenz (etwa der 1,5). Dies macht bei den prinzipiellen Ergebnissen nichts aus, aber bei der Bestimmung der Reibungs-Konstanten muß man vorsichtig sein, da sie eine Funktion der Amplitude wird. Auch der Rückdruck des austretenden Strahles bei dem angebauten Tank und die Druckhöhe des Wassers im Tank, die beide proportional v^2 sind, kann man in diese sogenannte „Reibungskonstante“ hereinwerfen.

Ferner nahm ich an, daß die Schwingungsmittelpunkte von Schiff und Tankwasser zusammenfallen. Bei den neuen Ausführungen, wo die Wasseroberfläche im Tank etwa dieselbe Höhe hat wie die Wasserlinie, ist diese Forderung recht gut erfüllt. Sollten Differenzen vorhanden sein, so ergeben sich dadurch Koppelungsglieder proportional der Beschleunigung, welche kleine Korrekturen notwendig machen. Da nun FRAHM nur die Beschleunigungskoppelung ohne Reibung berechnet hat, so können diese Arbeiten von FRAHM bei der Korrekturrechnung verwendet werden. Damit decken wir den Unterschied zwischen meiner und der FRAHM'schen Rechnung auf. Denn die Glieder der Beschleunigungskoppelung erscheinen im Nenner der Gl. (3) als $+d^2 N^4 + (d \cdot b + \dots)$, wenn d die Beschleunigungskoppelung mißt. Setzt man nun $b = 0$, so wird $A = 0$ für $\alpha_2 = 0$; wird aber b groß, so kann A sehr groß werden, wenn nicht d^2 sehr groß ist, was bei den neuen Ausführungen sicher nicht der Fall ist.

Doch möchte ich betonen, daß ich die Verdienste von FRAHM für die Ausbildung des Schlingertanks voll anerkenne. Aber die theoretische Darstellung von FRAHM ist offenbar nicht ausreichend, und da sie in die neueren Bücher der Mechanik übernommen wurde, so möchte ich dies hier klarstellen.

Genau wie einst A. FÖPPL bei dem Schiffskreisel, dessen Gleichungen sehr ähnlich aufgebaut sind, auf die Wichtigkeit der Energiezerstreuung durch eine Bremse hingewiesen hat, so muß ich heute von dem Schlingertank sagen: Die Reibung ist das Wichtigste und Ausschlaggebende. Man darf sie in den Gleichungen nicht einfach vernachlässigen, sonst kommt man zu Trugschlüssen.

Sur l'application de l'asservissement à la stabilisation des navires

Par H. Beghin (Lille) et P. Monfraix (Paris)

Du point de vue mathématique, le problème de la stabilisation des navires se confond avec la recherche des termes qu'il convient d'introduire dans l'équation du roulis pour que l'amplitude des oscillations qu'elle représente se trouve réduite.

Un stabilisateur doit donc introduire, soit des *forces d'inertie* auxiliaires (par exemple, stabilisation gyrostatique), soit des *forces extérieures* nouvelles: Les seules forces dont on puisse disposer sont les forces dues à la *pesanteur* (Déplacement de poids à bord) et les *résistances hydrodynamiques*. Nous ne retenons que les deux premières méthodes, qui ont d'ailleurs fait leurs preuves. La dernière est peu intéressante, ne serait-ce que par l'influence nuisible que le stabilisateur ne manquerait pas d'exercer sur la vitesse du bâtiment.

Si, se plaçant à un point de vue plus élevé, on introduit la notion d'*énergie*, il apparaît que, pour stabiliser, il faut, ou bien empêcher l'énergie de la houle de se communiquer au navire, ou bien absorber cette énergie au moyen d'une source négative. S'inspirer uniquement de la première méthode conduirait à priver le bâtiment de toute défense lorsqu'il se trouverait dérangé de sa position normale. Ce serait le cas d'une stabilisation par allongement pur et simple de la période de roulis: une source négative d'énergie est indispensable.

Mais, pour donner à un dispositif toute son efficacité, il est essentiel que le déplacement de masses aussi considérables soit parfaitement discipliné, de sorte que l'asservissement de la position de l'élément mobile qui constitue le stabilisateur aux circonstances de l'oscillation du navire paraît être la seule méthode à retenir.

I. Stabilisation par déplacement transversal de poids

Un navire de poids P_1 porte un stabilisateur de poids p ($P_1 + p = P$); soient I_1 et i les moments d'inertie du bâtiment et du stabilisateur par rapport à l'axe d'oscillation Ox . ($I_1 + i = I$). Le stabilisateur est supposé à liaisons complètes: les coordonnées x et y de l'un quelconque m de ses éléments par rapport à des axes Ox , Oy liés au bâtiment dans un plan transversal sont des fonctions d'un paramètre u

$$x = f(u); y = \varphi(u),$$

que nous pouvons supposer être l'abscisse du centre de gravité du stabilisateur, l'ordonnée étant v , fonction de u :

$$\Sigma m f(u) = \frac{p}{g} u; \quad \Sigma m \varphi(u) = \frac{p}{g} v.$$

Dans la position normale d'équilibre, u est supposé nul, ainsi que $\frac{dv}{du}$; $\frac{d^2v}{du^2}$ représente la courbure $\frac{1}{R}$ de la trajectoire du centre de gravité du stabilisateur.

Le centre de gravité total pour $u = 0$ a une ordonnée a , le métacentre a une ordonnée r ; posons

$$P(r - a) = K^2 I. \quad \dots \dots \dots (1)$$

Φ désignera l'escarpement de la houle, ω sa pulsation, γ le coefficient de M. BERTIN.

Nous allons étudier les petites oscillations du système au moyen des équations de Lagrange:

La force vive $2T$ a pour expression

$$2T = I\theta'^2 + \Sigma m(f'^2 + \varphi'^2)u'^2 + 2\Sigma m(f\varphi' - \varphi f')u'\theta',$$

où θ' et u' désignent les dérivées, par rapport au temps t de l'angle de roulis θ et du paramètre u . En première approximation, on peut faire $u = 0$ dans les coefficients de cette expression.

Cela posé, remarquons que, si on élève le stabilisateur de la quantité h , l'expression $\Sigma m(f\varphi' - \varphi f')$ s'accroît de $-\Sigma m f' h$ ou $-\frac{p}{g}h$; si donc h désigne la hauteur du stabilisateur au-dessus de la position qui annule $\Sigma m(f\varphi' - \varphi f')$, on a

$$2T = I\theta'^2 + Hu'^2 - 2\frac{p}{g}hu'\theta'. \quad \dots \dots \dots (2)$$

Le travail virtuel des forces actives pour un déplacement $\delta\theta, \delta u$ est

$$\frac{P}{u'}\delta u + P(r-a)(\nu\Phi\sin\omega t - \theta)\delta\theta - p\left(\theta + \frac{u}{R}\right)\delta u - pu\delta\theta;$$

(P , puissance développée à bord pour assurer l'avertissement du stabilisateur).

L'équation relative au paramètre θ

$$I\theta'' - \frac{p}{g}u'' + pu + P(r-a)\theta = P(r-a)\nu\Phi\sin\omega t, \quad \dots \dots \dots (3)$$

donne le mouvement de roulis; l'autre, relative au paramètre u donne la puissance P à mettre en jeu:

$$P = u'\left[-\frac{p}{g}u'' + Hu'' + p\left(\theta + \frac{u}{R}\right)\right]; \quad \dots \dots \dots (4)$$

supposons le paramètre u asservi à l'angle de roulis θ par une relation de la forme

$$pu = A\theta'' + B\theta' + C\theta, \quad \dots \dots \dots (5)$$

où A, B, C sont des constantes.

L'équation (3) fait alors connaître la loi de variation de θ . L'étude de l'oscillation forcée donne pour u , lors du synchronisme ($\omega = K$), l'amplitude U_0 définie par

$$pU_0 = \frac{P(r-a)}{1 + K^2\frac{h}{g}}\nu\Phi. \quad \dots \dots \dots (6)$$

Il est remarquable que cette valeur soit indépendante des coefficients A, B, C , de sorte que, si la houle synchrone est de celles qu'on est appelé à rencontrer, il est impossible de donner au stabilisateur un poids inférieur à celui que définit la relation (6) où U_0 désigne l'amplitude maximum dont on dispose à bord.

On est alors conduit à chercher la condition que doivent remplir les constantes A, B, C pour que l'amplitude maximum de u soit justement réalisée lors du synchronisme; elle se traduit par la relation

$$[(C - AK^2)^2 + B^2K^2]\frac{h}{g} - I(C - AK^2) = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

Or le système peut agir uniquement par son poids (équ. (3), terme $p u$), ou aussi par son inertie (équ. (3), terme $-\frac{p h}{g} u''$). Dans le premier cas, il y a intérêt à profiter de toute la largeur du bâtiment, c'est-à-dire que la surcharge doit pouvoir se concentrer tout entière sur un bord ou sur l'autre (chariot mobile sur un chemin de fer transversal, surcharge liquide). Dans ce premier cas, h représente la hauteur du chemin de fer au-dessus de l'axe d'oscillation. La formule (6) montre qu'il y aurait quelque intérêt à augmenter h , pour profiter des forces d'inertie, mais cet avantage risque d'être un peu illusoire en raison des inconvénients inhérents à l'installation d'un dispositif de ce genre au-dessus du pont, en particulier de l'immobilisation d'une surcharge inactive dans les superstructures.

En outre, le coefficient de stabilité $P (r - a)$ se trouverait diminué si les surcharges se trouvaient au-dessus du métacentre différentiel. Négliger h permet d'ailleurs de vérifier l'équation (7) en annulant A et C , ce qui simplifie la relation d'asservissement et par suite l'appareillage électrique qui est chargé de l'assurer.

Si un dispositif utilise en partie les forces d'inertie, s'il comprend par exemple des masses en rotation alternative, la hauteur h ne se confond plus avec v ; il y a alors tout intérêt à augmenter h , ce qui ne présente aucun des inconvénients signalés; mais il y a lieu de remarquer que dans ce cas on ne profiterait pas de toute la largeur du bâtiment pour les variations de u .

Etudions un dispositif du premier genre, avec

$$u = b \frac{d\theta}{dt}, \quad h = 0. \quad \dots \dots \dots (8)$$

Déterminons son poids p par la condition d'être susceptible de stabiliser le bâtiment sur toute houle d'escarpement donné Φ_0 .

Si L est l'amplitude maximum dont on dispose à bord pour u , p est défini par

$$p L = P(r - a) v \Phi_0. \quad \dots \dots \dots (9)$$

Sur une houle d'escarpement Φ , le mouvement sera défini par

$$\frac{\omega^2}{K^2} \frac{d^2 \lambda}{dT^2} + \beta \frac{\omega}{K} \frac{d\lambda}{dT} + \lambda = \sin T, \quad \dots \dots \dots (10)$$

où l'on a posé

$$\theta = \lambda v \Phi; \quad T = \omega t; \quad \beta = b K \frac{v \Phi_0}{L}. \quad \dots \dots \dots (11)$$

L'amplitude Λ des oscillations forcées de λ et l'amplitude U de u sont données par

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \beta^2 \frac{\omega^2}{K^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{K^2}\right)^2; \quad \frac{U}{L} = \beta \frac{\omega}{K} \frac{v \Phi_0}{v \Phi_0}. \quad \dots \dots \dots (12)$$

Pour tout escarpement Φ inférieur ou égal à Φ_0 , le stabilisateur se meut entre les limites qui lui sont permises, *quelle que soit la période de la houle*.

Le degré de stabilisation, qu'on peut caractériser par la valeur de $\frac{1}{\Lambda}$, peut être pris aussi grand qu'on le veut sans qu'on ait à augmenter le poids de la surcharge; il suffit de pouvoir augmenter le coefficient β , ce qui n'intéresse que l'appareillage électrique.

La puissance à mettre en jeu est donnée par la relation (4) qui s'écrit ici

$$P = p b \frac{d^2 \theta}{dt^2} \left(\frac{b}{g} \frac{d^3 \theta}{dt^3} + \frac{b}{R} \frac{d\theta}{dt} + \theta \right). \quad \dots \dots \dots (13)$$

Cette expression a pour période la moitié de la période de la houle; ses deux premiers termes, purement sinusoïdaux, sont sans efficacité pour la stabilisation; le troisième qui est en quadrature avec les deux premiers, est *essentiellement négatif*, ce qui met en évidence l'absorption d'énergie. Il y a intérêt à se débarrasser des deux premiers; on annulera donc $\omega^2 - \frac{g}{R}$, au synchronisme, en donnant à la trajectoire du centre de gravité une courbure telle que le stabilisateur, *livré à lui-même*, ait la même période propre que la houle. Pour les autres valeurs de ω , ces termes sinusoïdaux seront demandés à un organe élastique réglable (ressorts, compression d'air).

Ce résultat est conforme à la théorie des phénomènes de *résonnance secondaire*: dans un appareil récepteur de T.S.F., par exemple, formé d'un primaire et d'un secondaire, parfaitement accordés sur l'onde à recevoir, le primaire passe toute son énergie au secondaire, si bien qu'il devient impossible de recevoir sur le primaire: le bâtiment, le stabilisateur, la houle jouent respectivement les rôles du primaire, du secondaire, de l'onde à recevoir.

Cet accord étant supposé réalisé, la puissance oscille entre zéro et

$$P_m = -p b \Lambda^2 (\nu \Phi)^2 \omega^2 = \frac{-K^3 I \nu^2 \Phi_0^2}{\beta} \frac{U^2}{L^2}.$$

On voit que, pour une houle synchrone, circonstance dans laquelle $\frac{U}{L}$ a sa valeur maximum $\frac{\nu \Phi}{\nu \Phi_0}$, la puissance maximum mise en œuvre diminue et tend vers zéro à mesure que β augmente, c'est-à-dire à mesure que la stabilisation est plus parfaite. Ce phénomène n'est paradoxal qu'en apparence, car l'énergie communiquée par la houle diminue et le mouvement du stabilisateur devient exactement celui qu'il aurait s'il était libéré.

Etude plus complète

On serrera le problème de plus près en introduisant les résistances hydrodynamiques de moment $\frac{3}{4} N I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$, en tenant compte de l'arrêt de la surcharge en fin de course pour les valeurs exagérées de $\frac{d\theta}{dt}$ et de l'oscillation libre qui renaît constamment du fait de la variation des constantes de la houle.

Pour cette étude, il nous a paru commode d'effectuer la transformation

$$x = \lambda; \quad y = \frac{\omega}{K} \frac{d\lambda}{dT}; \quad \text{avec } T = \omega t; \quad \theta = \lambda \nu \Phi, \quad \dots \dots \dots (14)$$

L'équation du mouvement est alors

$$y \frac{dy}{dx} + x = -f(y) + \sin T, \quad \dots \dots \dots (15)$$

en posant, pour $|\beta \nu \Phi y| < \nu \Phi_0$,

$$f(y) = \beta y + \varepsilon \frac{3}{4} N \nu \Phi y^2; \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon y > 0;$$

et pour $|\beta \nu \Phi y| > \nu \Phi_0$ (surcharge bloquée),

$$f(y) = \frac{\nu \Phi_0}{\nu \Phi} + \varepsilon \frac{3}{4} N \nu \Phi y^2; \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon y > 0.$$

Les courbes en x et y se tracent alors facilement, en figurant la courbe $x = -f(y)$ et remarquant que le premier membre de l'équation (15) représente l'abscisse du point N où la normale au point $M(x, y, T)$ de la courbe rencontre l'axe des x . On remarquera enfin que l'arc MM' décrit dans le temps ΔT a pour valeur $\frac{K}{\omega} MN \Delta T$. La figure 1 montre l'aspect de l'une de ces courbes. Elles mettent en évidence l'existence d'un régime quasi permanent représenté, pour la houle synchrone, sensiblement par un cercle. Cette remarque nous permet de déterminer approximativement les circonstances du mouvement de la surcharge mobile et de calculer l'amplitude de cette oscillation de régime permanent:

Supposant la formule approchée $\lambda = \Lambda \cos T$, l'instant T_1 où la surcharge est en fin de course est défini par

$$\Lambda \beta v \Phi \sin T_1 = v \Phi_0; \quad \dots \dots \dots (16)$$

l'équation (1) multipliée par dx et intégrée de $T = 0$ à $T = \pi$ conduit à la relation

$$N \frac{v^2 \Phi_0^2}{\beta^2 \sin^2 T_1} + v \Phi_0 \left(\frac{T_1}{\sin T_1} + \cos T_1 \right) = v \Phi \frac{\pi}{2}; \quad \dots \dots \dots (17)$$

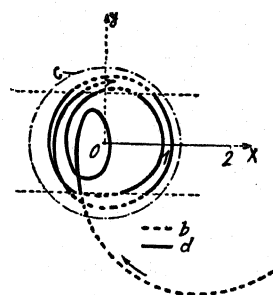


Fig. 1.

b: Surcharge bloquée
d: Surcharge en mouvement
c: Asymptote

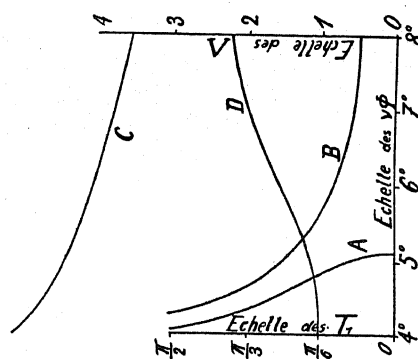


Fig. 2.

Courbe A: Valeurs de T_1 sans stabilisateur
Courbe B: Valeurs de T_1 avec stabilisateur
Courbe C: Valeurs de Λ sans stabilisateur
Courbe D: Valeurs de Λ avec stabilisateur

La figure 2 donne les variations de Λ et de T_1 déduites de ces deux équations.

Pour de grandes valeurs de β et des valeurs de $v \Phi$ nettement supérieures à $v \Phi_0$, on obtient une amplitude $\Theta = \Lambda v \Phi$ indépendante de β ,

$$N \Theta^2 = v \Phi \frac{\pi}{2} - 2 v \Phi_0.$$

Il n'y a donc pas intérêt, dans ce cas, à augmenter le coefficient d'asservissement β . La mise en route du stabilisateur se fera avec une valeur faible de β ; on la fera croître ensuite progressivement à mesure que l'effet stabilisateur se manifestera.

L'équation (8) de l'asservissement sera réalisée électriquement, la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ étant matérialisée par un petit gyro à axe horizontal rappelé vers une position d'équilibre normale à la ligne de foi du navire par un couple réglable d'origine électromagnétique. Ce dispositif indique très fidèlement la vitesse angulaire du roulis surtout si l'on prend soin de le soustraire au tangage. Le réglage du couple réalise les diverses valeurs du coefficient d'asservissement β . Les girations ont un effet négligeable, comme le montre leur étude.

II. Stabilisation par inertie gyrostatique

Nous ne ferons qu'effleurer ce sujet: les axes de deux gyros identiques, de même moment cinétique H , peuvent évoluer en sens contraire dans le plan de symétrie du bâtiment. La bissectrice de leur angle reste orientée suivant la ligne de pente de ce plan malgré le tangage. Cet angle 2γ est lié à l'angle de roulis par la relation d'asservissement

$$\sin \gamma = \beta \frac{KI}{2H} \theta.$$

Une liaison élastique réglable relie les deux gyros l'un à l'autre, ce qui permet d'économiser la puissance à mettre en jeu en profitant de la résonance secondaire. L'équation du roulis est alors identique à l'équation (10), et l'étude du dispositif peut se calquer sur la précédente, avec cette différence essentielle que ce sont les valeurs exagérées de θ et non de $\frac{d\theta}{dt}$ qui bloquent les gyros en fin de course, et que, d'autre part, leur action, dans cette position, s'annule rigoureusement.

Le degré de stabilisation $\frac{I}{\Lambda}$, pour les valeurs de β inférieures à $\sqrt{2}$ est inférieur à 1; il augmente avec β et $\frac{\omega}{K}$ pour $\beta > \sqrt{2}$, tout en restant voisin de 1 pour les houles à longue période.

0,85 étant adopté comme valeur limite de $\sin \gamma$, β doit être inférieur à $\frac{1,7 H}{KI\sqrt{\Phi}}$, si l'on veut éviter le blocage; H doit donc valoir au moins $\frac{KI\sqrt{\Phi}\sqrt{2}}{1,7}$.

Si l'on donne au système formé par les deux gyros et le lien élastique qui les unit une période propre égale à celle de la houle, la puissance à mettre en jeu à chaque instant est essentiellement négative: — $\beta KI \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$; mais le gain provenant de la résonance secondaire est beaucoup moins important que dans le premier problème.

Gekoppelte Torsions- und Biegungsschwingungen von Tragflügeln

Von H. Blenk, Berlin-Adlershof

(Hiezu Tafeln VII und VIII)

Schwingungen an Tragflügeln sind in den letzten Jahren wiederholt beobachtet worden. Schon während des Krieges traten an den weichen einholmigen Unterflügeln der sogenannten Anderthalbdecker Schwingungen auf und führten gelegentlich zu Brüchen. Besonders gefährdet sind jedoch die freitragenden Flügel, die seit Kriegsende besonders in Deutschland wegen ihrer aerodynamischen Vorteile vielfach gebaut werden. Die aerodynamischen Vorteile der freitragenden Bauart werden aber bekanntlich stark eingeschränkt, wenn nicht gar aufgehoben durch den Mehraufwand an Gewicht, den diese Bauart verlangt. Dabei ist dieser Mehraufwand an Gewicht nicht etwa aus reinen Festigkeitsgründen erforderlich, sondern zum großen Teil, um die Schwingungsgefahr zu vermindern. Wann diese Gefahr wirklich vorliegt, und wie sie etwa zu vermeiden ist, darüber ist bisher nur wenig bekannt. Es ist selbstverständlich, daß die Gefahr mit zunehmenden Fluggeschwindigkeiten wachsen muß. Besonders für Kunst- und Jagdflugzeuge, die ihrer Endgeschwindigkeit (Sturzfluggeschwindigkeit) praktisch ziemlich nahe kommen, ist also die Untersuchung gefährlicher Schwingungen eine Lebensfrage; für diese Flugzeuge wird bei freitragender Bauart der erforderliche Mehraufwand an Gewicht so groß, daß die freitragende Bauart eigentlich keine Vorteile mehr bietet. Aus dieser Erkenntnis heraus geht man neuerdings für diese Bauaufgabe wieder mehr zur verspannten Doppeldeckerbauart über; ob mit Recht oder nicht, kann heute noch nicht entschieden werden. Jedenfalls kann man behaupten, daß die Schwingungsfrage in dem Konkurrenzkampf zwischen dem freitragenden Eindecker und dem verspannten Doppeldecker eine bedeutende Rolle spielen wird.

Mit den Schwingungserscheinungen an Tragflügeln haben sich bereits eine Reihe von Forschern befaßt. BIRNBAUM¹⁾ hat in seiner Göttinger Dissertation das ebene Problem des Schlagflügels auf Grund der PRANDTLschen Theorie untersucht und dabei theoretisch und experimentell nachgewiesen, daß ein Flügel vom Seitenverhältnis ∞ angefachte Schwingungen nur bei 2 Freiheitsgraden ausführen kann, nämlich wenn man eine Biegung und eine Torsion des Flügels zuläßt. Daß immer zwei Freiheitsgrade für das Auftreten angefachter Schwingungen notwendig sind, hat auch eine andere Untersuchung von v. BAUMHAUER und KONING²⁾ in der holländischen Versuchsanstalt für Luftfahrt gezeigt. v. BAUMHAUER und KONING betrachten ein Flügel-Querrudersystem; der Flügel von endlicher Spannweite schwingt starr um seine Spannachse, das Querruder um die Ruderachse. Die theoretische und experimentelle Untersuchung zeigt, daß dieses System angefachte Schwingungen ausführen kann. Die Schwingungen verschwinden, sobald einer der beiden Freiheitsgrade gebunden wird. Es ist ein Fall bekannt, wo nach Verstärkung der Querruder solche Schwingungen aufgetreten sind und zum Bruch des Flügels geführt haben. Weiter sind von SCHEUBEL³⁾ in Aachen Untersuchungen über Schwingungen des Systems Flügel-Höhenleitwerk, sowie über das Flattern des Leitwerks über-

¹⁾ BIRNBAUM, Das ebene Problem des schlagenden Flügels, Göttinger Dissertation 1922; s. auch Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1923, S. 290 und 1924, S. 277.

²⁾ v. BAUMHAUER und KONING, Onstabiele trillingen van een draagvlak-klap systeem, Verslagen en verhandelingen van den rijks-studiedienst voor de Luchtvaart Amsterdam, Deel II — 1923.

³⁾ SCHEUBEL, Schwingungserscheinungen des Segelflugzeugs Rheinland, Berichte u. Abhandlung d. Wissensch. Gesellsch. f. Luftfahrt 1925, S. 103. — Ueber das Leitwerkflattern und die Mittel zu seiner Verhütung, Berichte u. Abh. d. Wiss. Ges. f. Luftfahrt 1926.

haupt angestellt worden. Neuerdings hat REISSNER⁴⁾ Untersuchungen über die erforderliche Torsionssteifigkeit freitragender Flügel angestellt. Er stellt die Bedingungen für die statische Torsionsstabilität bei über die Spannweite konstantem und veränderlichem Torsionsmodul auf. Die Untersuchungen, über die ich heute berichten will, habe ich gemeinsam mit F. LIEBERS⁵⁾ bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt durchgeführt. Sie befassen sich mit den Torsions- und Biegungsschwingungen des freitragenden Flügels an sich, also ohne Berücksichtigung der Querruder. Auch diese Art von Schwingungen sind in der Praxis beobachtet worden, einmal 1923 an einem Segelflugzeug in der Rhön, ferner an einem deutschen Sportflugzeug mit halbfreitragendem Flügel⁶⁾.

Zunächst will ich ganz kurz die Theorie beschreiben, die wir uns von dem Vorgang gemacht haben (Abb. 1). Die Biegungsschwingungen des freitragenden Flügels stellen wir

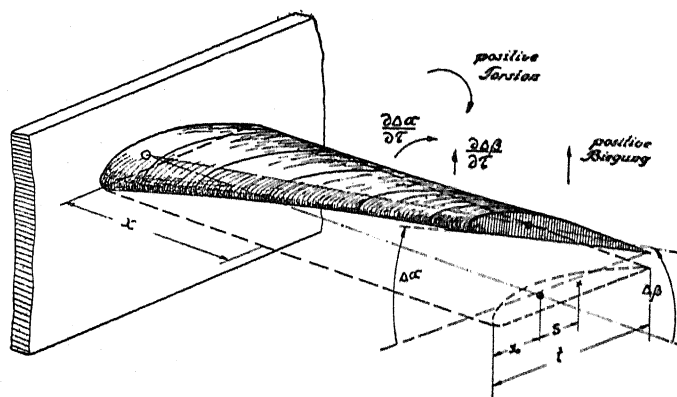


Abb. 1. Vereinfachtes Bild der Torsions- und Biegungsschwingungen eines freitragenden Flügels.

uns als eine einfache Drehschwingung um die Einspannachs vor. Die rückführende elastische Kraft sei proportional dem Ausschlagwinkel $\Delta\beta$. Die Torsion des Flügels bestehe in einer Verdrehung um eine feste Achse, die sogenannte elastische Achse. Sie ist definiert als die Achse, in der man die Belastung anbringen muß, um reine Biegung zu erhalten. Das rückführende Moment sei wieder proportional dem Verdrehungswinkel pro Längeneinheit $\partial\Delta\alpha/\partial x$. Weiter berücksichtigen wir die innere elastische Dämpfung, indem wir sowohl für Biegung als auch für Torsion ein weiteres Glied proportional der Geschwindigkeit der Verbiegung, bezw. der Torsion ansetzen. Die Luftkräfte und -momente entnehmen wir den bekannten Windkanalmessungen, abhängig vom Anstellwinkel des Querschnitts und vom Seitenverhältnis des ganzen Flügels. Dieser Ansatz wird solange berechtigt sein, als der Windweg während einer Schwingung des Flügels groß gegenüber der Flügeltiefe ist. Für eine genauere Theorie müßte man die Luftkräfte gemäß der PRANDTLschen Tragflügeltheorie einführen, wie es BIRNBAUM getan hat. Der wirksame Anstellwinkel, der für die Luftkräfte maßgebend ist, ist gleich dem geometrischen Anstellwinkel, vergrößert um zwei Glieder, die von der Biegungs- und der Torsionsschwingung herrühren. Biegt sich der Flügel nach oben durch, so ist der wirksame Anstellwinkel während der Verbiegung kleiner als der geometrische. Wird der Flügel nach größeren Anstellwinkeln hin verdreht, so ist während der Verdrehung der wirksame Anstell-

⁴⁾ REISSNER, Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt (ZFM) 1926, S. 137 und 179.

⁵⁾ BLENK und LIEBERS, Gekoppelte Torsions- und Biegungsschwingungen von Tragflügeln, ZFM 1925, S. 479 und 1926, S. 286.

⁶⁾ RAAB, Flügelschwingungen an freitragenden Eindeckern, ZFM 1926, S. 146.

winkel größer als der geometrische, sobald die elastische Achse vor der Mitte des Flügels liegt, was praktisch immer der Fall ist. Auf diese Weise vermitteln die Luftkräfte eine Koppelung zwischen der Biegungsschwingung und der Torsionsschwingung in den Dämpfungsgliedern. Eine weitere Koppelung entsteht aber durch Massenkräfte, wenn nämlich Schwerachse und elastische Achse nicht zusammenfallen. Ist die Biegungsschwingung nach oben beschleunigt, so bewirkt die hinter der Drehachse gelegene Masse des Flügels infolge ihrer Trägheit eine Verdrehung nach größeren Anstellwinkeln hin. Ebenso bewirkt eine Beschleunigung der Torsionsschwingung infolge der Trägheit der Massen eine positive Verbiegung. Die Gleichungen für die Biegungs- und die Torsionsschwingung enthalten also eine Koppelung in den Beschleunigungs- und den Dämpfungsgliedern, außerdem eine einseitige Koppelung in den Kraftgliedern, da die Luftkräfte von dem Winkel der Verdrehung abhängen, aber nicht von dem Winkel der Biegung.

Wir erhalten so zwei simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösungen wir proportional $e^{-\lambda t}$ ansetzen. Für λ ergibt sich eine Gleichung vierten Grades. Soll Stabilität herrschen, so müssen die Wurzeln dieser Gleichung positiv sein, oder, falls sie komplex sind, positiv reellen Teil besitzen. Die Bedingungen dafür sind, daß die Koeffizienten der Gleichung und die ROUTHsche Diskriminante positiv sind. Einer der Koeffizienten bedeutet die statische Torsionsstabilität, die REISSNER in seiner vorher erwähnten Arbeit allein betrachtet. Es entsteht nun die Frage, welche von den Bedingungen maßgebend ist.

Zur Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse sind also eine ganze Reihe von Zahlenangaben über Flugzeugflügel erforderlich: Gewicht, Trägheitsmomente, Schwerpunkt, elastische Achse, die elastischen Konstanten der Biegung und der Torsion, der Biegungsdämpfung und der Torsionsdämpfung. Von einigen dieser Werte weiß man heute noch nichts. Mit den zu ihrer Bestimmung erforderlichen Versuchen ist in den letzten Wochen bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt begonnen worden. Ein deutsches Flugzeugwerk stellte in sehr zuvorkommender Weise zwei Flügel eines halbfreitragenden Hochdeckers für die ersten Untersuchungen zur Verfügung (Abb. 2). Das betreffende Flugzeug war zuerst mit dem unbeplankten Flügel ausgerüstet und geriet mehrmals bei großen Geschwindigkeiten in Schwingungen, die in einem Falle sogar zu Flügelbruch führten. Daraufhin wurde der Flügel mit Sperrholz beplankt. In der neuen Ausführung sind keine Schwingungen wieder beobachtet worden. Es ist also besonders interessant, daß gerade diese Flügel untersucht werden konnten.

Ich will nun der Reihe nach auf die einzelnen Versuche und deren Ergebnisse eingehen.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes um eine zu den Holmen parallele Achse geschah durch Pendelversuche. Die Dämpfung der Schwingungen war dabei so klein, daß sie ohne Bedenken vernachlässigt werden konnte. Das Trägheitsmoment um die Einspannachse wurde rechnerisch aus der ziemlich genau bekannten Massenverteilung über die Spannweite ermittelt. Sodann wurde der Flügel in einem fest fundamentierten Eisengerüst eingespannt (s. Abb. 3 und 4). Die Einspannung wurde an den Originalbeschlägen entsprechend der Einspannung am Flugzeug ausgeführt. Die Einspannung entspricht allerdings nicht genau den Voraussetzungen unserer Theorie. Am Flugzeug und an unserem Prüfstand ist der Flügel auf zwei Punkten gelenkig gelagert, für die Theorie nehmen wir eine starre Einspannung an dem äußeren Lagerpunkte an. Zunächst wurden nun statische Belastungen des Flügels vorgenommen und die Durchbiegungen gemessen (s. Abb. 3). Die Belastungen wurden immer in Einzellasten an den Holmen oder an einem über den Flügel gelegten Balken angebracht. Die elastische Achse wurde durch Belastung des Vorderholms und Hinterholms mit dem gleichen Gewicht ermittelt. Es zeigte sich, daß die elastische Achse praktisch parallel den Holmen läuft. Beim unbeplankten Flügel teilte die elastische Achse die Entfernung Vorderholm-Hinterholm (600 mm) im Ver-

hältnis 248 : 352, beim beplankten Flügel im Verhältnis 225 : 375. Die Schwerachse des Flügels lag in beiden Fällen rund 12 cm hinter der elastischen Achse. Aus den Belastungsversuchen erkennt man, daß das Maß der Verbundwirkung der Holme für den beplankten Flügel wesentlich größer ist als für den unbeplankten Flügel. Bei dem unbeplankten Flügel hängt der Verdrehungswinkel wesentlich von der Angriffsstelle des Moments ab, bei dem beplankten Flügel dagegen nicht. D. h. die Torsionsbeanspruchung wird bei dem unbeplankten Flügel zum großen Teil als Biegung in den Holmen aufgenommen, während der beplankte Flügel als homogener Körper für die Torsion betrachtet werden kann. Dieser Punkt ist in unserer Theorie unberücksichtigt geblieben; er ist aber sicher nicht unwesentlich. Wir werden nachher sehen, wie die dadurch entstehenden Schwierigkeiten vermieden werden.

Die Versuchseinrichtung für die eigentlichen Schwingungsversuche besteht in einem schweren Bock (s. Abb. 4), der am äußeren Ende des Flügels aufgestellt ist. Er trägt auf beiden Seiten Trommeln, über die ein Papierstreifen von etwa 1 m Länge in rund 3 Sekunden abrollt. Auf diese Trommeln schreiben Vorder- und Hinterkante des Flügels ihre Bewegung auf. Eine Stimmgabel von 16 Schwingungen pro sec gibt die Zeiteichung, ein am Bock befestigter Zeiger die Nulllinie, für den Fall, daß der umlaufende Papierstreifen sich verschiebt. Die Trommeln werden durch einen Elektromotor in Umdrehung versetzt. Um die Gleichzeitigkeit auf beiden Papierstreifen festzustellen, wurde eine Leitung mit zwei hintereinander geschalteten Funkenstrecken so angelegt, daß beide Funken das Papier an einer bestimmten Stelle gleichzeitig durchschlagen müssen. Die Auslösung der Flügelschwingungen geschah durch Belastung des Flügels und Abbrennen des Aufhängefadens mittels einer Lötlampe (Abb. 5 und 6). Die Biegunlast greift direkt an der elastischen Achse an. Die Torsionsbelastung wird der Einfachheit halber am Hinterholm angebracht, während die elastische Achse am Flügelsende in einem Kugellager fest gelagert wird. Ich will gleich hier erwähnen, daß bei reiner Biegunbelastung des Flügels sofort infolge der Massenwirkung (Schwerachse hinter elastischer Achse) gekoppelte Schwingungen entstehen. Um reine Biegun- und reine Torsionsschwingungen zu erhalten, haben wir durch Anbringen von Zusatzgewichten den Schwerpunkt in die elastische Achse verlegt. Die Zusatzgewichte ändern lediglich Masse und Trägheitsmomente des Flügels, die elastischen Eigenschaften bleiben unverändert. In den Abb. 7—12 zeigen die ersten beiden Reihen direkt die Aufzeichnungen der beiden Schreibstifte an der Vorder- und Hinterkante des Flügels. Aus beiden läßt sich die Biegung der elastischen Achse (3. Reihe) und die Torsion um diese (4. Reihe) leicht berechnen. Bei dem unbeplankten Flügel sind die Schwingungsdauern von Biegung und Torsion nahezu gleich, bei dem beplankten Flügel schwingt die Torsion fast doppelt so schnell als die Biegung. Durch die Verlegung der Schwerachse in die elastische Achse konnten bisher nicht ganz reine Biegun- oder Torsionsschwingungen erzeugt werden. Vielleicht liegt das daran, daß sowohl der Biegunmodul als auch die Biegunsdämpfung veränderlich über die Tiefe des Flügels ist. Es hat den Anschein, als könnte man weit vor der Vorderkante eine parallele Achse finden, um die der Flügel sich bei diesen Biegunsschwingungen dreht. Die Torsionsschwingungen klingen schneller ab als die Biegunsschwingungen. Beim beplankten Flügel zeigen die Ausschläge der vorderen Meßstellen eine merkwürdige Abflachung der sonst fast sinusförmig verlaufenden Schwingung. Die Vermutung liegt nahe, daß der Flügel sich wegen der gewölbten Sperrholzdecke auf der Saugseite nach oben schwerer durchbiegt als nach unten. Durch einen statischen Versuch wurde diese Vermutung bestätigt. Bei gleicher Belastung biegt sich der beplankte Flügel nach unten um rund 20 % mehr durch als nach oben. Aus dem Abklingen der Schwingungen ergibt sich nun in einfacher Weise, wie die innere elastische Dämpfung der Biegung und Torsion sich verhält. Es ergibt sich das immerhin überraschende Resultat, daß

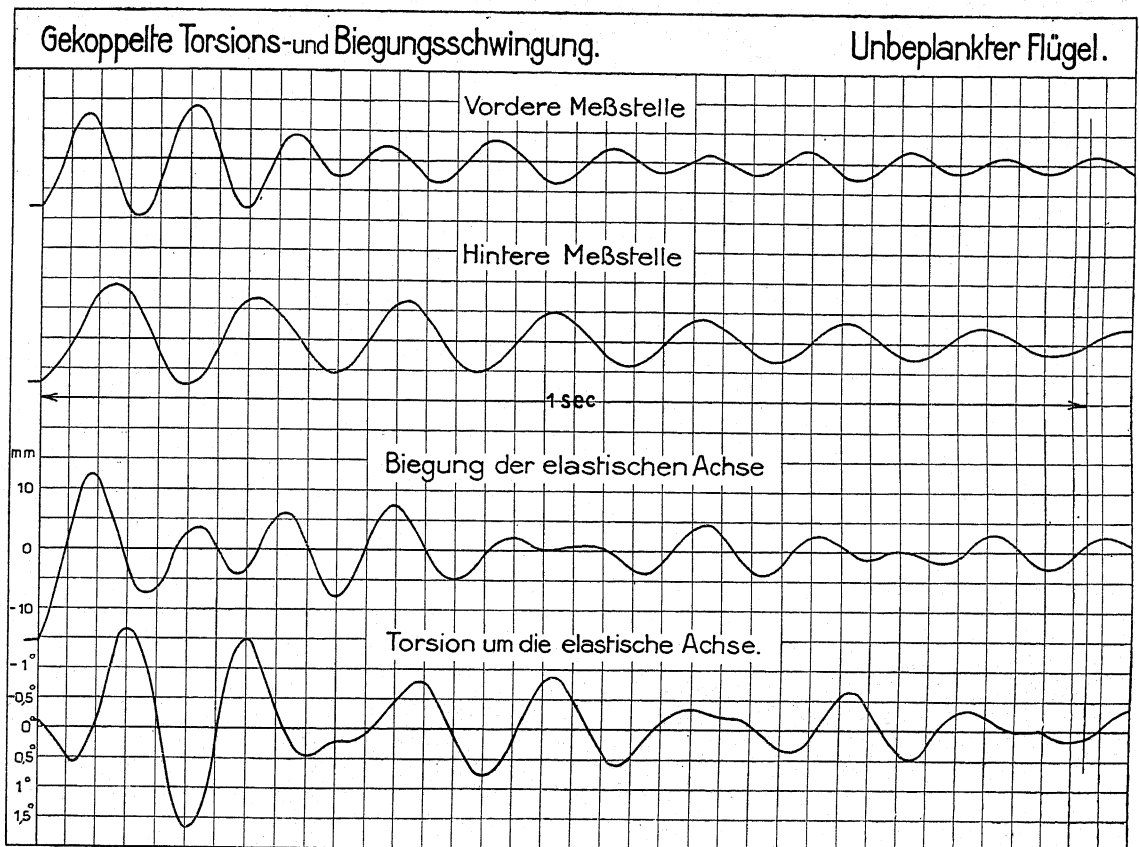


Abb. 7. Gekoppelte Schwingungen des unbeplankten Flügels.

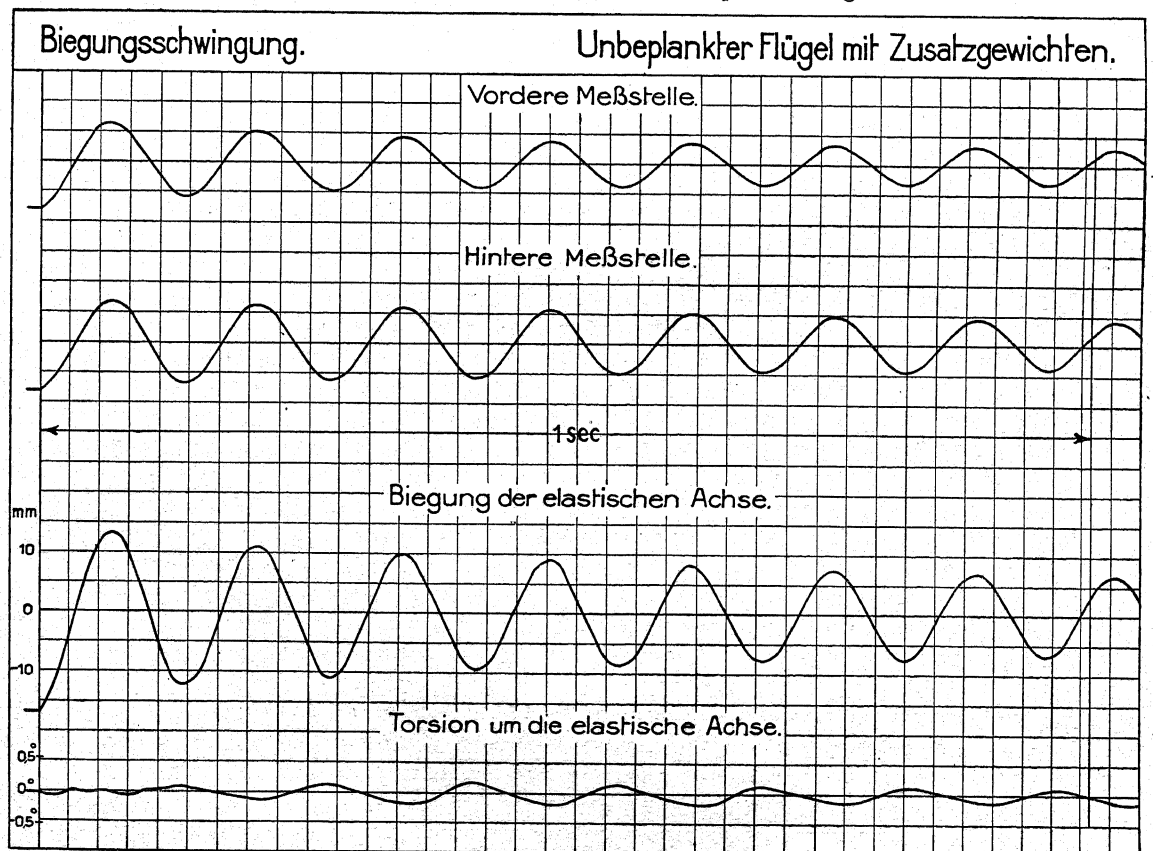


Abb. 8. Biegungsschwingungen des unbeplankten Flügels mit Zusatzgewichten.

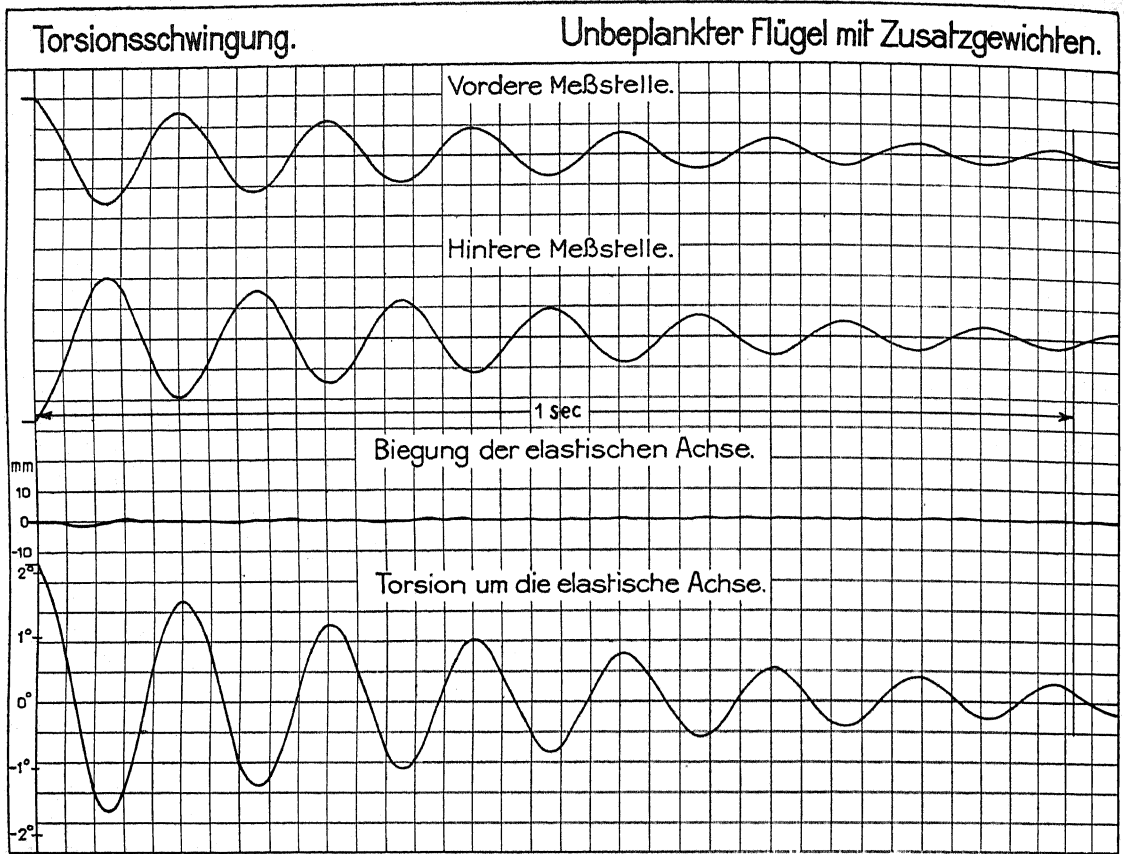


Abb. 9. Torsionsschwingungen des unbeplankten Flügels mit Zusatzgewichten.

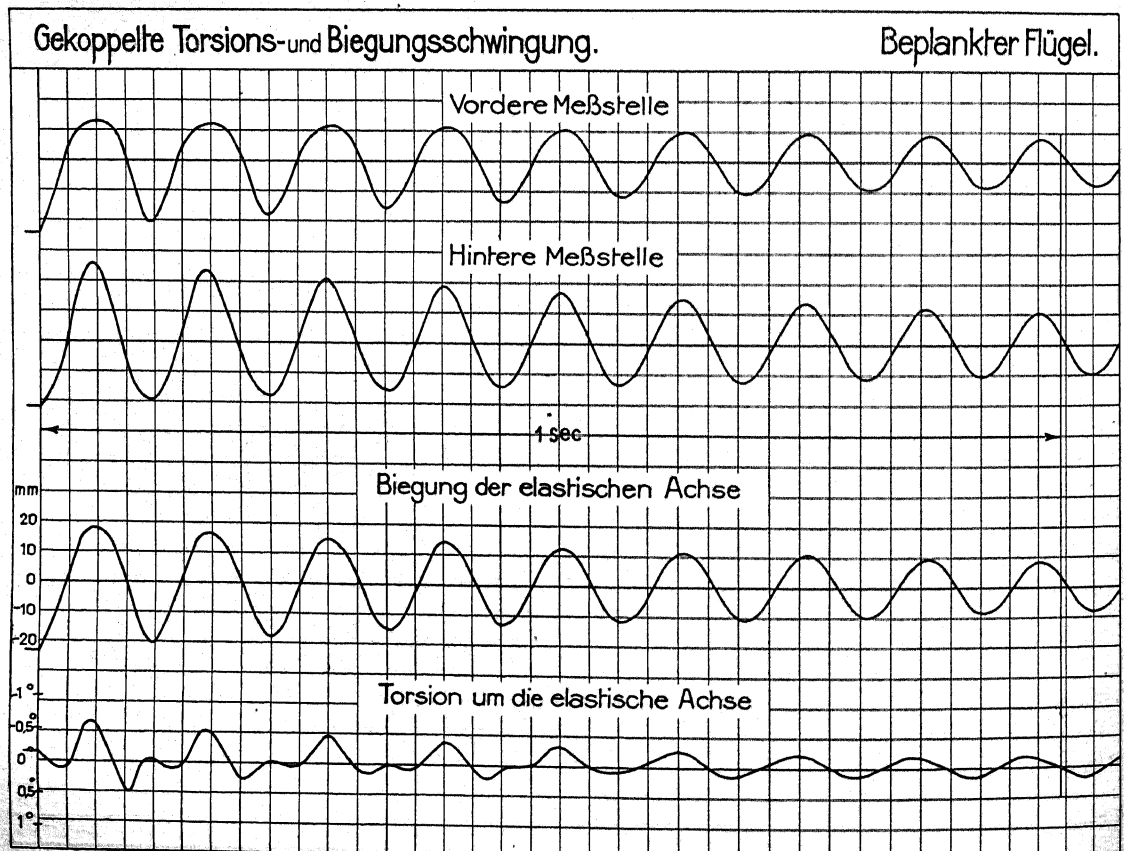


Abb. 10. Gekoppelte Schwingungen des beplankten Flügels.

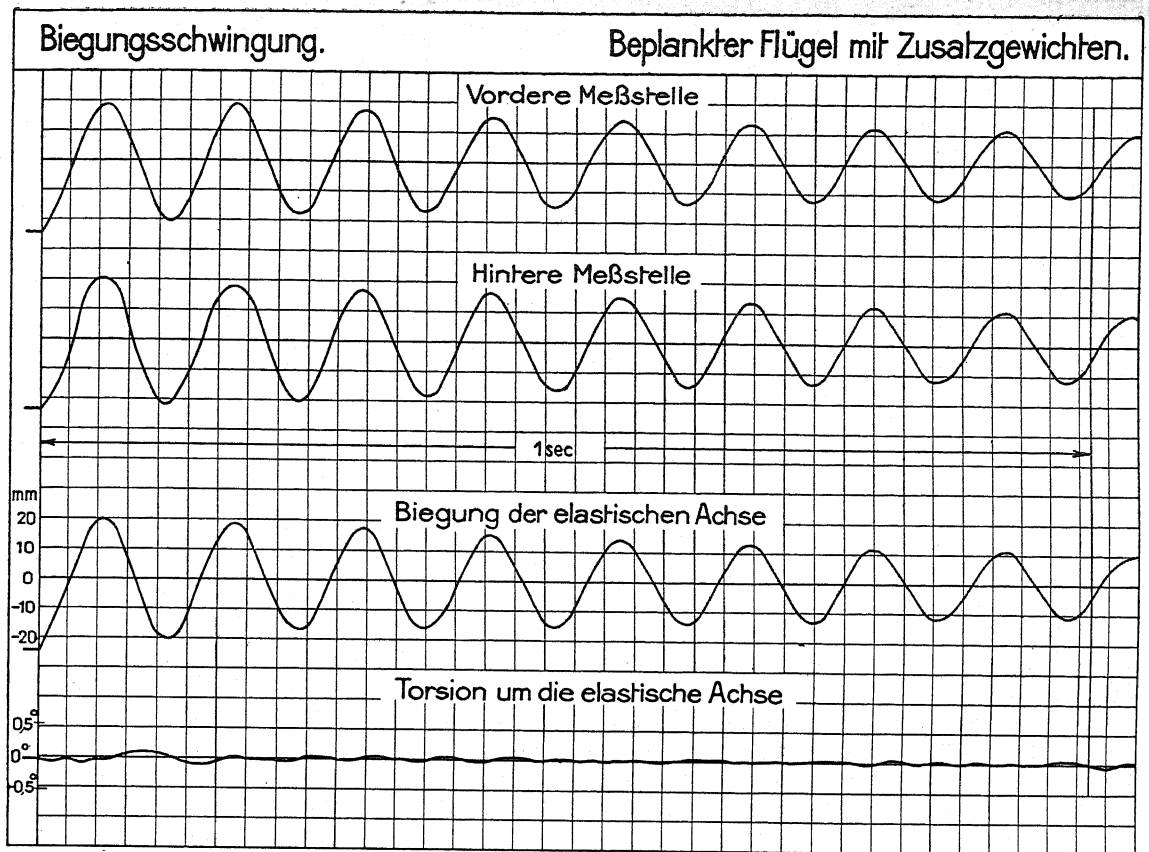


Abb. 11. Biegungsschwingungen des beplankten Flügels mit Zusatzgewichten.

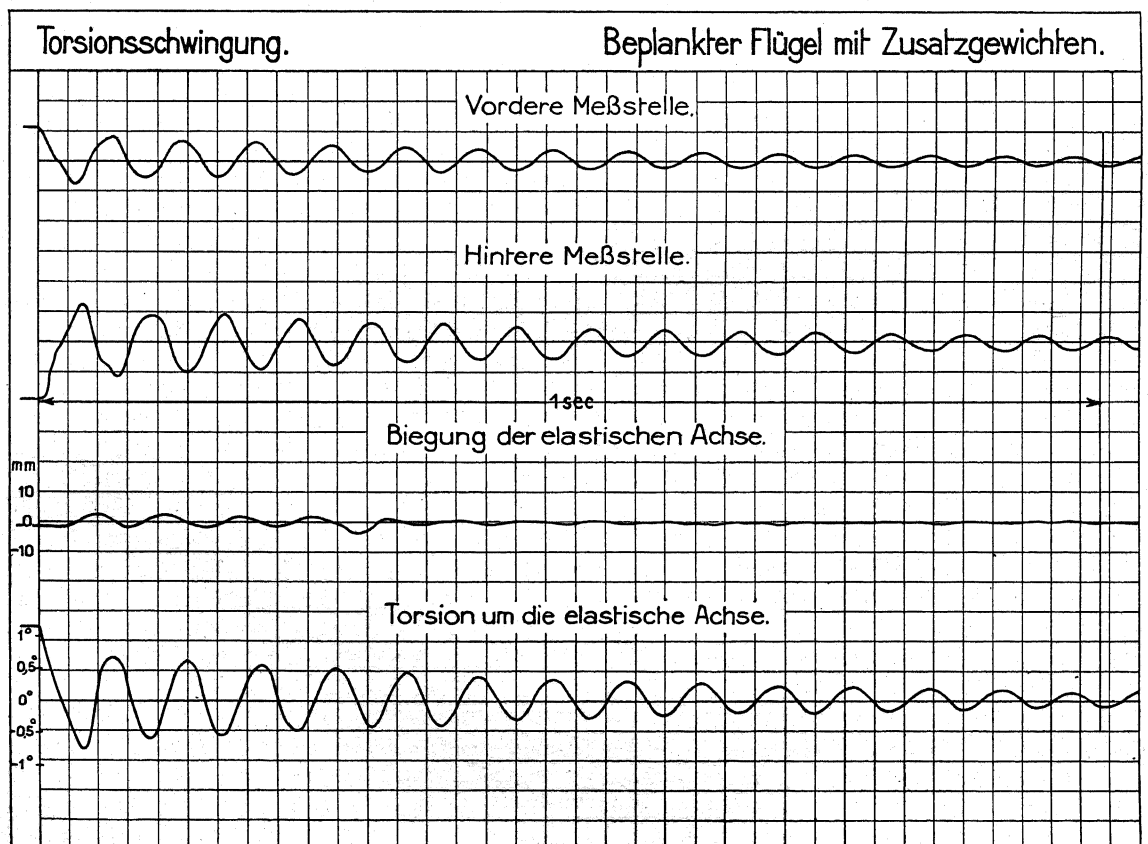


Abb. 12. Torsionsschwingungen des beplankten Flügels mit Zusatzgewichten.

beide Dämpfungen für den unbeplankten und den beplankten Flügel ungefähr gleich groß werden. Die Werte des Biegungs- und des Torsionsmoduls (in übertragenem Sinne) können wir nun sowohl aus der statischen Durchbiegung als auch aus der Schwingungsdauer bestimmen. Wählt man den ersteren Weg, so entstehen wegen der verschiedenartigen Verbundwirkung beider Flügel große Schwierigkeiten besonders bei der Ausrechnung des Torsionsmoduls. Der andere Weg vermeidet diese Schwierigkeit. Da wir zur Ausrechnung dieselben Gleichungen benutzen (nur Luftkräfte = 0), in die wir die Werte nachher wieder einsetzen, so erhalten wir also unsere Konstanten aus den Schwingungsversuchen gerade so gemittelt, wie wir es brauchen. Wir brauchen uns um die Frage der Verbundwirkung nicht zu kümmern. Ein Vergleich zeigt überdies, daß die tatsächlich gemessenen Biegungslinien sich mit den aus den Schwingungsversuchen berechneten Linien nahezu decken. Dasselbe gilt von der Torsion, wenn man die Torsionslinien bei weit außen angreifendem Momente zugrunde legt.

Mit Hilfe der so ermittelten Werte wurden die Stabilitätsbedingungen unter bestimmten Annahmen abhängig von der Geschwindigkeit berechnet (Abb. 13 und 14). Es zeigte sich

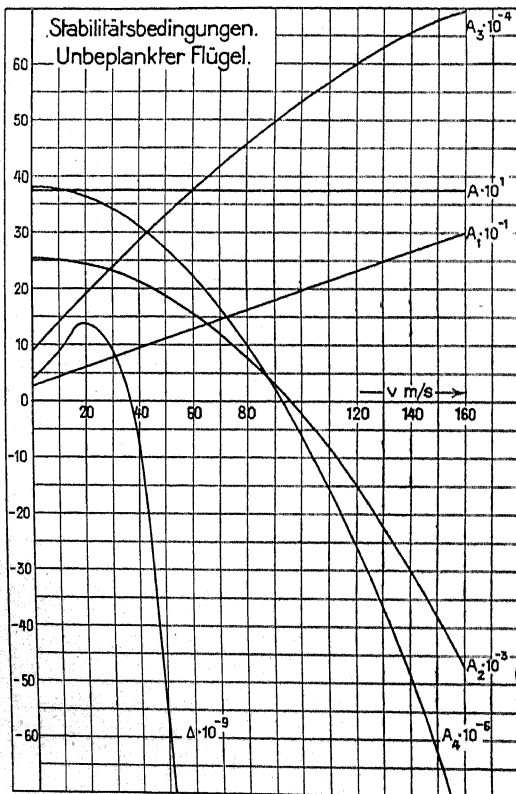


Abb. 13.

Stabilitätsbedingung für den unbeplankten Flügel.

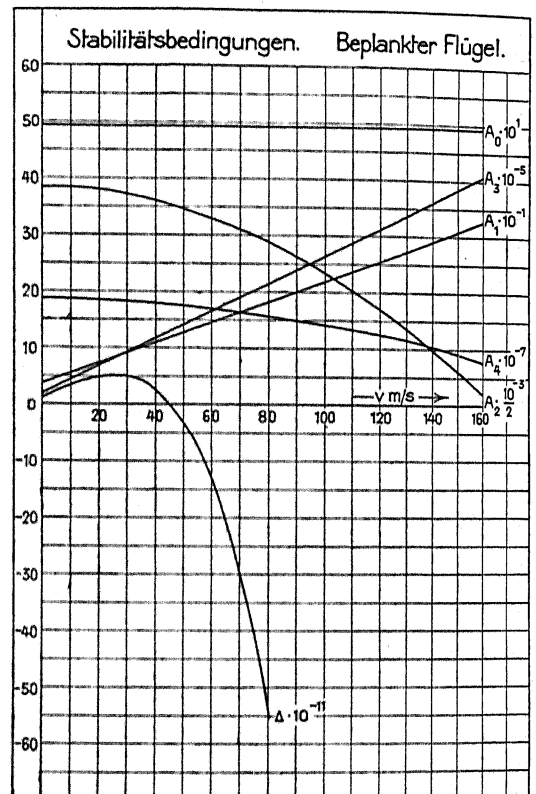


Abb. 14.

Stabilitätsbedingung für den beplankten Flügel.

bisher in allen Fällen, daß die ROUTHSCHE Diskriminante zuerst durch Null geht, also für die dynamische Stabilität maßgebend ist. Unsere Hoffnung, daß die verhältnismäßig einfache statische Stabilitätsbedingung ausschlaggebend sein würde, was auch REISSNER bisher angenommen hat, hat sich also nicht erfüllt. Die dynamische Instabilität beginnt bei weit geringeren Geschwindigkeiten als die statische. Der unbeplankte Flügel wird bei ungefähr 93 m/sec Geschwindigkeit statisch instabil, aber schon bei 37 m/sec Geschwindigkeit dynamisch instabil. Für den beplankten Flügel liegen dieselben Zahlen bei 209 und 46 m/sec. Die kritischen Geschwindig-

keiten für die dynamische Stabilität erscheinen etwas klein *). Woran das liegt, konnte wegen der Kürze der Zeit noch nicht festgestellt werden. Es kann sein, daß die Vernachlässigung der abgehenden Wirbel nicht mehr ganz zulässig ist. Beim beplankten Flügel beträgt der Windweg während einer Torsionsschwingung nur noch wenige Flügeltiefen, so daß der Ansatz der Luftkräfte aus den normalen Windkanalmessungen sicher fehlerhaft ist.

Die Untersuchungen werden bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt sowohl theoretisch als auch experimentell weitergeführt. Zurzeit befindet sich bereits ein freitragender einholmiger Flügel auf dem Schwingungsprüfstand. Vielleicht lassen sich die Versuche auch auf Flügel mit beweglichem Querruder ausdehnen. Ohne Zweifel spielt ja das Querruder bei allen Flügelschwingungen eine große Rolle. Ueber die Beeinflussung der Torsionsschwingungen durch das Querruder ist noch nichts bekannt. Ferner ist der sicherlich sehr bedeutende Einfluß des Flügelumrisses noch zu untersuchen. Hier lassen sich vielleicht Wege zeigen, wie man freitragende Flügel verhältnismäßig leicht und doch sicher vor gefährlichen Schwingungen bauen kann. Das ist das eine Ziel unserer Arbeit. Das andere ist, für einen fertigen Flügel durch einfache Versuche festzustellen, bei welcher Geschwindigkeit gefährliche Schwingungen eintreten können.

*) Anm. b. d. Korrektur: Eine Kontrolle der Rechnung hat inzwischen ergeben, daß die kritischen Geschwindigkeiten für beide Flügel etwas höher liegen. Der unbeplankte Flügel wird bei 39 m/sec., der beplankte bei 58 m/sec. dynamisch instabil, was mit der Wirklichkeit besser übereinstimmen wird.

Eine ausführlichere Darstellung der in diesem Vortrage mitgeteilten Untersuchungen ist in einem demnächst in der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt erscheinenden Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt zu finden.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

B. SEKTION II
MECHANIK FESTER KÖRPER

Vorsitzende in den Sitzungen die Herren
Taylor-Cambridge, Biezeno-Delft, Beggs-Princeton,
Huber-Lemberg, Pöschl-Prag

Die geometrische Strukturtheorie der Materie

Von K. Weissenberg, Berlin-Dahlem

Die aus Röntgenanalysen von Kristallen gewonnenen Erfahrungen stehen zum Teil in Widerspruch mit den üblichen, für Dampf und Lösung ausgebildeten stereochemischen Anschauungen, sie erfordern die Aufstellung einer universellen, d. h. alle Aggregatzustände erfassenden Stereochemie resp. Stereophysik. Diese konnte hypothesenfrei nur im Rahmen einer rein geometrischen Beschreibung aller möglichen Atomkonfigurationen erreicht werden. Dabei erwies sich die Symmetrie als diejenige rein geometrisch definierte Eigenschaft der Atom-anordnungen, durch welche auch ihr dynamischer Aufbau (und so die physikalischen bzw. chemischen Eigenschaften der Materie) in allen Aggregatzuständen gesetzmäßig bestimmt ist.

Die *geometrische Grundlage* einer universellen Strukturtheorie der Materie wurde durch ein Tabellenwerk gegeben, welches erschöpfend alle möglichen Atomkonfigurationen nach ihrer Symmetrie geordnet aufzählt.

Zur Verbindung der Geometrie mit der Physik bzw. Chemie wurden folgende zwei Gesetze streng abgeleitet.

I. *Die symmetrischen Konfigurationen sind stets durch Extremwerte der potentiellen Energie (d. h. als Maxima, Minima oder Sattelpunkte) ausgezeichnet*, wobei Minima der potentiellen Energie die bei hinreichend tiefen Temperaturen stabilen Konfigurationen kennzeichnen.

II. *Gleichwie alle Dynaden Δ ¹⁾ einer Atomkonfiguration K Teile derselben sein müssen, so sind auch ihre Symmetriegruppen Σ_K Teile, d. h. Untergruppen, der Symmetriegruppe Σ_Δ von K — der dynamische Aufbau von K aus Δ kann somit quantitativ aus der Zerlegung von Σ_K in ihre Untergruppen abgeleitet werden; er ist durch diese bestimmt.*

Wir diskutieren den Kristall- und Molekülbau nunmehr einheitlich und benützen für diesen Zweck das genannte Tabellenwerk als geometrische, die Sätze I und II als physikalisch-chemische Grundlage.

Wir unterscheiden also die materiellen Objekte nach ihrer Symmetriegruppe Σ_{III} , Σ_{II} , Σ_I und Σ_0 , je nachdem diese 3, 2, 1 oder 0 voneinander linear unabhängige Translationen enthält.

Objekte der Symmetriegruppe Σ_{III}

a) Kristallbau.

Die erschöpfende Zusammenstellung aller Kristall-Symmetrien (230 Raumgruppen) war bereits von A. SCHOENFLIESS und v. FEDOROW angegeben. Sie wurde ergänzt durch Berücksichtigung aller in jeder Kristall-Symmetrie enthaltenen Dynaden-Symmetrien. Hinsichtlich ihres dynamischen Aufbaues konnten wir so 822 einfache und ca. 10,000 zusammengesetzte Kristall-Typen — Hauptpunktgitter — unterscheiden. Diese vermitteln den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Kristallbau, Atomanordnung und chemischen bzw. physikalischen Eigenschaften.

Die größten Dynaden im Kristall werden Bausteine, bzw. je nachdem sie 0, 1, 2 oder 3 Translationen zulassen, als Mikro-, Ketten-, Netz- oder Raumgitterbausteine bezeichnet. Die Mikrobausteine im Kristall entsprechen den AVOGADROSCHEN Molekülen der dampfförmigen und flüssigen Phase. Während die Avogadrosche Hypothese für Dampf und Lösung die Anzahl

¹⁾ Unter einer Dynade verstehen wir eine Atomgruppe, in welcher jedes Atom durch stärkere Kräfte an sie gebunden ist, als an alle nicht in ihr enthaltenen Atommengen.

der Moleküle bzw. Ionen pro reduzierte Volums-Einheit als eine universelle Konstante darstellt, kann durch eine parallele Hypothese für den festen Zustand folgendes ausgesagt werden:

III. *Die Anzahl der Mikrobausteine ist in den verschiedenen Kristallen für den als Volumseinheit gewählten Elementarkörper i. a. verschieden, für jeden bestimmten Gittertypus jedoch ist sie eine universelle Konstante, welche in dem genannten Tabellenwerk für jeden Gittertypus angegeben ist.*

Dieser Satz wurde bei zirka 400 Substanzen experimentell geprüft und ausnahmslos bestätigt.

Ein Vergleich der Avogadroschen, d. h. durch seine Hypothese bestimmten Moleküle in Dampf und Lösung mit den Mikrobausteinen des Kristalls (bestimmt nach Satz III) ergab folgendes: Beim Uebergang von Dampf zu Lösung und von einer Lösung zur anderen zeigen die Avogadroschen Moleküle für die Substanz charakteristische Polymerisations-, Dissoziations- und Isomerie-Erscheinungen. *Im Rahmen dieser Mannigfaltigkeit stellen die Mikrobausteine der Kristalle in allen Modifikationen keine neue Atomkonfiguration vor, sie sind vielmehr bereits in irgendeinem Dampf oder Lösungszustand der Substanz präformiert.*

Der innere Zusammenhalt der Atome im Molekül und damit die chemischen Eigenschaften der Substanz ändern sich daher beim Uebergang von einer Phase (Dampf, Lösung, Schmelze, Kristall) zu einer beliebigen anderen kontinuierlich und in sehr beschränktem Maße. Der äußere Zusammenhalt — die Kohäsionskräfte — zwischen den Mikrobausteinen und ihre daraus bedingte Anordnung ändern sich hingegen beim Uebergang von einer amorphen Phase (Dampf, Lösung, Schmelze) zum Kristall und umgekehrt diskontinuierlich; dementsprechend variieren hier die physikalischen Eigenschaften diskontinuierlich und in beträchtlichem Ausmaß. Der Kürze halber soll im Sinne des oben Gesagten von einer experimentell bewiesenen chemisch konstitutionellen Einheitlichkeit der Substanz in allen Aggregatzuständen gesprochen werden, wobei aber ausdrücklich sowohl Polymerisation, Dissoziation wie auch Umlagerung in Isomeren zugelassen ist.

Wir sagen also:

IV. *Die Materie zeigt in allen Aggregatzuständen eine chemisch konstitutionelle Einheitlichkeit.*

Die praktische Bedeutung des Tabellenwerkes im Zusammenhang mit den Sätzen I, II, III und IV liegt darin, daß nunmehr aus den Polymerisations- und Dissoziations-Erscheinungen einer Substanz in Dampf und Lösung der Kristallbau (Röntgenogramm) und seine Kohäsionsverhältnisse bis auf Alternativen vorausgesagt werden kann. Diese Voraussagen fanden ihre experimentelle Bestätigung. Eine wesentliche Einschränkung der Alternativen wurde dadurch erzielt, daß — auf Grund einfacher, modellmäßiger Vorstellungen — die Bauprinzipien sowie die Richtung stärkster Kohäsion angegeben werden konnte, nach welchen die Moleküle bzw. Ionen der Substanz in Dampf und Lösung zum Kristallverband zusammentreten. Für die Kristallisation unsymmetrischer Moleküle wurden so die folgenden Symmetrien als maßgebende Kristall-Bauprinzipien abgeleitet (Symmetrie-Zentrum und *digonale* Drehachse einerseits, digonale Schraubenachse und Gleitspiegelebene anderseits). Die beiden letzteren sind gleichzeitig die Richtungen stärkster linearer Kohäsion.

Es wurde ferner gezeigt, daß Spiegelebene und Translation zwischen zwei unsymmetrischen Molekülen unwahrscheinlich sind, was experimentell bestätigt wurde.

Für Molekül- und Radikalgitter konnten folgende Regeln formuliert werden:

V. *Molekül-Gitter: Die Symmetriegruppe eines Kristalls ist gleich der Kombination aus der Symmetrie eines Mikrobausteines mit der Symmetrie der genannten Bauprinzipien.*

VI. *Radikalgitter: Die Symmetriegruppe eines Kristalls ist gleich der Kombination aus den Symmetriegruppen seiner verschiedenen Mikrobausteine.*

b) *Mischkristalle.*

Definition und Systematik der Mischkristalle wird in gleicher Weise wie bei den Idealkristallen streng geometrisch auf der aufs Chemische erweiterten Symmetrielehre entwickelt. Dabei ergibt sich:

Für Mischkristalle sind als Symmetriegruppen nur die 230 Σ_{III} der Idealkristalle zulässig. Hinsichtlich ihres dynamischen Baues müssen sie jedoch nicht einem einzigen Kristalltypus — Hauptpunktgitter — eindeutig angehören, sie können vielmehr einem bestimmten Mischungsverhältnis mehreren Hauptpunktgittern derselben Σ_{III} entsprechen.

Die Haupt-Typen der Mischkristalle lassen sich systematisch aufzählen entsprechend dem Verhältnis des Hauptpunktgitters der reinen Komponente zu dem — im allgemeinen — gemischten Hauptgitter des Mischkristalls.

c) *Polykristalle.*

Wachstums- und Deformationsstrukturen. Analog wie oben werden die Definitionen und die Systematik streng geometrisch aus der auf statistische Anordnung erweiterten Symmetrielehre aufgebaut.

Objekte der Symmetriegruppe Σ_0

Molekülbau ²⁾.

Wir erörtern zunächst den Typus C_{a_4} : Auf die Frage, wie 4 gleiche Radikale a um ein Zentralatom — z. B. ein Methan C -Atom — gelagert sein können, gibt uns die erwähnte Tabelle Auskunft. Sie zeigt, daß ein reguläres Tetraeder nur dann realisiert sein kann, wenn der Substituent (d. h. a) eine dreizählige Symmetrie enthält. Die Tabelle läßt drei Typen — die tetraedrische, pyramidale und plane — Konfiguration zu. Von diesen wurde z. B. röntgenographisch die pyramidale bei $C(CH_2OH)_4$ vorgefunden. Aus den theoretischen Ueberlegungen und den experimentellen Befunden läßt sich folgendes formulieren:

VII. *Die Konfiguration des regulären Tetraeders ist selbst bei Methanderivaten mit vier gleichen Substituenten nicht universell.*

Diese — zunächst nur für den Kristallzustand gültige — Behauptung muß für alle Aggregatzustände ausgedehnt werden und zwar aus folgenden Gründen:

a) Bei Diskussion des Kristallbaues haben wir zwischen den Mikrobausteinen des Kristalls und den Molekülen in Dampf und Lösung einfache Gesetzmäßigkeiten festgestellt, sie alle müßten wir als rein zufällige Erscheinungen betrachten, wenn wir im Kristall verschiedene in den amorphen Phasen aber eine einzige universelle Anlagerungsmöglichkeit zulassen würden.

b) Die Kohäsionskräfte, welche — um beim Fall des Pentaerythrits zu bleiben — die Mikrobausteine im Kristall mit pyramidalen Konfiguration aufeinander ausüben, sind verhältnismäßig gering, d. h. nur ein paar Prozente der bei einer starken chemischen Bindung wirksamen Kräfte. Man wäre somit gezwungen, den verhältnismäßig schwachen Kräften bei der Kristallisation eine Wirkung (d. h. Ueberführung der tetraedrischen Konfiguration in die pyramidale) zuzuschreiben, die durch eine wesentlich stärkere in Dampf und Lösung nicht erreicht wird.

c) Wenn man aber selbst dieses Argument übergehen wollte, so müßte man doch zugeben, daß die in Dampf und Lösung angenommene Tetraeder-Konfiguration mit dem der Kristalli-

²⁾ Hier werden insbesondere die Abweichungen von der VAN T'HOFFschen Theorie der Methanderivate diskutiert.

sationswärme entsprechenden geringen Energieaufwand in die pyramidale übergeführt werden kann. Nun gilt aber für ein Gleichgewicht in Dampf und Lösung der Satz:

VIII. *Im Gleichgewicht kommt jede Konfiguration vom Energiegehalt E_n mit der relativen Häufigkeit $e^{-\frac{E}{KT}}$ vor.*

Da sich die Tetraeder-Konfiguration nur um einen kleinen Energiebetrag von der pyramidalen unterscheiden kann, müßte diese in Dampf und Lösung auch in merklicher Menge wie die tetraedrische vertreten sein und Satz VII ist damit für alle Aggregatzustände streng bewiesen.

Dadurch sind aber alle Methoden zur Bestimmung der Anzahl, Konstitution und Konfiguration von Isomeren unsicher geworden, welche auf der Hypothese des regulären Tetraeders beruhen; dem von uns vertretenen Standpunkt erwächst somit die Aufgabe, das Isomerieproblem für alle Aggregatzustände aus neuen Gesichtspunkten einheitlich zu entwickeln.

IX. *In den amorphen Phasen (Dampf, Lösung, Schmelze) stellt jedes isolierte Isomer einen metastabilen Zustand dar, da im Gleichgewicht stets sämtliche unter den betreffenden Verhältnissen stabile Modifikationen entsprechend ihrem Energie-Gehalte vertreten sein müssen.*

Im Kristallzustand ist hingegen die Isoliertheit des Isomers stabil.

Zur Bestimmung der Zahl und Art der isomeren Atomanordnungen haben wir Satz I bis VIII abgeleitet, mit diesen streng abgeleiteten Gesetzen läßt sich die Spiegelbildisomerie, Autoracemisierung und Waldhesche Umkehrung voraussagen. Die Sätze I bis VIII lassen es aber vollkommen offen, welche Atom-Konfigurationen stabil und welche instabil sind. Gerade die Entscheidung über die Stabilität der Konfigurationen bietet erst die Möglichkeit, die Anzahl und Art der zu erwartenden Isomeren zu berechnen. Diese Konkretisierung erfolgt durch folgende Regel, die jedoch kein Gesetz, sondern nur eine statistische Bevorzugung angeben soll:

X. *Von den, mit dem materiellen Inhalt einer Atomkonfiguration verträglichen Symmetrien entsprechen nur diejenigen Minimis der potentiellen Energie, bei welchen strukturell verschiedene Atome allgemeinste Lagen einnehmen und strukturell gleichwertige in geometrisch gleichwertige Lagen kommen.*

Mit dieser Aussage werden die Isomerien bei Methanderivaten vom Typus $C \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{Bmatrix}$ und $C \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$ auf eine Anzahl beschränkt, die im wesentlichen mit der nach der VAN T'HOFFschen Theorie zulässigen übereinstimmt.

Zum Gleitwiderstande des Kristalls

Von A. Ono, Fukuoka (Japan)

Der Vorgang der plastischen Formänderung, die der Einkristall unter der Wirkung äußerer Kräfte erleidet, wurde von mehreren Forschern untersucht ¹⁾; die strukturelle Veränderung wird heute von ihnen als die Folge der Gleitung und Drehung angesehen. Eigene Versuchsergebnisse an polykristallinen Proben bestätigen diese Behauptung ²⁾. Man hat also den Gleitwiderstand zu studieren, um Festigkeitseigenschaften des Materials klarzustellen. Die theoretische Berechnung des Gleitwiderstandes, die im folgenden mitgeteilt wird, wurde nach dem Energieprinzip, welches GRIFFITH ³⁾ bei seiner Untersuchung des Bruchwiderstandes angewendet hatte, ausgeführt. Sie bezieht sich auf ein einfaches Kristallmodell; ihr Ergebnis zeigt, daß der Gleitwiderstand keine Konstante ist; er wächst mit der Verkleinerung des Kristalls.

Es sei ein parallelepipedisches Kristallkorn von der Dicke eins vorgelegt (Abb. 1). Die Gleitfläche liege parallel zu der Grenzfläche, welche eine Netzebene des Kristalls vorstellt. Wenn der Kristall der Schubkraft P ausgesetzt ist, so tritt elastische Deformation des Gitters ein,

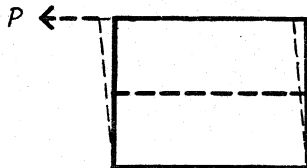


Abb. 1.

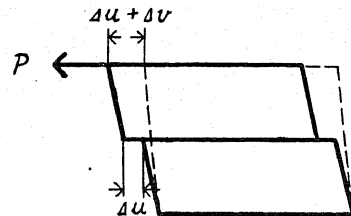


Abb. 2.

die im allgemeinen sehr klein ist. Bei einem genügend großen Betrag von P geschieht die Abgleitung nach der Art von Abb. 2. Der Zusammenhang zwischen P und der entsprechenden Verschiebung λ ist schematisch in Abb. 3 gezeigt, wo die Linie OA den Verlauf der elastischen Deformation des Gitters gibt. Wenn die Kraft P genügend groß wird, erfolgt die Gleitung. Wir nehmen an, daß die Kraft, die durch die Ordinate AA' dargestellt ist, während der Gleitung konstant bleibe, wie die Linie AB zeigt. Die Strecke AB besteht aus zwei Teilen AC und CB , wovon der erste Teil die Strecke Δu darstellt, die die Gleitfläche eines Kristallteils gegen die benachbarte Fläche des anderen Teils zurücklegt. Die Gleitung durch die Strecke Δu wird nun begleitet von Aenderung der Kornbegrenzung und der Spannungsverteilung, besonders auf der Gleitfläche. Folglich tritt wieder eine elastische Deformation des Gitters ein, und die wirkende Kraft hat noch eine weitere Strecke zurückzulegen, die durch den zweiten Teil Δv ausgedrückt wird. So ist die Arbeitsleistung der Kraft nach dem Beginn der Gleitung gleich $P (\Delta u + \Delta v)$ entsprechend der Fläche $ABB' A'$ in Abb. 3.

¹⁾ H. Mark, M. Polanyi und E. Schmid, Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen I—III, Zeitschrift f. Phys., 12, 1923, S. 58, 78 u. 111.

H. I. Taylor und C. F. Elam, The Distribution of an Aluminium Crystal during a Tensile Test, Proc. Roy., A, 102, 1923, S. 643.

²⁾ A. Ono, X-Ray Examination of Inner Structure of Strained Metals III—V, Memoirs of Coll. of Eng. Kyushu Imp. Univ., 3, 1924—1925, S. 195, 267 u. 287.

³⁾ A. A. Griffith, The Theory of Rupture, Proc. Int. Cong. for Applied Mechanics Delft, 1924, S. 55.

Es sei angenommen, daß die Verschiebung genügend langsam geschehe; dann ist die vorstehende Arbeit durch die Vermehrung der schwingenden Energie der Massenpunkte und die der potentiellen Energie des Gitters ausgeglichen. Nun ist die Arbeit $P \Delta u$ nötig, um die Gleitung ohne Deformation der Kristallteile herbeizuführen; sie geht in Schwingungsenergie der Massenpunkte über, weil Gitterverzerrung, die die Aenderung der potentiellen Energie andeutet, im zweiten Glied $P \Delta v$ eingeschlossen ist. Das erste Glied ist also der Zunahme der Wärmeenergie gleich zu setzen und es fällt aus der folgenden Berechnung weg. Die Zunahme der potentiellen Energie kann in zwei Gruppen geteilt werden; nämlich die Zunahme der Spannungsenergie ΔA und die der Oberflächenenergie ΔB . Dann ergibt sich aus der vorstehenden Betrachtung

$$P \Delta v = \Delta A + \Delta B . \quad \dots \dots \dots (1)$$

Wenn man annehmen darf, daß die Gitterverzerrung der Belastung proportional ist, so ist (wie in der klassischen Elastizitätstheorie) die Arbeitsleistung $P \Delta v$ doppelt so groß wie die Zunahme der Spannungsenergie, d. h.

$$\Delta A = \frac{1}{2} P \Delta v . \quad \dots \dots \dots (2)$$

Die Aenderung der Oberflächenenergie geschieht hauptsächlich auf der neuen Grenzfläche $2 \Delta u$, die durch die Gleitung mehr oder weniger vollkommen freigelegt ist. Es bezeichne T die mittlere Intensität der Flächenenergie, und man vernachlässige die Kanten- und Eckenenergie; dann ist die gesuchte Aenderung gleich $2 T \Delta u$, d. h.

$$\Delta B = 2 T \Delta u . \quad \dots \dots \dots (3)$$

Hier ist zu bemerken, daß T keine Konstante ist, weil die Flächenentblößung nicht immer so vollkommen ist, daß die Oberflächenschichten keine Kräftewirkung aufeinander ausüben

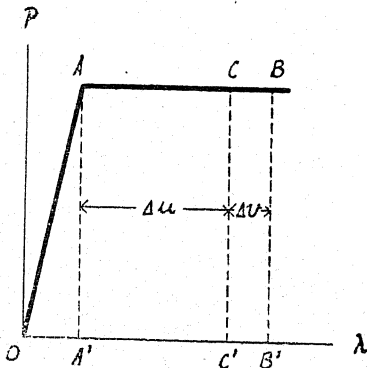


Abb. 3.

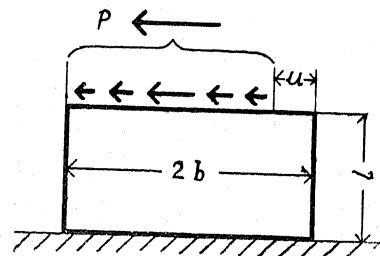


Abb. 4.

können. Ferner ist die Größe der neuen Oberfläche gleich $2 \Delta u$ gesetzt, und zwar in Hinsicht auf die Treppenbildung nach Abb. 2, aber es ist denkbar, daß die Gitterverwirrung im inneren Teil der Gleitfläche eine Aenderung der Oberflächenenergie an der betreffenden Stelle hervorruft*). Der Inhalt der Fläche, wo die Energieänderung auf diese Weise stattfindet, ist schwer zu bestimmen, aber er wächst wahrscheinlich mit dem Fortschreiten der Gleitung.

*) Die Bestimmung des Unterschieds zwischen Formänderungsarbeit und Wärmeenergie wurde von einigen Forschern ausgeführt⁴⁾. Ihre Versuchsergebnisse betr. das Verhältnis $\Delta v / (\Delta u + \Delta v)$ scheinen auf bedeutende Verwirrung der Gleitfläche hinzuweisen.

⁴⁾ H. Hort, Die Wärmevergänge beim Längen von Metallen, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, 41, 1907, S. 1.

W. S. Farren und G. I. Taylor, The Heat Developed during Plastic Extension of Metals, Proc. Roy. Soc., A, 107, 1925, S. 422.

Es folgt nun aus (1) bis (3)

$$\Delta A = 2 T \Delta u \quad \dots \dots \dots (4)$$

Um ΔA zu bestimmen, kann man die Berechnung der Spannungsenergie nach dem Verfahren der gewöhnlichen Elastizitätslehre ausführen. Von vornherein ist klar, daß die Energieänderung entsprechend der örtlichen Verwirrung der Gleitfläche schwer zu bestimmen ist, wie oben in bezug auf die Flächenentblößung bemerkt wurde. Auch wenn man von diesem Einflusse absieht, ist doch das Problem ziemlich willkürlich gestellt, weil die Kräfteverteilung an der Grenzfläche des Kristalls nicht genau bekannt ist. Schließlich ist noch zu bemerken, daß man eigentlich den ganzen Kristall auf einmal zu betrachten hat, daß aber eine Vereinfachung eingeführt wird, indem man jede Hälfte des Kristalls einzeln behandelt. Dieser Umweg vermag wenigstens qualitativ die von der Treppenbildung herrührende Störung zu veranschaulichen. So lautet das Problem wie folgt: eine rechteckige Platte sei an einer Seite festgehalten und an der dazu parallelen Seite durch die in der Umfangsrichtung wirkende Schubkraft P belastet, welche ungefähr ähnlich der Gleitflächenspannung verteilt ist, und zwar in der Weise, daß eine Strecke u von der Schubkraft frei ist (Abb. 4); man berechne die Spannungsenergie, welche über den üblichen Betrag entsprechend der nach dem Parabelgesetz verteilten Belastung in der Platte aufgespeichert wird. Es bezeichne E den Elastizitätsmodul, l die Höhe und b die Halbbreite der Platte. Ferner sei gesetzt $z = u/b$. Dann läßt sich ΔA so ausdrücken:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \frac{P^2}{E} \Delta F \left(z, \frac{l}{b} \right) \quad \dots \dots \dots (5)$$

worin F eine Funktion von z und l/b ist.

Aus (4) und (5) ergibt sich jetzt

$$\frac{1}{2} \frac{P^2}{E} \frac{\Delta F}{b} = 2 T \Delta z$$

oder

$$\frac{P}{2b} = \sqrt{\frac{ET}{b} \frac{\Delta F}{\Delta z}} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nichts anderes, als die Intensität der äußeren Kraft pro Flächeneinheit, d. h. der durchschnittliche Wert des Gleitwiderstandes, der überwunden werden muß, um die Gleitung eintreten zu lassen. Die Funktion F , die der von der Gleitung herrührenden Energiesteigerung proportional ist, ist gleich Null für $z = 0$, und sie bleibt sehr klein in der Nähe des Nullpunktes. Es ist daher dort auch $\Delta F / \Delta z$ sehr klein, d. h. die Energiesteigerung verläuft erst langsam und dann schneller, wenn die Strecke u von Null aus bis zu einer gewissen Grenze allmählich vergrößert wird.

Aus (6) ergibt sich, daß der Gleitwiderstand eines Kristalls erheblich von der Beschaffenheit der Gleitfläche abhängt. Im Falle, wo $z = 0$ ist, scheint $P/2b$ fast unendlich groß zu sein, vorausgesetzt, daß T von Null verschieden ist. Das besagt, daß ein Kristall, dessen Gleitfläche ganz tadellos ist, sehr großen Widerstand gegen Schubwirkung hat. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, weil T mit z verschwindet oder u nicht Null ist *). Die letztere Vorstellung ist physikalisch so aufzufassen, daß die Gleitfläche ursprünglich Risse enthält, bevor die Gleitung geschieht; wenn man sich dieser Vorstellung anschließt, so hat man für $\Delta F / \Delta z$ einen von Null verschiedenen Wert anzunehmen. Jedenfalls ist der Gleitwiderstand vom Ver-

*) Die Einführung der ersteren Vorstellung ist Herrn TH. v. KÁRMÁN zu verdanken.

hältnis l/b abhängig; es wird die erste Gleitfläche den Kristall, dessen Materialbeschaffenheit überall dieselbe ist, in halber Höhe schneiden. Wenn die Gleitung an der ersten Fläche sich in gewissem Grade vollzieht und die weitere Gleitung an dieser Fläche erschwert wird (man beachte hierüber u. a. die Veränderlichkeit von T), so tritt die Gleitung an anderen Flächen in Erscheinung. Einfache Berechnung zeigt, daß $\Delta F / \Delta z$ mit l/b in dem Bereich wächst, welcher in Betracht kommt. Es wird daher der Gleitwiderstand um so größer, je kleiner das Verhältnis l/b wird und es steigt deshalb der Gleitwiderstand mit der Zahl der Gleitflächen.

Ferner zeigt (6), daß der Gleitwiderstand von der absoluten Abmessung b abhängig ist. Je feiner der Kristall, desto höher der Widerstand. Die Kaltverformung bringt die Kornverfeinerung und die Erhöhung des Gleitwiderstandes hervor, weil die Gleitung nach zwei oder drei Richtungen eines Kristalls stattfinden kann und dadurch nicht nur die Verkleinerung des Verhältnisses l/b , sondern auch die der absoluten Abmessung b verursacht wird.

Endlich sei eine kurze Bemerkung über die Wärmewirkung auf verformtes Material zugefügt. Die Röntgenaufnahme der dünnen Metallprobe, die die Kaltverformung erlitten hat, zeigt bekanntlich eine eigentümliche Verteilung der Interferenzflecke. Wenn die Probe eine Zeit lang bei einer mäßigen Temperatur erhitzt wird, bleibt die Röntgenaufnahme fast unverändert; erst bei hoher Temperatur zeigt das Bild grobe Flecke, die die Rekristallisation andeuten. Die Kristallorientierung der mäßig erwärmten Probe ist demnach dieselbe wie vor der Erhitzung; aber das Innere des Kristalls muß sicher verändert sein. Vom Standpunkte der vorliegenden Untersuchung aus betrachtet scheint die Veränderung so stattzufinden, daß der Ausgleich der Energiespeicherung durch die Milderung oder das Anheilen der Gleitflächenverwirrung geschieht. Damit werden die geteilten Teile wieder mehr oder weniger vollkommen in ein einziges Korn vereinigt, obwohl die Kornbegrenzung in dem verformten Zustande bleiben kann, und so ist die Veränderung der physikalischen Eigenschaften herbeigeführt.

Zur quantitativen Beschreibung der plastischen Einkristalldehnung

Von E. Schmid, Frankfurt a. M.

Einleitung.

In qualitativer Hinsicht ist der Mechanismus der plastischen Dehnung für eine ganze Reihe von Einkristallen heute sichergestellt. Er besteht in einer Biegegleitung entlang kristallographisch wichtiger Flächen in Richtung niedrig indizierter Kristallachsen. Die Auswahl desjenigen Gleitsystems, welches zu Beginn der Dehnung wirksam ist, wird von der Natur des Kristalls (Gleitfähigkeit der verschiedenen Gleitsysteme) und dessen Orientierung (Lage der Gleitsysteme zur Zugrichtung) bestimmt. In der Regel ist die Dehnbarkeit eines Kristalls nach Betätigung des zuerst wirksam gewordenen Gleitsystems jedoch nicht erschöpft. Durch die mit der Dehnung einhergehende Drehung des Gitters in bezug auf die Krafrichtung verbessern sich für latente Gleitsysteme die geometrischen Bedingungen immer mehr und schließlich wird ein zweites Gleitsystem dem ersten konkurrenzfähig; es löst nun entweder das erste ab oder beide sind von jetzt an gleichzeitig in Tätigkeit. Ein Beispiel für diese »geometrische« Begünstigung latenter Gleitflächen während der Dehnung ist in Abb. 1, die sich auf die zweit-

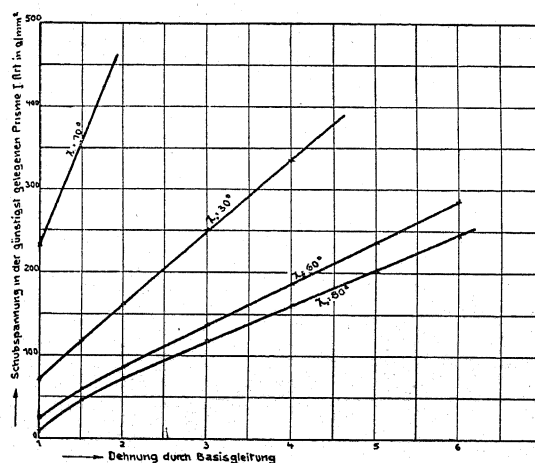


Abb. 1.

Geometrische Begünstigung latenter Gleitsysteme bei der plastischen Einkristalldehnung. Beispiel des Zn-Kristalles. Unter Benutzung der Ausgangsschubfestigkeit der Basisgleitfläche (in der Gleitrichtung) von 94 g/mm² und der Annahme des Konstantbleibens dieser Schubfestigkeit während der Dehnung ist die in der günstigsten gelegenen Prisma I. Art herrschende Schubspannung in der Gleitrichtung als Funktion der Dehnung dargestellt. χ_0 = Ausgangswinkel der Basisgleitfläche.

beste Gleitfläche des Zn-Kristalls bezieht, gegeben. Die auf mehrere, verschiedene Ausgangslagen der Basis bezüglichen Kurven zeigen in allen Fällen die sehr erhebliche, aus rein geometrischen Gründen erfolgende Zunahme der Schubspannung in der latenten Gleitfläche im Verlauf der Dehnung.

Die Schubfestigkeit des wirkenden Gleitsystems bleibt, wie die bisherigen Versuche gezeigt haben, keineswegs konstant während der Dehnung, sondern erfährt eine dauernde Er-

höhung. «Schubverfestigung»¹⁾. Besonders in den ersten Stadien der Dehnung (wenige Promille) ist dieser Anstieg der Schubfestigkeit sehr erheblich²⁾.

Diese Verfestigung durch plastische Deformation trifft jedoch nicht nur die wirkende, sondern auch alle übrigen, diese durchschneidenden Kristallflächen. Es geht dies schon daraus hervor, daß niemals beobachtet wurde, daß ein dem wirkenden kristallographisch gleichwertiges Gleitsystem in Tätigkeit gelangt, bevor es in eine geometrisch gleich günstige Lage gekommen ist, wie das in Wirksamkeit befindliche.

Eine quantitative Beschreibung der plastischen Einkristalldehnung wird demnach zu umfassen haben:

- a) die Ermittlung der Schubfestigkeiten der verschiedenen Gleitsysteme im ungedehnten Ausgangskristall (allgemein können diese Schubfestigkeiten noch Funktion der Normalspannung sein, also von der individuellen Kristallorientierung abhängen),
- b) die Bestimmung der Änderung dieser Schubfestigkeiten während der Dehnung und zwar sowohl für wirkende, als auch für latente Gleitsysteme.

Im Folgenden sei kurz über Arbeiten berichtet, die diese beiden Fragen zum Gegenstand haben. Sie sind zum Teil gemeinsam mit P. ROSBAUD und M. GEORGIEFF durchgeführt worden.

1. Schubfestigkeit der Hauptgleitsysteme verschiedener Metalkristalle³⁾.

Das Ergebnis, daß der Beginn deutlicher plastischer Dehnung an die Erreichung einer bestimmten, «kritischen», von der gleichzeitig wirkenden Normalspannung unabhängigen Schubspannung in der Gleitfläche (und Richtung) gebunden ist, über das bereits in Delft (1924) kurz berichtet wurde, hat sich in der Folge an weiteren Metalkristallen durchaus bestätigt. Die Streckgrenze verliert somit am Einkristall ihre Bedeutung als Materialkonstante, sie ist wesentlich «Orientierungsfunktion». Abb. 2 zeigt dies nochmals an einem

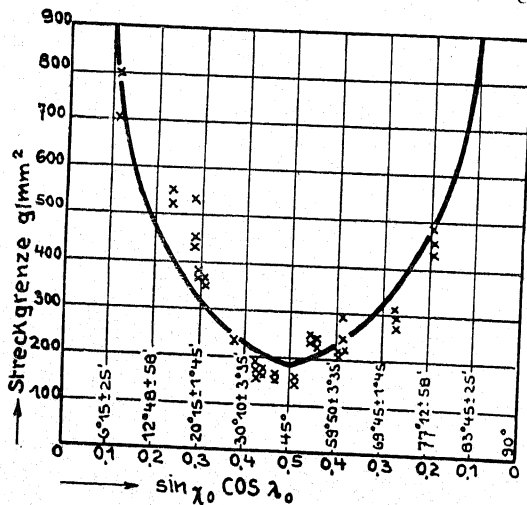


Abb. 2.

Abhängigkeit der Streckgrenze des Zn-Kristalles von der Lage der Gleitelemente (nach P. Rosbaud und E. Sch.) λ_0 bzw. $\lambda_0 =$ Winkel zwischen Zugrichtung und Gleitfläche bzw. Gleitrichtung.

Als Abszisse ist das Produkt $\sin \lambda_0 \cos \lambda_0$ aufgetragen. Die eingetragenen Punkte links von Abszissenwert 0,5 beziehen sich auf λ_0 Winkel $< 45^\circ$, die rechts davon auf solche $> 45^\circ$. Die glatten Kurvenäste entsprechen dem Verlauf der Streckgrenze, wie er sich unter Annahme einer konstanten, von der Normalspannung unabhängigen, «kritischen» Schubspannung an der Streckgrenze von 94 g/mm² Basisfläche ergibt. Die bei einzelnen Abszissenwerten angegebenen Winkel stellen die entsprechenden λ_0 Werte und das Intervall dar, das ihnen zufolge Nichtübereinstimmung von Gleitrichtung und Richtung grösster Schubkraft zukommt.

¹⁾ Auf den einzig bisher beobachteten Fall einer Abnahme der Schubfestigkeit eines wirkenden Gleitsystems während der Dehnung (Nachdehnung von Zn-Kristallen) soll hier nicht näher eingegangen werden. Vergl. hierzu O. HAASE und E. SCHMID: Zs. f. Ph. 33, 413, 1925.

²⁾ Zufolge dieser Verfestigung des wirkenden Gleitsystems ist der Anstieg der Schubspannung in einer latenten Prismenfläche des Zn-Kristalls im Verlauf der Hauptdehnung noch erheblich stärker als er in Figur 1 unter der Annahme konstant bleibender Schubfestigkeit der wirkenden Basisgleitfläche angegeben ist.

³⁾ E. SCHMID, Proc. of the Internat. Congr. for Applied Mechanics, Delft, 1925, p. 342. P. ROSBAUD und E. SCHMID Zs. f. Ph. 32, 197, 1925. M. GEORGIEFF und E. SCHMID Ibid 36, 759, 1926. E. SCHMID Ibid 40, 54, 1926.

Beispiel. Sie stellt die am Zn-«Kahlbaum»-Kristall bei gewöhnlicher Temperatur erhaltenen Ergebnisse dar ⁴⁾. Die beobachteten Werte für die Streckgrenze sind gut durch glatte Kurven ausgeglichen, die sich unter der Annahme einer konstanten, kritischen Schubspannung der Basis an der Streckgrenze von 94 g/mm² berechnen. Die Normalspannung auf die Basis schwankte bei diesen Versuchen wie 1 : 50. Trotzdem ist ein Einfluß derselben nicht erkennbar.

Die kritischen Schubspannungen der Hauptgleitsysteme stellen sonach die zum Vergleich der Plastizität von Kristallen geeigneten Konstanten dar.

Schubfestigkeit der Hauptgleitsysteme verschiedener Metallkristalle

(Belastungsgeschwindigkeit 100 g in ca. 5 Minuten)

Zn-Cd-Mischkristalle

Cd-Gehalt %	Temperatur	Schubfestigkeit der	
		Basis (i. d. Gleitrichtung)	Prisme I. Art (i. d. Gleitrichtung)
0,03 ¹⁾	— 185° C	126 g/mm ²	ca. 1900 g/mm ²
0,03 ¹⁾	20° C	94, 187 ²⁾	
0,13		274	
0,53		815	
1,03		1186	

¹⁾ Zn-«Kahlbaum» ²⁾ Belastungsgeschwindigkeit 100 g in ca. 40 Sek.

Zn-Kristalle mit Einlagerungen von Zn-Sn-Eutektikum

Sn-Gehalt %	Schubfestigkeit der Basis (i. d. Gleitrichtung) bei 20° C
0	94 g/mm ²
0,1	244
0,5	313
1,0	322
1,5	373
2,0	355

Bi-Kristalle

Temperatur	Schubfestigkeit der Basis (i. d. Gleitrichtung)
— 80° C	> 625 g/mm ²
20°	221
100°	168
150°	131
200°	101
250°	103

Das Ergebnis unserer bisherigen Bestimmungen dieser Schubspannungen für verschiedene

⁴⁾ Die Herstellung der Kristalle für sämtliche hier besprochenen Versuche erfolgte nach dem CZOCHRALSKI'schen Ziehverfahren. Als Dehnungsvorrichtung wurde ein SCHOPPER'scher Festigkeitsprüfer mit automatischer Aufzeichnung der Dehnungskurve verwendet. Die Belastungsgeschwindigkeit betrug, wenn nicht besonders angegeben, 100 g in ca. 5 Minuten.

Metallkristalle ist in Tabelle 1 wiedergegeben. Der Einfluß des Reinheitsgrades, der Temperatur und der Belastungsgeschwindigkeit geht aus den mitgeteilten Zahlen deutlich hervor.

2. Schubverfestigung des wirkenden Gleitsystems⁵⁾.

Zur Untersuchung der Verfestigung eines wirkenden Gleitsystems wurden wieder Zn-Kristalle herangezogen. Durch Verwendung sehr verschiedener Ausgangslagen der singulären Basisgleitfläche ist hier eine sehr weitgehende Variierung des Normalzuges auf die Gleitfläche möglich. Abb. 3 zeigt die an Kristallen verschiedener Ausgangsorientierung im technischen

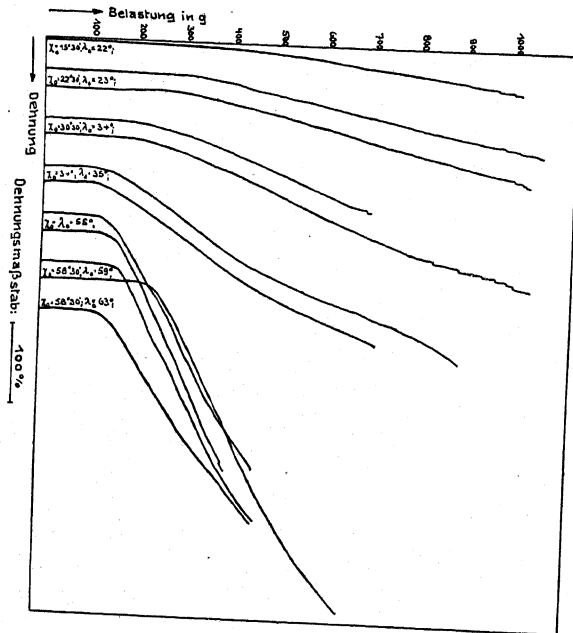


Abb. 3.

Automatisch registrierte Dehnungskurven von Zn-Kristallen. Bei den einzelnen Kurven sind die zugehörigen Stellungswinkel von Gleitfläche und -Richtung angeschrieben. Der Einfluss der Orientierung auf die Kurvenform ist deutlich erkennbar.

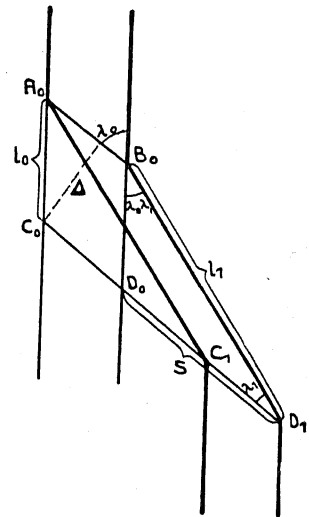


Abb. 4.

Berechnung der Abgleitung aus der Dehnung
 l_0 und l_1 = Anfangs- und Endlänge.
 λ_0 und λ_1 = Ausgangs- und Endwinkel zwischen Drahtachse und Gleitrichtung.
 χ_0 = Ausgangswinkel zwischen Drahtachse und Gleitfläche.
 s = gesamte Abgleitung.
 $\frac{s}{l} = a$ = spezifische Abgleitung.

$$a = \left(\sqrt{\left(\frac{l_1}{l_0} \right)^2 - \sin^2 \lambda_0} - \cos \lambda_0 \right) \frac{1}{\sin \chi_0}$$

Festigkeitsprüfer erhaltenen Dehnungskurven⁶⁾. Der Einfluß der Ausgangslage der Gleitelemente auf die Kurvenform ist deutlich erkennbar. Zur Analyse dieser Kurven wurde dem Mechanismus der Kristalldehnung entsprechend die Schubspannung in der wirkenden Gleitfläche in Beziehung gesetzt zur spezifischen Abgleitung, deren Bedeutung aus Abb. 4 erkennbar ist⁷⁾. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist in Abb. 5 dargestellt, die für die einzelnen Dehnungskurven die in der Basisfläche herrschende Schubspannung wiedergibt. Die Figur zeigt, daß der Anstieg der Schubspannung in allen Fällen nahezu linear mit zunehmender Abgleitung erfolgt und für den ganzen untersuchten Bereich des Ausgangsstellungswinkels der Basisgleit-

⁵⁾ P. ROSBAUD und E. SCHMID l. c. E. SCHMID Zeitschr. f. Phys. l. c.

⁶⁾ Die Einspannlänge der Kristalle betrug 25 mm, der Querschnitt ca. 0,5 mm², die anfängliche Belastungsgeschwindigkeit ca. 100 g und 40 Sek.

⁷⁾ Herrn G. SACHS verdanke ich den Hinweis, die Abgleitung auf gleiche Dicke des Gleitschichtenpaketes und nicht (wie es in der Arbeit mit P. Rosbaud geschehen ist) auf gleiche Ausgangslänge des Kristalles zu beziehen.

fläche von $15^{\circ} 30'$ bis $58^{\circ} 30'$ gut durch eine einzige Kurve (in der Figur stark hervorgehoben) dargestellt werden kann, welche die in der Basisgleitfläche in der Gleitrichtung herrschende Schubspannung (S) als Funktion der Abgleitung (a) angibt. — «Verfestigungskurve.» Diese

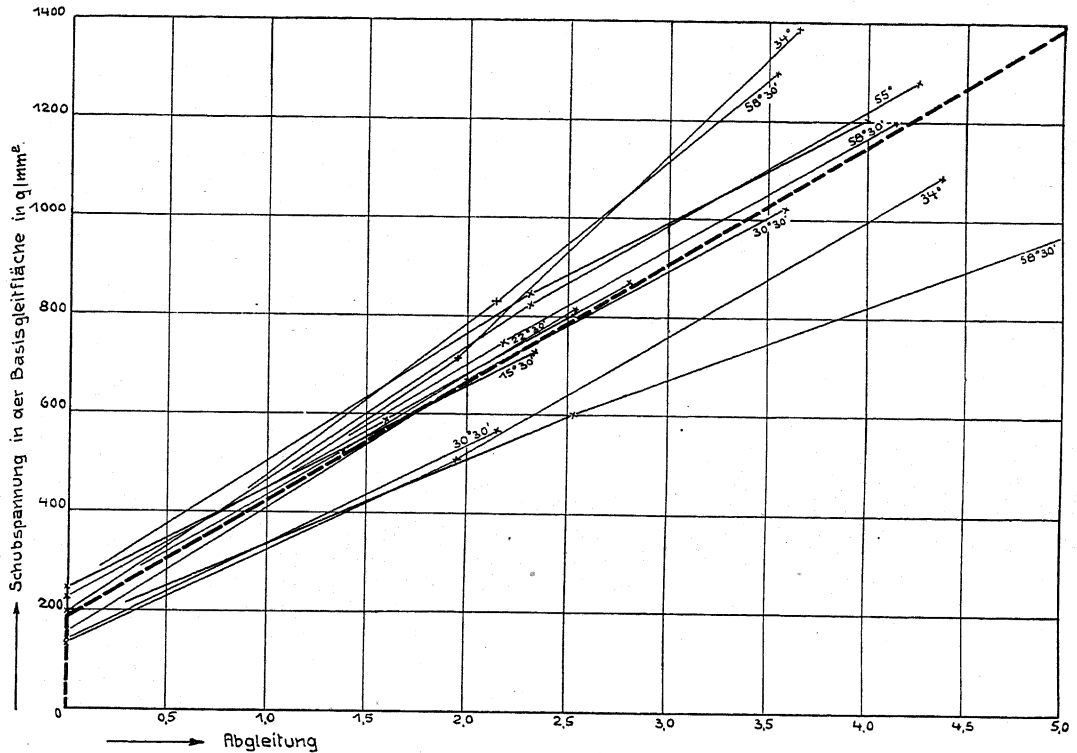


Abb. 5.

Schubfestigkeit der Basisgleitfläche von Zn-Kristallen als Funktion der Abgleitung (nach Ueberschreitung der Streckgrenze).

Die Ausgangswinkel der Basis sind bei den einzelnen Kurven angeschrieben. Die Schubfestigkeit steigt nahezu proportional der Abgleitung an. Sämtliche Kurven können durch *eine* Kurve — in der Figur stark hervorgehoben — ersetzt werden. «Verfestigungskurve».

Kurve ist für Zimmertemperatur und die verwendete Belastungsgeschwindigkeit mit großer Annäherung linear und durch den Ausdruck

$$S \text{ (in g/mm}^2 \text{ Basisfläche)} = 187 + 240a \dots \dots \dots (1)$$

gegeben.

Daß für Aluminiumkristalle der Kraftverlauf während der Dehnung gut durch eine einzige Kurve Schubspannung im wirkenden Gleitsystem als Funktion der Dehnung beschreibbar ist, wurde von G. J. TAYLOR und C. F. ELAM kürzlich angegeben⁸⁾. Allerdings ist hier der hohen Symmetrie entsprechend nur eine geringere Variation der Orientierung möglich.

So wie die Streckgrenze verliert am Einzelkristall somit auch die Dehnungskurve ihre unmittelbare Bedeutung als «Materialkonstante».

In Abb. 6 ist schließlich in den gestrichelt gezeichneten Kurven noch eine Darstellung der Dehnungskurven von Zn-Kristallen gegeben, die für verschiedene Ausgangslagen der Gleitfläche auf Grund des oben angegebenen Ausdruckes (1) und unter Annahme von Koinzidenz von Gleitrichtung und Richtung größter Schubkraft für den Anstieg der Schubfestigkeit der

⁸⁾ G. J. TAYLOR und C. F. ELAM, Proc. Roy. Soc. 108, 28, 1925.

Basisfläche mit der Abgleitung berechnet sind. Bei einem Ausgangswinkel von 80° zwischen Gleitfläche und Längsachse des Kristalles hätte man zu Beginn der Dehnung bereits erheblichen Lastabfall zu erwarten⁹⁾. Rein schematisch sind in die Figur auch die auf 1 mm^2 reduzierten

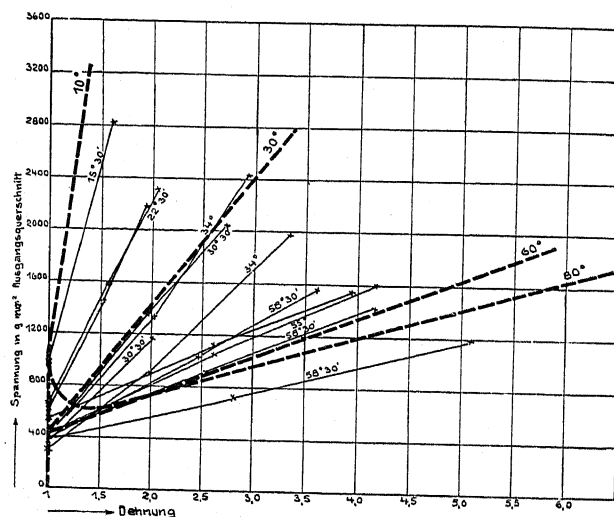


Abb. 6.

Form der Dehnungskurven verschieden orientierter Zn-Kristalle, berechnet auf Grund der durch (1) gegebenen Verfestigungskurve. Ausser den Ausgangswinkeln der Basisgleitfläche von 10° , 30° , 60° und 80° zugehörigen, berechneten Kurven sind auch die beobachteten eingezeichnet. Sie sind in völliger Uebereinstimmung mit dem Spektrum der berechneten.

beobachteten Dehnungskurven eingetragen. Sie verlaufen dem oben Gesagten entsprechend in Uebereinstimmung mit den berechneten.

Die Angabe der Verfestigungskurve des Hauptgleitsystems genügt jedoch keineswegs zur erschöpfenden Beschreibung der plastischen Kristalldehnung bei einer bestimmten Temperatur. Die Verfestigungskurve ist noch in sehr erheblichem Maß von der Abgleitgeschwindigkeit abhängig. Systematische Versuche hierüber liegen jedoch noch nicht vor. Ferner gibt die Verfestigungskurve keinerlei Auskunft über das Ausmaß der Dehnung durch Abgleitung entlang der Hauptgleitfläche. Dieses wird vielmehr durch das Inkrafttreten weiterer Kristallflächen als Gleitflächen bestimmt und hängt somit von der gleichzeitig mit der Verfestigung des wirkenden Gleitsystems erfolgenden Verfestigung latenter Gleitflächen ab.

Diese Schubverfestigung von die wirkende Gleitfläche durchschneidenden Kristallflächen soll zum Schlusse noch ganz kurz gestreift werden.

3. Schubverfestigung latenter Gleitsysteme¹⁰⁾.

Das über die Verfestigung latenter Gleitsysteme vorliegende experimentelle Material ist zurzeit noch außerordentlich spärlich. Ohne des näheren auf die Durchführung der betreffenden Versuche einzugehen, seien hier nur die bisherigen Ergebnisse mitgeteilt.

Es wurde bisher niemals gefunden, daß sich bei *kristallographischer Identität* von wirkendem und latentem Gleitsystem das wirkende stärker verfestigt als das latente. Daß es sich erheblich schwächer verfestigt, ist für eines der am Sn beobachteten Gleitsysteme und für die Prismengleitfläche des Zinkkristalles (bei der Nachdehnung) festgestellt. In diesem letzten

⁹⁾ Gemeinsam mit P. ROSBAUD war bei sehr querrer Ausgangslage der Basis ein solcher Lastabfall in der Tat beobachtet worden (l. c.).

¹⁰⁾ M. POLANYI, Z. S. f. Krist. 61, 49, 1925. E. SCHMID Z. a. M. M. 5, 118, 1925, Z. f. Phys. l. c.

Beispiel setzt die Abgleitung in der latenten Prisme erst ein, wenn in ihr eine ca. 3,5 mal so große Schubspannung herrscht, wie in der als Gleitfläche wirkenden.

Für den Fall *kristallographischer Verschiedenheit* von wirkender und latenter Gleitfläche zeigt die Hauptdehnung des Zn-Kristalles, daß sich die wirkende Basisfläche erheblich stärker verfestigt als die latente Prismenfläche. Diese Verfestigung der (dichter belegten) Basis überwiegt um so mehr, je rascher die Dehnung erfolgt.

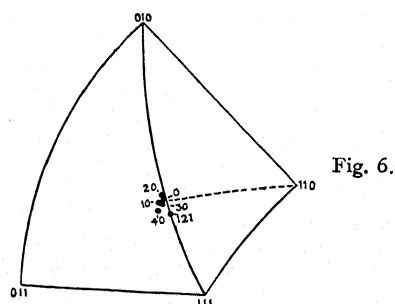
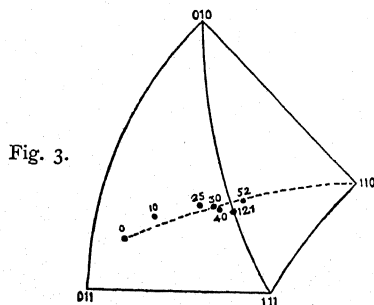
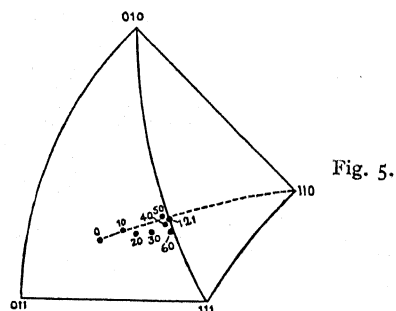
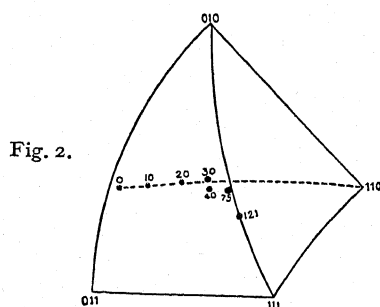
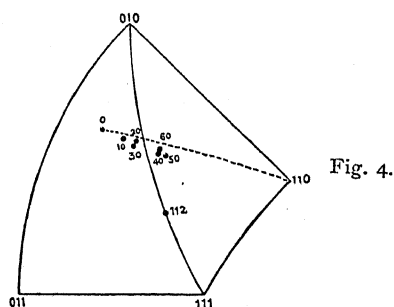
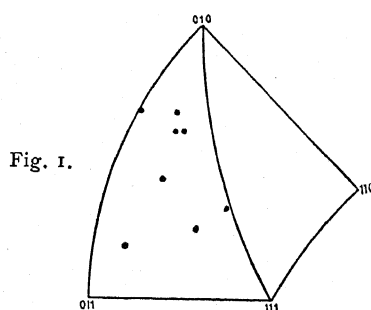
Eine systematische Weiterarbeit über diese Fragen wird sich vor allem auch mit der Erholungsfähigkeit der verschiedenen Gleitsysteme zu befassen haben.

Some Properties of Gold, Silver and Copper Crystals

By C. F. Elam, London

Gold, Silver and Copper crystals have been made by lowering graphite tubes containing the molten metals through a furnace in an atmosphere of nitrogen, so that they solidify from one end. Rods eight inches long and 0.25 inches in diameter were prepared by this method, which has been used extensively by BRIDGMAN¹⁾. The crystals were free from blow-holes and oxide. The purest silver and gold was used in the experiments and the copper was pure electrolytic, remelted and drawn.

The orientations of the crystals were determined by means of X-rays. DAVEY²⁾ has stated that a cubic axis was always parallel to the axis of the cylinder in copper crystals, and



BRIDGMAN³⁾ noticed that certain directions appeared more favoured than others. A diagram, Fig. 1, illustrating the position of the rod axis relative to the crystal axes in all the specimens

¹⁾ BRIDGMAN. Proc. Amer. Acad. Sci. Vol. 60. Nos. 6. 78.

²⁾ DAVEY. Phys. Rev. Vol. 25.

³⁾ Loc. cit.

investigated by means of X-rays, shows that the orientations differ considerably and that no crystals are in the position (near the pole of the (010) plane) found by DAVEY.

Tensile Tests were carried out with these crystals. They became elliptical in cross-section as in aluminium, and broke with a wedge-shaped fracture. Determinations of the crystal axes by means of X-rays, at different stages of the test, showed that they rotated in the same way as in aluminium, the axis of the rod moving along a great circle towards the pole of a $\{110\}$ plane. Figs. 2, 3, 4, and 5. It was shown for aluminium that this occurred when slip occurred on the $(\bar{1}11)$ octahedral plane in the (110) direction. But by the rotation of the crystal axes, a point is reached when two octahedral planes make equal angles with the axis of the rod, and slip occurs on both planes simultaneously. This point is reached when the great circle joining the original position of the rod to the pole of the (110) plane, cuts the great circle through the poles of the (010) and $(\bar{1}11)$ planes. The axis then moves by double slipping towards the pole of the (121) plane. The diagrams show that this occurs in all the gold, silver and copper crystals examined. It is particularly well brought out in Copper, No. X, which was in such a position that double slipping should occur from the beginning of the test, and as the axis was very near the pole of the (121) plane little change in position was to be expected. Fig. 6 shows that the position of the crystal axes relative to the test-piece axis was almost constant throughout the test. One is therefore justified in concluding that the distortion of these metal crystals, which have all the same lattice structure, are similar to aluminium.

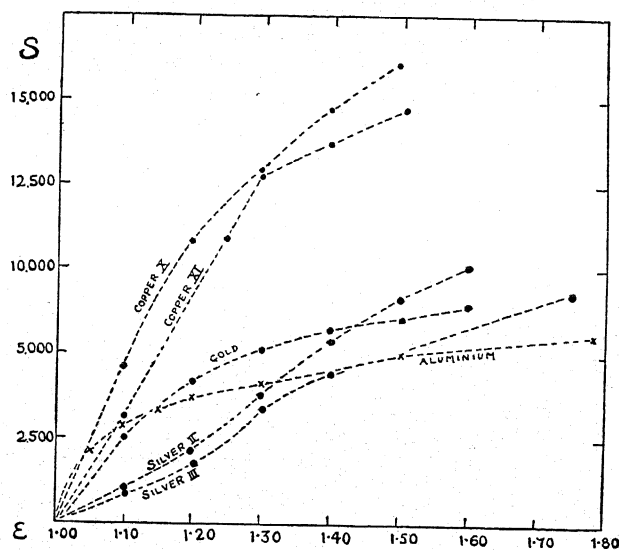


Fig. 7.

The load to stretch the crystals at each stage, and the cross-sections were measured. The slip-plane and direction of slip were deduced, and the tangential component of shear stress calculated for each extension. These are plotted in Fig. 7, and it will be seen that the curves are different for the different metals. The silver, which starts by being the weakest, is finally harder than either gold or aluminium. The copper is hardest throughout the test. As the crystals have the same structure and method of deformation it would be expected that the curves would have a similar shape, if hardening depended only on the amount of slip. The differences must therefore be considered as being dependent on specific properties of the metals, for which at present there is no explanation.

Elasticité et symétrie du quartz aux températures élevées

Par A. Perrier et R. de Mandrot, Lausanne

(Voir Planche VI pour figure 3)

Introduction. — Les présentes recherches sont en corrélation avec d'autres, entreprises pour soumettre à l'expérience les conséquences d'hypothèses formulées par l'un de nous sur la pyroélectricité et la piézoélectricité¹⁾. Une des prévisions, la disparition de la piézoélectricité du quartz au point $\alpha\beta$ a déjà été vérifiée; une étude quantitative de la variation thermique générale des modules piézoélectriques est en préparation, mais sa grande difficulté la retarde. L'interprétation théorique précise de ces phénomènes requiert au premier chef la connaissance de l'élasticité en fonction de la température; c'est là un point de départ du travail publié.

Mais, à côté de cette importance dans le cadre des recherches rappelées, nous estimions qu'il présente en lui-même un intérêt plus général: on ne peut pas dire que la dépendance de l'élasticité des solides et de la température soit bien connue. Il existe, certes, de bons travaux qui ont attaqué ce problème; mais, sauf une ou deux exceptions, ils sont guidés par des intentions industrielles et se limitent à des intervalles de température étroits; leurs possibilités d'interprétation théorique sont restreintes. Et surtout ils concernent tous des métaux usuels, soit des *agrégats microcristallins*; nous n'avons pu trouver *aucune recherche à haute température sur des individus cristallins bien déterminés*. Nos expériences, au contraire, rentrent exactement dans cette ligne; pendant leur exécution, qui, par suite d'empêchements divers, a duré des années, le développement rapide, dû aux rayons de Röntgen, des connaissances sur les réseaux cristallins, et les hypothèses sur les forces interatomiques, sont venus accentuer cet intérêt.

Cela nous a engagés à étendre le domaine de recherches davantage que ce n'était notre intention primitive, aux fins d'apporter des contributions plus riches à la connaissance future des énergies potentielles inhérentes à la structure solide.

Enfin, la transformation $\alpha\beta$ du quartz se révélant particulièrement caractéristique et intéressante dès les premiers résultats sûrs acquis, il nous a paru indiqué d'élargir encore notre programme dans une direction qui nous permit de fixer rigoureusement par voie de symétrie la différence entre les état α et β .

Le tableau complet des propriétés élastiques du quartz exige la connaissance de six modules (s_{11} , s_{33} , s_{44} , s_{12} , s_{13} , s_{14} dans la notation de W. Voigt²⁾). Le tableau, qui exige des expériences de traction (ou flexion) et de torsion, a été dressé à température ordinaire par ce savant. Les *modules de traction* suffisent entièrement à notre but, et nous avons choisi une fois pour toutes pour leur mesure la flexion de parallélépipèdes minces sur deux appuis et par une charge unique au milieu.

Ces lames ont été taillées à la précision de l'optique suivant des orientations convenables, soit la longueur dans la direction où l'on veut connaître le module, les autres arêtes en sorte que les flexions soient *exemptes de torsion*.

¹⁾ ALB. PERRIER: Hypothèse de polarisations diélectriques spontanées et quelques-unes de ses conséquences expérimentales. — Soc. suisse de physique, Berne 1916. Arch. sc. phys. et nat. (4) t. 41, p. 493.

A. PERRIER et Mlle H. ROUX: Sur la possibilité de la calorimétrie adiabatique, etc. Mémoires Soc. vaudoise Sc. naturelles. 1923 N° 3; résumé: Soc. suisse de physique, Genève, 1923. Arch. Sc. phys. et nat. (5) 5 p. 310 (1923).

SAMUEL GAGNEBIN: Rech. expérimentales sur la variation thermique des constantes diélectriques du quartz cristallisé, Arch. des Sc. phys. et nat. (5) v. 6. p. 161—210 (1924).

²⁾ W. VOIGT: Lehrbuch der Kristallphysik, Kap. VII, Absch. VI et VII.

Le but visé suppose que, non seulement les échantillons en essai, mais les dispositifs de flexion, puissent être maintenus dans un four électrique à des températures s'élevant jusque vers 1200° . Cela suscite des obstacles d'ordres mécanique, thermique et optique, sans parler de l'extrême fragilité de la matière durant sa transformation. Une notable partie du temps a été consacrée à la mise au point de cette technique inexplorée et qui exige une grande attention; toutes les difficultés ont pu néanmoins être surmontées.

Grâce à cela, nous avons pu atteindre tous les résultats que nous avions en vue. Ils comprennent essentiellement les courbes complètes représentant les modules d'YOUNG parallèles et normaux à l'axe optique (plus précisément suivant axe ternaire et axe binaire, soient $E_{||} = 1/s_{11}$, $E_{\perp} = 1/s_{33}$) jusqu'à delà de 1100° ; puis les courbes pour deux directions à $\pm 50^{\circ}$ de l'axe ternaire. Les nombreuses conclusions qui découlent de ces données numériques sont résumées ci-dessous. Ce travail était achevé en 1922 déjà ³⁾; récemment, nous avons établi pour des usages pratiques des formules empiriques de représentation; elles sont également reproduites plus loin ⁴⁾.

Méthode expérimentale. — L'appareil de flexion est essentiellement un petit tréteau, plaque horizontale portant deux appuis parallèles; la lame en essai est posée à plat sur ceux-ci et la flexion est provoquée par des poids marqués suspendus au milieu de la lame par l'intermédiaire d'un étrier et d'un petit plateau. Les appuis, organes très délicats, ont été, après nombreux essais, les arêtes de petits prismes taillés à la précision de l'optique dans du quartz fondu. Le tréteau a été, non sans peine, réalisé en bloc rigide par la combinaison de pièces de quartz fondu, porcelaine ou stéatite suivant le cas. Ces pièces étaient fixées avec de la pâte de kaolin contenant très peu de verre soluble.

Pour la mesure des flèches de flexion, on a utilisé deux miroirs fixés symétriquement à l'une et l'autre extrémité de la lame; des rayons lumineux provenant d'une échelle extérieure au four et réfléchis successivement sur les deux miroirs tournent d'un angle observé à l'aide d'une lunette installée de l'autre côté du système; de l'angle on calcule la flèche ⁵⁾.

La mise en œuvre expérimentale à haute température de cette méthode optique se heurte à des obstacles sérieux, dont nous relevons seulement ici qu'elle a conduit à utiliser des petits prismes à réflexion totale en quartz fondu, qu'au-dessus de 900° environ l'*incandescence* propre de ces miroirs eux-mêmes empêchait toute lecture sur l'échelle habituelle et que nous avons tourné la difficulté à l'aide d'une échelle à *traits lumineux* d'éclat notablement plus élevé que celui des prismes.

Tout ce dispositif fléchisseur repose sur la paroi intérieure d'un four électrique à résistance (cylindre à axe horizontal). Parmi les exigences à satisfaire dans la construction de ce four, celle de l'uniformité de la température était la plus stricte et la plus malaisée à réaliser, très particulièrement pour pouvoir passer la transformation $\alpha\beta$ sans la rupture des échantillons, presque fatale sans des précautions extraordinaires. La température était mesurée par voie thermo-électrique.

³⁾ Des extraits avaient été communiqués déjà en séance de la Soc. suisse de physique à Neuchâtel (1920) et Berne (1922); v. Arch. Sc. physiques et naturelles (5) t. II, p. 411 (1920) et (5) t. IV, p. 367 (1922); aussi C. R. 175, p. 622 (1922). L'ensemble est publié avec détails: Mémoires de la Société vaudoise des Sciences naturelles, vol. 1, No. 7, p. 333—363 (1923). Le prof. Perrier (Lab. de phys. de l'Université, Lausanne) enverra volontiers cette publication aux personnes qui désirent des données plus complètes.

⁴⁾ Avec plus de détails: Soc. suisse de physique, séance de Fribourg (août 1926). Arch. Sc. phys. et nat. (5) v. 8 p. 267 (1926).

⁵⁾ v. A. Koenig: Wiedemann's Annalen 28 (1886), p. 108.

Des causes d'erreur nombreuses ont été étudiées et éliminées, soit dans la partie mécanique, soit dans les parties optique ou thermique. Leur exposé se trouve dans le mémoire détaillé cité plus haut. Notons seulement ici que les résultats numériques peuvent être comparés entre eux à 2 % près en général, et que leurs valeurs en unités absolues doivent être envisagées comme exactes à 1 %.

Résultats. — Nous avons vérifié d'abord avec soin:

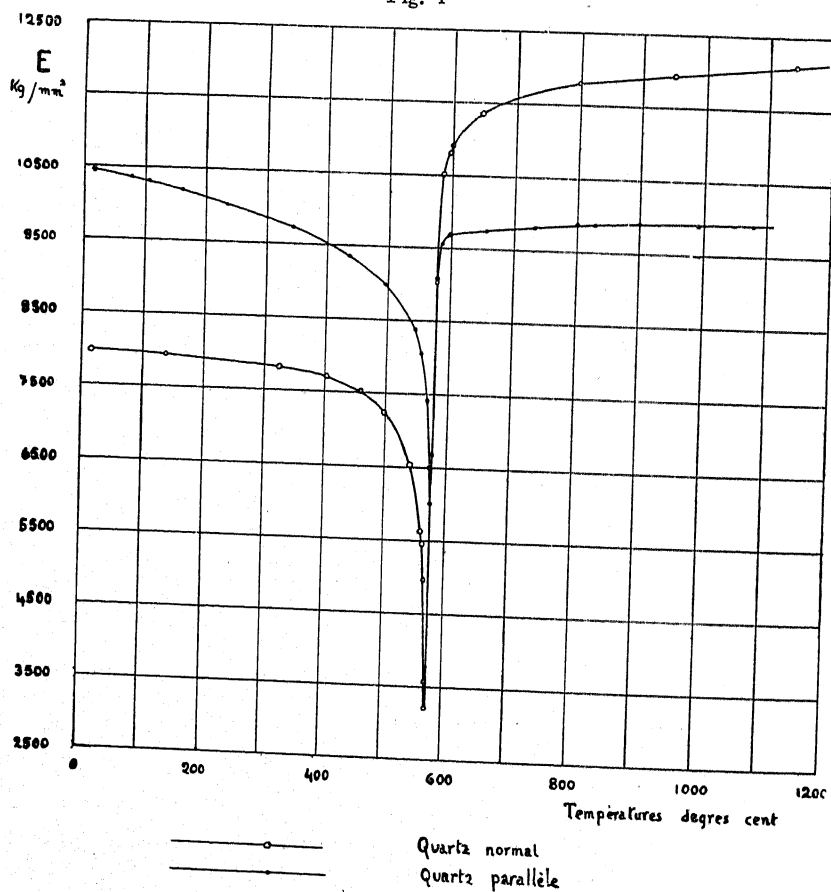
1. *A température fixe, l'absence de déformations résiduelles sensibles (réversibilité «mécanique») et la proportionnalité des déformations aux contraintes (Loi de Hooke).* A température ordinaire, des vérifications ont été exécutées ce sens jusqu'à la rupture.

2. *La réversibilité «thermique», complète également, des constantes élastiques.*

3. La seule exception apparente à ce dernier fait, dans le voisinage immédiat de la température $\alpha\beta$, s'interprète simplement par la *différence exceptionnellenent forte dans cette région étroite entre les constantes isothermiques et les constantes adiabatiques.*

Les données numériques de l'expérience sont, bien entendu, isothermiques; nous nous bornons à redonner ici seulement les courbes qui les résument. La figure 1 est consacrée aux deux directions principales ternaire et binaire. On voit que les propriétés des états α et β sont très nettement différentes.

Fig. 1



Dans le premier état, la résistance à la déformation, exprimée par le module E , décroît constamment et de plus en plus vite avec l'élévation de la température; ce phénomène se mani-

feste suivant une loi analogue dans toutes les directions. Il apparaît dans le sens même que fait prévoir la notion classique de l'agitation thermique, le sens d'ailleurs que l'expérience accuse sur les métaux ordinaires microcristallins.

Tout autres apparaissent les propriétés de l'état β : *c'est la déformabilité ici qui diminue continuellement avec l'accroissement de la température*. Ce phénomène est, à ma connaissance, le seul du type, observé avec netteté et certitude jusqu'ici.

Ces variations du module sont du reste considérables, allant du simple au quadruple; et très probablement leur amplitude se montrera-t-elle notablement plus vaste encore lorsqu'on expérimentera au 1/100 de degré près dans la région de passage $\alpha\beta$.

Les *formules empiriques* dont il est question plus haut pour représenter ces courbes sont:

Direction de l'axe binaire:

$$\begin{aligned} \text{Etat } \alpha: E &= 6425 (575 - t)^{0,0350} \\ \text{,, } \beta: E &= 9665 (t - 575)^{0,0373} \end{aligned} \left\{ \text{kg/mm}^2 \right.$$

valables à la précision des expériences près de 0° à 1200° sauf dans l'intervalle $450-580^\circ$.

Direction de l'axe ternaire:

$$\begin{aligned} \text{Etat } \alpha: E &= 6425 (575 - t)^{0,0765} \\ \text{,, } \beta: E &= 9300 (t - 575)^{0,0110} \end{aligned} \left\{ \text{kg/mm}^2 \right.$$

valables de 0° à 1200° sauf dans l'intervalle $574-578^\circ$.

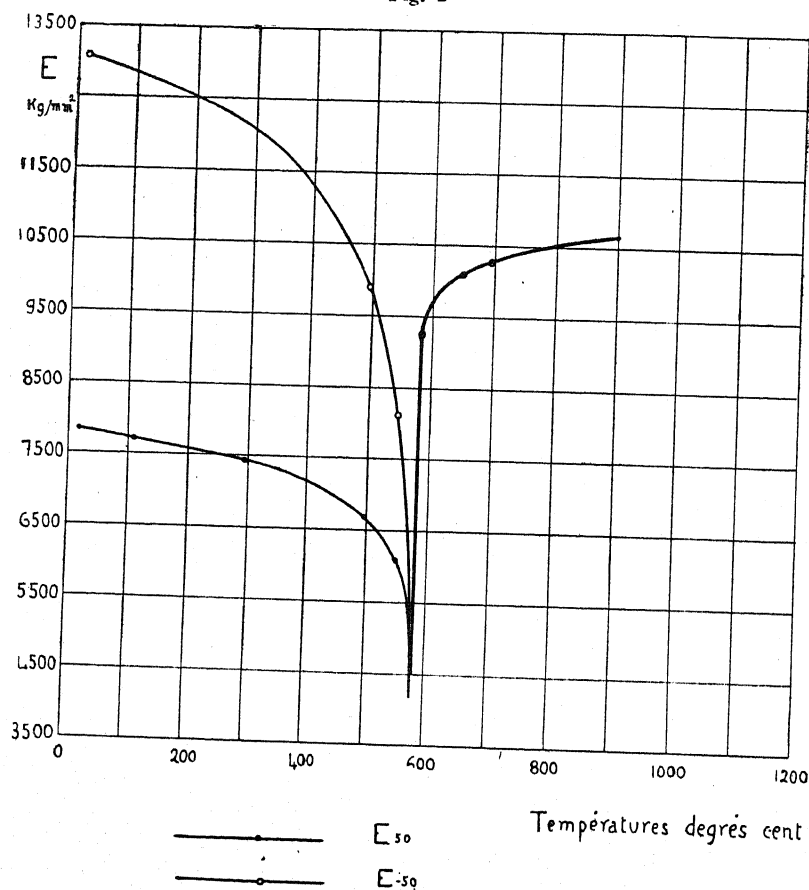
Il est intéressant de rapprocher la *décroissance* accélérée de l'élasticité (état α) et sa *croissance* graduellement ralentie (état β) des variations purement thermiques mesurées par H. LE CHATELIER⁶⁾, lesquelles sont respectivement une *dilatation* accélérée puis une faible *contraction*. Cela conduit à la règle vraie pour notre substance, mais peut-être générale, qu'à un *accroissement des distances moléculaires moyennes correspond, quel que soit le sens de la variation de température, un affaiblissement de l'élasticité*. Nous laissons de côté bien entendu le passage même d'un état allotropique à l'autre.

Le passage de l'état α à l'état β a été l'objet d'un examen attentif. Les phénomènes d'un autre ordre (optiques et thermiques notamment) ont conduit leurs observateurs à le considérer comme une *transformation* nettement *discontinue*. Mais aucun travail de nous connu n'a fait d'observation précise dans le voisinage immédiat, les difficultés en étant très grandes. Nos expériences faites dans cette région à un demi-degré près nous font beaucoup plus conclure à des courbes avec un *point anguleux* ou même un *point de rebroussement* à tangente verticale, mais non à une discontinuité des ordonnées. Et s'il en est ainsi pour l'élasticité il paraît probable que les mesures de précision d'autres phénomènes donneront des résultats de même caractère; de telles expériences sont en préparation au laboratoire de Lausanne.

Mais les états α et β sont caractéristiquement différents et il existe par conséquent une *température de transformation* parfaitement déterminée. C'est ce qu'ont montré avec une re-

⁶⁾ H. LE CHATELIER C. R. 108 (1889). p. 1046; aussi Bull. Soc. franc. Minéralogie, XIII (1890), p. 112 v. aussi jusqu'à 530° : ALEX. MÜLLER: Vierteljahrschr. d. Nat. Forsch. Ges. Zürich, 61 (1916); Thèse Zürich Univ. 1916.

Fig. 2



marquable netteté nos expériences avec les lames obliques ($\pm 50^\circ$). Leurs résultats sont résumés dans la figure 2 et représentés empiriquement, autant que les mesures ici moins nombreuses permettent de l'affirmer, par les formules:

$$\begin{aligned}
 \text{Etat } \alpha \quad & \left\{ \begin{aligned} E_{+50} &= 4770 (575 - t)^{0,078} \\ E_{-50} &= 5050 (575 - t)^{0,150} \end{aligned} \right\} \text{ kg/mm}^2 \\
 \text{,, } \beta \quad & E_{\pm 50} = 8590 (t - 575)^{0,0380}
 \end{aligned}$$

On voit que le module d'Young à -50° de l'axe, qui est presque le double de son symétrique ($+50^\circ$) à température ordinaire décroît suivant une loi plus accélérée que lui, et, dès la température 576° dépassée, les deux directions donnent des flexions identiques au-delà même de ce que l'expérience permettrait d'attendre.

Cela implique que, si l'élasticité du quartz α est nettement de symétrie rhomboédrique (trigonale), celle du quartz β est non moins nettement hexagonale (à la vérité par conséquent même de révolution autour de l'axe optique).

Tenant compte du haut degré de dyssymétrie des phénomènes élastiques en regard de celui des autres phénomènes cristallophysiques, nous trouvons ici la raison expérimentale la plus solide pour conclure que la transformation $\alpha\beta$ est, non seulement au point de vue élastique mais généralement, un passage du système rhomboédrique au système hexagonal.

Tous les résultats s'illustrent d'une manière particulièrement simple à l'aide de la *surface lieu des extrémités de tous les rayons vecteurs par un point fixe et dont les longueurs sont proportionnelles aux valeurs de E suivant leurs directions respectives*. La figure 3 (planche VI) représente cette surface à quatre température choisies; on voit que:

*Partant de la température ordinaire, elle se **contracte** de plus en plus vite dans toutes les directions, mais particulièrement suivant celles de module maximum; en sorte que les proéminences dans les plans de symétrie vont s'effaçant, pour disparaître complètement à la température $\alpha\beta$.*

*Dès ce passage, la surface, devenue de révolution et rappelant un ellipsoïde, se **dilate** d'abord très rapidement, puis de moins en moins, dans toutes les directions; mais la croissance reste beaucoup plus accentuée normalement à l'axe optique.*

Beitrag zum Härteproblem *)

Von G. Sachs, Berlin

(Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Metallforschung.)

(Hiezu Tafel IX)

Theoretische Vorstellungen über die Härte

Bei der hohen praktischen Bedeutung der Eindruckhärteprüfung für die Technik sind zahlreiche theoretische und experimentelle Ansätze zu einer systematischen Grundlegung der Härte unternommen worden. Da eine experimentelle Klärung des Materialflusses bei verwickelteren plastischen Vorgängen bisher nicht erreicht worden ist, haben theoretische Vorstellungen über die Härte, besonders diejenigen von HERTZ ¹⁾ und PRANDTL ²⁾ weitgehende Aufmerksamkeit gefunden.

Während HERTZ auf Grund elastizitätstheoretischer Betrachtungen aus der Größe der Kraft beim Eintritt der ersten bleibenden Formänderungen eine Härteziffer entwickelt, versucht PRANDTL die Härte aus dem plastischen Gleichgewichtszustand eines Körpers abzuleiten.

Die Arbeiten von HERTZ haben sehr befruchtend gewirkt, und verschiedene weitverbreitete Härteprüfverfahren führen wahrscheinlich mehr oder weniger unmittelbar auf seine Untersuchungen zurück. Seine Vorstellung von der Existenz einer theoretischen begründbaren «absoluten» Härteziffer haben sich jedoch als unhaltbar erwiesen ³⁾.

PRANDTL nimmt für den Eindruck eines starren Stempels in prismatische Körper mit verschieden geneigten Begrenzungen eine Aufteilung in plastische und elastische Bereiche vor, die mit den von ihm entwickelten Gleichungen in Uebereinstimmung steht. Unter der An-

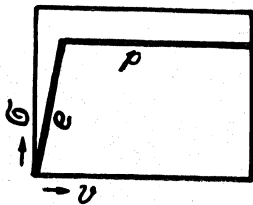


Abb. 1.

Hypothetische Spannungs-Verformungs-Kurve des ideal plastischen Stoffes.

e elastischer Bereich.

p plastischer Bereich.

σ Spannung, v Betrag der Verformung.

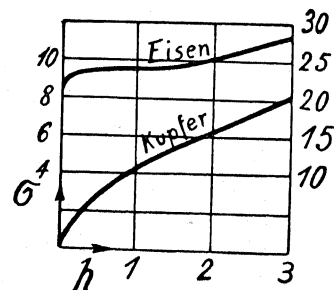


Abb. 2.

Spannungs-Deformationskurven für Eisen und Kupfer bei Stauchversuchen.

h Höhenabnahme in %.

σ Druckspannung in kg/mm².

Eisen: 10, 15, 20, 25, 30.

Kupfer: 4, 6, 8, 10.

nahme einer konstanten Schubspannung im plastizierten Bereich läßt sich dann der Widerstand des Körpers, seine «Härte», berechnen. Und zwar geht PRANDTL von der Vorstellung eines ideal-

*) Die ausführliche Veröffentlichung ist in der Z. f. Techn. Phys. Bd. 8 (1927) S. 132/41 erschienen

¹⁾ H. HERTZ, Journ. f. reine u. angew. Math., Bd. 92 (1881) S. 156/71; Verh. Ver. Bef. Gewerbeleiß (1882) S. 449; Gesammelte Werke Bd. 1.

²⁾ L. PRANDTL, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1920) S. 74; Z. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 1 (1921) S. 15/20.

³⁾ P. Ludwik, Z. Öst. Ing. Arch. Ver., Bd. 59 (1907) S. 191/96, 205/09; G. SACHS, Grundbegriffe der mechanischen Technologie der Metalle, Leipzig 1926, S. 67.

plastischen Stoffes aus, bei dem entsprechend Abb. 1 nach Erreichung eines bestimmten kritischen Wertes der Spannung (Schubspannung) eine Spannungserhöhung ausgeschlossen wird. Die Prüfung der Theorie durch NADAI⁴⁾ an Körpern aus Flußeisen schien die Anschauungen Prandtls zu bestätigen.

Versuchsdurchführung

Von den technisch verwendbaren Metallen zeigt kohlenstoffarmes Eisen in seinem Verhalten eine gewisse Ähnlichkeit mit dem hypothetischen ideal-plastischen Stoffe. Nach Erreichung der Streckgrenze fließt das Material, wie Abb. 2 zeigt, unter nahezu gleichbleibender Spannung weiter, ehe nach einer Deformation von einigen Prozenten der Spannungsanstieg, die «Verfestigung», einsetzt. Die meisten Metalle, wie z. B. Kupfer, zeigen jedoch entsprechend Abb. 2 im Gegensatz zu Stahl keine ausgesprochene Grenze zwischen einem elastischen und plastischen Bereich, sondern ein allmähliches Einsetzen bleibender Verformungen unter ständig wachsenden Spannungen.

Um die Anwendungsmöglichkeiten der PRANDTLschen Theorie zu prüfen, wurden eine Reihe von Versuchen an Kupfer und Flußeisen durchgeführt. Ausgehend von Versuchen, wie sie schon NADAI ausgeführt hat, war hierbei eine schrittweise Annäherung an die technische Form der Härteprüfung beabsichtigt. Wegen großer experimenteller Schwierigkeit hauptsächlich infolge der unvermeidlichen Ungleichmäßigkeit des Materials, die bei den kleinen in Frage kommenden Formänderungen stark in Erscheinung trat, konnten jedoch bisher nur von einem kleinen Teil der Versuche brauchbare Ergebnisse gewonnen werden.

Die Prüfung der PRANDTLschen Anschauung erstreckte sich einerseits auf den Nachweis der Form des plastisierten Bereichs, anderseits auf den Widerstand mit wachsender Eindrucks-tiefe bei verschiedener Gestalt der gedrückten Körper.

Bei den Versuchen wurden prismatische Körper durch einen runden oder prismatischen Stahlstempel in steigendem Maße zusammengedrückt und bei einer Reihe von Lasten die Abmessungen mittels einer Mikrometerschraube und eines Meßmikroskops von REICHERT bestimmt. Nach den Versuchen wurden die Körper, um eine Rekristallisation des plastisierten Teils hervorzurufen, erhitzt und zwar Kupfer auf 750—900°, Eisen auf 800—830°, der Höhe nach zerschnitten und die Querschnitte (möglichst in der Mitte der Körper) angeätzt⁵⁾. Von Eisen wurden auch ungeglühte Querschnitte nach dem Verfahren von FRY⁶⁾ behandelt, um Fließfiguren im Innern zu beobachten.

Nachweis des deformierten Bereichs durch Rekristallisation

Durch Rekristallisation läßt sich der plastisierte Bereich einer vor dem Versuch ausgeglühten Metallprobe nach dem Erwärmen auf höhere Temperaturen nachweisen. An den Stellen, die Deformationen erlitten haben, entstehen dann neue Kristallkörner. Wird daher ein Körper mit gleichmäßig feinem Korn einem Stempелеindruck ausgesetzt und erhitzt, so entsteht entsprechend Abb. 3—6 (Tafel IX) eine rekristallisierte Zone mit grobkörnigem Rand. Dabei sind nach den Gesetzen der Rekristallisation die Kristalle dort am größten, wo die Verformung am kleinsten war, soweit die Verformung überhaupt ausreicht, um eine Rekristallisation hervorzurufen.

⁴⁾ A. NADAI, Z. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 1 (1921) S. 20/28.

⁵⁾ Als Ätzmittel wurde für Kupfer 50 0/0 Salpetersäure | verd. Salzsäure, für Eisen Kupferchlorid + 50 0/0 Salzsäure | konz. Salzsäure gewählt.

⁶⁾ A. FRY, Krupp Mon. H. Bd. 2 (1921) S. 117/26; Stahl u. Eisen, Bd. 41 (1921) S. 1093/97.

Aus den Versuchen an Körpern, die oben horizontal oder nur wenig abweichend davon begrenzt waren, ergeben sich, wie z. B. Abb. 3, 4 und 6 zeigen, für die Grenzen des plastisierten Bereichs im Querschnitt nahezu Kreise. In Abb. 7 sind die einzelnen Zonen der Größe des Kornes, also dem Betrage der Plastizierung nach schematisch wiedergegeben und entsprechend schraffiert. Die stärkste und daher zuerst verformte Zone erstreckt sich sichel-förmig um einen Halbkreis unterhalb des Schneideneindrucks. Darüber bleibt deutlich bei Eisen und bei Kupfer nach kleinen Eindrücken ein schmales unrekristallisiertes, also unverformtes Kissen zurück. Die Grenze des plastisierten Bereichs berührt die Oberfläche sehr dicht neben den Schneidenkanten, so daß das zusammengedrückte Material nur in je einem schmalen Streifen neben der Schneide nach oben heraustritt. Ähnlich ist auch nach Abb. 5 die rekristallisierte Zone beim Eindruck von Schneiden und Kegeln. Bei Körpern, die im Vergleich zur Breite des Stempels verhältnismäßig niedrig sind, reicht nach Abb. 6 die plasti-zierte Zone bis zum Fuß hindurch.

Der beschriebene Befund widerspricht der Anschauung PRANDTLs, die durch Abb. 8 wiedergegeben ist. Die plastizierte Zone drückt sich nicht in Form von Keilen zu beiden

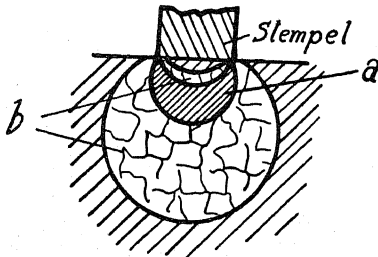


Abb. 7.
Gestalt des rekristallisierten Bereiches bei
gedrückten Körpern,
a stark plastiziert
b schwach plastiziert.

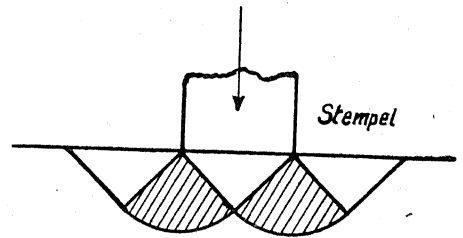


Abb. 8.
Plastizierte Zone (schraffiert) bei einem Stempeldruck
nach der Theorie von Prandtl.

Seiten des Stempels heraus, sondern hat im Querschnitt die Gestalt einer von Kreisen be-
grenzten Fläche.

Die Beobachtungen an horizontal begrenzten Körpern stehen dagegen in Ueberein-
stimmung mit NADAIS Zeichnungen der Fließfiguren an den Stirnflächen gedrückter Flußeisen-
körper und seinen mathematischen Betrachtungen über die Spannungsverteilung bei rein ela-
stischer Beanspruchung. Danach ergibt sich das halbkreisförmige Gebiet unter dem Eindruck-
stempel, in dem plastische Verformungen zuerst auftreten, einfach als die Kurve der größten
maximalen Schubspannungen bei Beanspruchung durch eine gleichmäßig verteilte Last auf der
Schneidenberührungsfläche. Die weiteren Kreisbögen, die in Abb. 7 die Bereiche verschieden
starker Verformung begrenzen, entsprechen den elastizitätstheoretisch berechneten Kurven
konstanter (größter) Schubspannung. Sie gehen theoretisch durch die Kanten der Schneide,
was auch tatsächlich, z. B. in Abb. 6, annähernd der Fall ist. Der große Radius des äußersten
Begrenzungskreises erklärt sich aus der physikalischen Erscheinung der Verfestigung: Durch
bleibende Verformungen werden die davon betroffenen Stoffteilchen härter, und die Verformung
greift auf einen weiteren Bereich über.

Bei verfestigungsfähigen plastischen Stoffen dürfte danach die Plastizierung in der
Weise vor sich gehen, daß zunächst die Stellen größter gleicher Schubspannung bleibend ver-
formt werden. Dann erweitert sich der plastische Bereich nach oben und unten anscheinend

in der Weise, daß die Umgrenzungen angenähert Linien gleicher maximaler Schubspannung im ursprünglichen elastischen Spannungszustande bleiben.

Fließfiguren

NADAI glaubt die Gestalt der bei den Versuchen an Flußeisenkörpern auftretenden Fließfiguren als Bestätigung der PRANDTLschen Anschauung ansehen zu können.

Die bei den ersten Deformationen entstehenden Fließfiguren dürfen jedoch für die Beurteilung der plastischen Deformationen nur mit Vorsicht herangezogen werden. Die langen gekrümmten Linien, wie z. B. in Abb. 10 (Tafel IX), folgen stets ungefähr den Richtungskurven der größten Schubspannung, die in der Regel einen ganz anderen Verlauf haben als die Kurven gleicher maximaler Schubspannung, die nach den Rekristallisationsversuchen den plastischen Bereich begrenzen. Sie verdanken ihr Entstehen einem plötzlichen un stetigen Einsetzen bleibender Formänderungen, bis zu Beträgen von 2 % und mehr. Ihre Entstehung und ihr Verlauf zeigt, wie schon von NADAI⁷⁾ verschiedentlich betont, viel mehr Ähnlichkeit zum Vorgang des Abschiebungsbruches als zu eigentlich plastischen Vorgängen. Dies gilt besonders für die ersten auftretenden Fließfiguren.

Sobald Eisen jedoch in steigendem Maße deformiert wird, zeichnet sich das deformierte Gebiet, wie Abb. 9 (Tafel IX) zeigt, auch äußerlich in gewisser Uebereinstimmung mit den Rekristallisationsversuchen ab. In ähnlicher Gestalt läßt sich auch nach Abb. 10 der bleibend verformte Bereich im Innern durch die Fryschen Figuren und seine erhöhte Lösungsfähigkeit (bei langanhaltendem Ätzen) nachweisen. Der Bereich der Fließfiguren ist größer als der rekristallisierte Bereich, da Fließfiguren schon bei kleineren Deformationen entstehen als durch Rekristallisation nachgewiesen werden können.

Abhängigkeit des Widerstandes von der Probenform und der Eindringtiefe

Der Widerstand eines Körpers gegen die ersten bleibenden Verformungen, seine «Elastizitätsgrenze», hat praktisch keine große Bedeutung. Je feiner die Meßeinrichtung, desto niedriger wird diese Grenze gefunden, nicht nur bei Kristallhaufwerken, sondern auch bei einzelnen Metallkristallen⁸⁾. Und selbst die ausgesprochene Streckgrenze des Flußeisens ist bei inhomogener Beanspruchung verwischt.

Der einfachere und sicherere Weg zum Vergleich der Wirkung verschiedener Beanspruchung, den auch v. KÁRMÁN⁹⁾ bei seinen Versuchen an Marmor eingeschlagen hat, ist daher die Gegenüberstellung der Deformationskurven. Auch ein zahlenmäßiger Vergleich kann dann bei Zugrundelegung entsprechender, nicht zu kleiner Deformationsbeträge einigermaßen zuverlässig durchgeführt werden.

In Abb. 11 sind daher die Spannungen bei wachsender Eindringtiefe für die Flußeisenkörper mit verschiedenen geneigten Begrenzungsflächen (ϑ) aufgetragen. Die Kurven beginnen bei einer Eindringtiefe von 0,5 % der Breite, da sie sich bei kleineren Deformationen verschiedentlich überschneiden und daher in diesem Bereich als wenig zuverlässig angesehen werden.

Den Kurven in Abb. 11 sind die Widerstände der verschiedenen Körper bei 1, 2, 3 und 4 % Deformation entnommen und in Abb. 12 in Abhängigkeit vom Böschungswinkel aufge-

⁷⁾ A. NADAI, Z. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 1 (1921), S. 20/28. Schweiz. Bau-Z. Bd. 83 (1924) S. 6.

⁸⁾ M. POLANYI u. G. SACHS, Z. Phys., Bd. 33 (1925), S. 692/705.

⁹⁾ v. KÁRMÁN, ZVDI Bd. 55 (1911) S. 1749/55; Forschungsarb. VDI, Heft 118 (1912) S. 37/68.

tragen. Für Eisen sind auch anstelle der Streckgrenze die Werte für die Deformation σ durch Extrapolation bestimmt und durch den Wert der Streckgrenze für den gewöhnlichen Druckversuch ergänzt.

Sowohl Abb. 11 wie Abb. 12 zeigen, daß das Verhältnis der Widerstände verschiedener Körper sich mit fortschreitender Deformation nicht wesentlich ändert, daß es also ohne Bedeutung ist, welcher Deformationsbetrag der Betrachtung zugrunde gelegt wird.

Die Abhängigkeit des Eindruckwiderstandes vom Böschungswinkel ist hier teilweise eine andere, als sie sich nach der Theorie von PRANDTL ergibt. Danach soll der Widerstand verschiedener Körper linear mit ihrem Böschungswinkel ϑ anwachsen. Für kleine Winkel ϑ ist diese Forderung der PRANDTLschen Theorie annähernd erfüllt; bei großem Winkel ϑ verändert sich der Widerstand jedoch nur noch wenig. Die durch \times in Abb. 11 angedeuteten Werte von NADAI für die Streckgrenze, die anscheinend an Hand der Beobachtungen von Fließfiguren gewonnen sind und der Theorie von PRANDTL nahezu entsprechen, weichen mit zunehmendem Böschungswinkel immer stärker von den hier gefundenen Werten ab. Dies erklärt sich wohl daraus, daß Fließfiguren keine quantitative Festlegung der Streckgrenze gewährleisten.

In Abb. 12 ist noch mit \circ der Wert eingezeichnet, der sich elastizitätstheoretisch für die Streckgrenze ergibt, unter der Annahme, daß die Schubspannung für das Einsetzen blei-

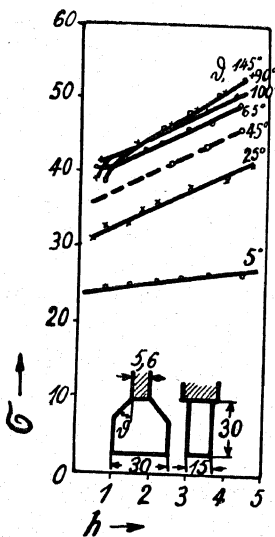


Abb. 11.

Eindruckwiderstand von Eisenkörpern mit zunehmender Eindringtiefe.
 σ Spannung in kg/mm^2 .
 h Eindringtiefe in % der Eindringbreite.

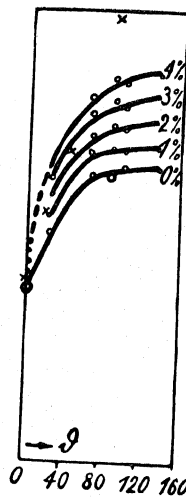


Abb. 12.

Eindruckwiderstand von Eisenkörpern mit verschieden geneigten Begrenzungsflächen.

\times Versuche von Nadai.
 \circ Theoret. Streckgrenze für $\vartheta = 90^\circ$.
 \circ Streckgrenze beim Druckversuch.
 ϑ Neigungswinkel.

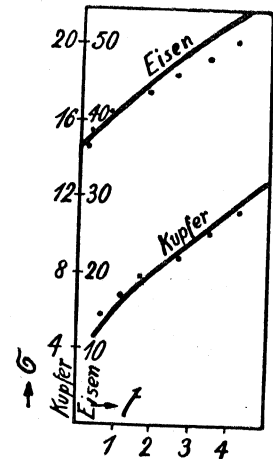


Abb. 13.

Vergleich des berechneten und des beobachteten Spannungsverlaufs bei Eindruckversuchen.

— berechnet, \bullet Versuchspunkte.
 h Eindringtiefe in % der Eindringbreite.
 σ Druckspannung p in kg/mm^2 .

bender Verformungen maßgebend ist. Der experimentelle Befund paßt sich diesem Wert weit besser an als dem um 65 % größeren nach der PRANDTLschen Theorie.

Für den wagerecht begrenzten Körper kann auch, wie Abb. 13 zeigt, die Veränderung des Widerstandes mit fortschreitender Deformation aus der elastizitätstheoretischen Spannungsverteilung ⁴⁾ mit gewisser Annäherung an das Experiment berechnet werden. Die Veränderung der Spannungsverteilung mit fortschreitender Deformation geht also anscheinend sehr langsam vor sich.

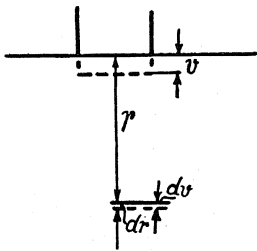


Abb. 14.

Zur Berechnung der
Spannungs-Deformations-
kurven bei Eindruck-
versuchen.

Für die Berechnung der Eindrucktiefe bei einer bestimmten Belastung brauchen dann nur die Höhenabnahmen der Materialteilchen in der Achse bekannt zu sein. Unter der experimentell begründeten Annahme¹⁰⁾, daß einer bestimmten größten Schubspannung eine bestimmte Höhenabnahme zugeordnet werden kann, die entsprechend Abb. 2 einem gewöhnlichen Stauchversuch (für die doppelte Normalspannung) entnommen wird, ergibt sich die Eindrucktiefe v als Funktion der Belastung p nach Abb. 14 zu:

$$v = \int_{r=0}^{r=\infty} dv = \int_{r=0}^{r=\infty} \varepsilon \cdot dr,$$

worin r der Abstand eines Punktes der Achse von der Oberkante ist.

Abb. 13 zeigt die errechneten Kurven im Vergleich zu den Versuchspunkten. Die Uebereinstimmung kann bei nicht zu hohen Genauigkeitsforderungen als ausreichend angesehen werden.

¹⁰⁾ P. LUDWIK, Elemente der technologischen Mechanik, Berlin 1909; G. SACHS, Mech. Technologie, S. 54; P. LUDWIK u. R. SCHEU, Stahl u. Eisen, Bd. 45 (1925) S. 373/81.

Nachschrift bei der Korrektur: Gegen die Schlüssigkeit der Versuchsergebnisse hat Herr PRANDTL in Naturwiss., Bd. 15 (1927), S. 265, und einer Zuschrift an den Verfasser den Einwand erhoben, daß die Proben zu kleine Abmessungen hatten. Weitere Versuche, über die in der Z. f. Techn. Phys., Bd. (1927), S. 132/41, berichtet ist, beeinflussten jedoch die aus den vorliegenden Versuchen gezogenen Schlußfolgerungen nur unwesentlich.

Ueber strenge Lösungen aus der Theorie der Bogenträger

Von Th. Pöschl, Prag

Verschiedene Unstimmigkeiten, die sich bei der Anwendung der Theorie krummer Stäbe ergeben, lassen den Wunsch rege werden, strenge Lösungen zu erhalten, um sie mit den nach der technischen Berechnungsweise gefundenen Ergebnissen vergleichen zu können. So hat z. B. K. WIEGHARDT in einer bemerkenswerten Arbeit, die 1915 in den Berichten der Wiener Akademie erschien, das Problem des elastischen Kreisringes unter dem Einfluß zweier diametraler Einzelkräfte — das Kanalrohr — vollständig durchführen können. Er fand, daß die Werte des Biegemomentes mit denen aus der angenäherten (technischen) Berechnungsweise fließenden recht gut übereinstimmen, wenn auf die Normalkraft keine Rücksicht genommen wird, daß aber die Berücksichtigung der Normalkraft nach dem üblichen Vorgange nicht nur keine Verbesserung, sondern eine Verschlechterung der Uebereinstimmung mit sich bringt. Dieser Umstand hat A. FÖPPL im 3. Bande seiner Vorlesungen (9. Aufl. 1922, S. 219, Fußnote) zu der Bemerkung veranlaßt: «Vorläufig will ich ihn (den bezüglichen Absatz) doch noch stehen lassen, weil es in der Technik nun einmal üblich ist, den Einfluß der Normalkraft in dieser Art abzuschätzen, jedoch mit der Warnung, daß die Ergebnisse mindestens unzuverlässig sind.»

Dieser Sachverhalt muß notwendigerweise gegen die in der Technik übliche Berechnungsweise der Träger mit gekrümmter Mittellinie (Bogenträger) Bedenken erregen und gab die Veranlassung zur Nachprüfung der bezüglichen Rechnungen. Dabei zeigte es sich, daß jene Verschlechterung bei Berücksichtigung der Normalkraft tatsächlich gar nicht eintritt, sobald der Einfluß der Normalkraft nicht nur bei der Verdrehung der Querschnitte (die von A. FÖPPL a. a. O. richtig angesetzt ist), sondern auch bei der Aenderung der Krümmung der elastischen Linie die durch ihre Dehnung bedingt ist, berücksichtigt wird. Es ergibt sich dann, daß mit und ohne Berücksichtigung der Normalkraft für das genannte Beispiel die gleich gute Uebereinstimmung zwischen der genauen (zweidimensionalen) und der technischen (eindimensionalen) Auffassung eintritt.

Die Aufstellung der Grundgleichungen kann dabei — und dies dürfte hier an der klassischen Stätte der Schalentheorie nicht ohne Interesse sein — zweckmäßigerweise nach dem in dieser üblichen Verfahren erfolgen, das auch der Verfasser in der vor kurzem erschienenen zweiten Auflage seiner «Berechnung von Behältern» zusammenfassend dargestellt hat.

Weiterhin wird die strenge Lösung eines anderen Problems angegeben und zwar die einer Halbzyinderschale endlicher Dicke unter Belastung durch Wasserdruck und mit den aus der technischen Theorie folgenden Ergebnissen verglichen. Für dünne Schalen ergibt sich bezüglich der Normalkraft eine sehr gute Uebereinstimmung, bezüglich des Biegemomentes eine weniger gute, doch für die meisten Fälle hinreichende Uebereinstimmung, so daß die übliche angenäherte Theorie der dünnen Schalen und Träger in der Regel als gültig angenommen werden kann.

1. Für die Aufstellung der statischen Gleichungen dünner, biegesteifer, zylindrischer Schalen seien die folgenden Bezeichnungen verwendet: Die Form der Schale sei durch die Gleichung $R = R(\vartheta)$ gegeben, die inneren Kräfte nach Abb. 1 durch S , N und das Biegemoment durch G . Die Belastung für die Längeneinheit der Erzeugenden und der

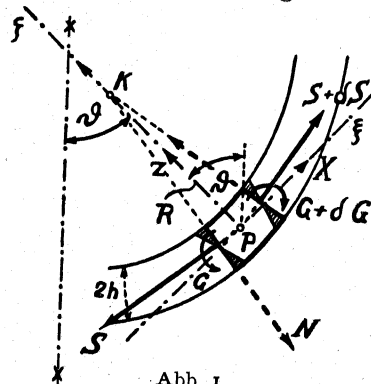


Abb. 1.

Mittelfläche habe die Komponenten X, Z , die ebenfalls bekannte Funktionen von ϑ sind. Statt der Einheitsspannungen werden ihre Summen S, N, G , vermöge der folgenden Gleichungen eingeführt:

$$S = \int_{-h}^{+h} \sigma_t \cdot d\zeta, \quad N = \int_{-h}^{+h} \tau \cdot d\zeta, \quad G = \int_{-h}^{+h} \sigma_t \cdot \zeta d\zeta \quad \dots \dots \dots (1)$$

Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen für das Schalenelement:

$$S' - N + XR = 0, \quad N' + S + ZR = 0, \quad G' - NR = 0 \quad \dots \dots (2)$$

Die Integration dieser drei Differentialgleichungen bringt 3 Konstanten in die Rechnung, die im allgemeinen nur auf dem Wege über die Formänderungen bestimmt werden können. Wie in der Schalentheorie ist auch für die krummen Stäbe das Auftreten der Biegemomente notwendig mit dem der Querkräfte verknüpft. Zur Integration dieser Gleichungen multipliziert man — ganz wie in der Schalentheorie — die ersten beiden dieser Gleichungen mit $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$ und addiere sie, dann erhält man eine Gleichung, die unmittelbar integriert werden kann:

$$S \sin \vartheta + N \cos \vartheta + F(\vartheta) = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

worin

$$F(\vartheta) \equiv \int (X \sin \vartheta + Z \cos \vartheta) R d\vartheta + C_0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

und C_0 eine Konstante bedeutet. Setzt man weiters

$$H(\vartheta) \equiv \frac{F(\vartheta)}{\sin \vartheta} - ZR$$

so findet man für N, S und G die allgemeine Lösung:

$$\left. \begin{aligned} N &= C \sin \vartheta + \sin \vartheta \int \frac{H(\vartheta)}{\sin \vartheta} d\vartheta \\ S &= -C \cos \vartheta - \cos \vartheta \int \frac{H(\vartheta)}{\sin \vartheta} d\vartheta - \frac{F(\vartheta)}{\sin \vartheta} \\ G &= C \int R \sin \vartheta d\vartheta + \int R \sin \vartheta \int \frac{H(\vartheta)}{\sin \vartheta} d\vartheta + C_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

2. Zur Aufstellung der *elastischen Gleichungen* mögen u, w die Verschiebungen parallel zur ξ und ζ -Axe und — ebenfalls genau wie in der Schalentheorie — ω die Verdrehung eines Querschnittes bedeuten:

$$\omega = \frac{u' + w'}{R} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Die Dehnungen einer Schicht im Abstände ζ von der Mittelfläche und dieser selbst sind sodann:

$$\varepsilon_\zeta = \varepsilon - \frac{\zeta}{R} \omega', \quad \varepsilon = \frac{u' - w'}{R} \quad \dots \dots \dots (7)$$

Man erhält daher nach den Gleichungen (1) die beiden Gleichungen, die als die Differentialgleichungen für die Verschiebungen u und w anzusehen sind:

$$S = 2Eh \cdot \frac{u' - w'}{R}, \quad G = -E\mathcal{F} \cdot \frac{\omega'}{R} \quad \dots \dots \dots (8)$$

Bei der Integration dieser Gleichungen werden 3 weitere Konstanten eingeführt, die

zusammen mit den 3 früheren die ganze Mannigfaltigkeit der Lösungen darstellen. Zu ihrer Bestimmung müssen 6 Randbedingungen vorgeschrieben werden, die sich bei einem offenen Bogenstück auf die Enden beziehen; bei einem geschlossenen Ring werden 3 von den 6 Konstanten durch die 3 Gleichgewichtsbedingungen der belastenden Kräftegruppe gegeben, während 3 Konstanten willkürlich bleiben, die eine Bewegung des Ringes als starres Ganzes bedeuten.

3. Für den *Kreisbogen* $R = \text{konst.}$ führen die beiden Gleichungen (8) unmittelbar auf die folgende Gleichung für die Durchbiegung:

$$w'' + w = -\frac{GR^2}{E\mathcal{F}} - \frac{SR}{2Eh} \dots \dots \dots (9)$$

die sich von der gewöhnlich verwendeten durch das letzte Glied unterscheidet.

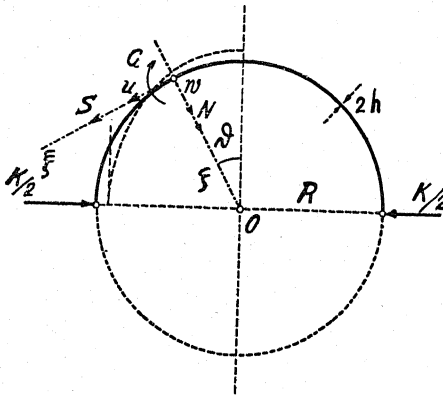


Abb. 2.

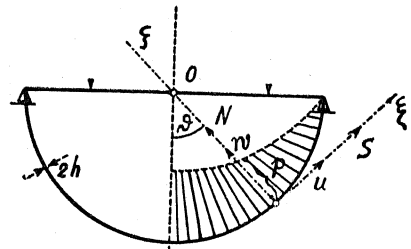


Abb. 3.

Bei dem von K. WIEGHARDT behandelten Beispiele nach Abb. 2 ist zunächst:

$$N = \frac{K}{2} \sin \vartheta, \quad S = -\frac{K}{2} \cos \vartheta, \quad G = \frac{KR}{2} \cos \vartheta + C_1$$

ferner folgt nach Gleichung (9) und der ersten der Gleichungen (8) für das Biegemoment G der Wert:

$$G = -\frac{KR}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right) \dots \dots \dots (10)$$

und insbesondere für $\vartheta = \pi/2$:

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{KR}{\pi}, \dots \dots \dots (11)$$

der von gleicher Größe ist wie ohne Berücksichtigung der Normalkraft.

4. Für einen *Halbkreisbogen*, der durch Flüssigkeitsdruck nach Abb. 3 belastet ist, folgen für die Spannungsgrößen unter Berücksichtigung einer in wagrechter Richtung frei verschieblichen Auflagerung die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{\gamma R^2}{2} \vartheta \cos \vartheta \\ S &= \frac{\gamma R^2}{2} (\cos \vartheta + \vartheta \sin \vartheta) \\ G &= \frac{\gamma R^3}{2} \left(\cos \vartheta + \vartheta \sin \vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

5. Zur *exakten* Behandlung derartiger Probleme nach den Ansätzen der *zweidimensionalen Elastizitätstheorie* eignet sich vor allem die Verwendung der AIRYSchen Spannungs-

funktion, die von F. KLEIN in geometrischem Sinne ausgebaut und von einigen seiner Schüler, insbesondere von A. TIMPE für eine große Anzahl besonderer Fälle angewendet worden ist. Für das Problem des Kreisringsektors, das uns hier interessiert, besteht das Verfahren darin, den Ringsektor zu einem Vollring und die Belastung in dem hinzutretenden Stück so zu ergänzen, daß für den Vollring ein Gleichgewichtssystem resultiert. Für den Vollring ist die allgemeine Lösung bekannt.

Die Komponenten des Spannungstensors ergeben sich durch die zweiten kovarianten Ableitungen von ψ nach den Koordinaten r, ϑ in der Form:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \tau = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \quad \dots \quad (13)$$

Die Funktion ψ genügt der biharmonischen Differentialgleichung $\Delta \Delta \psi = 0$ und ist durch jene Lösung dieser Gleichung gegeben, für welche die Spannungen an den Rändern des Bereiches die vorgeschriebenen Werte annehmen. Dieser rein mechanischen Auffassung der Randwertaufgabe kann die mehr geometrische an die Seite gestellt werden, die darin besteht, eine der Gleichungen $\Delta \Delta \psi = 0$ genügende Spannungsfläche $\psi \equiv \psi(r, \vartheta)$ zu konstruieren, die sich an den Rändern des Gebietes stetig und mit stetiger Tangente an die für die beiden Ränder entsprechend definierten «Belastungsflächen» anschließt. Die Konstanten, die die relative Lage der Belastungsfläche für den Innen- und den Außenrand gegeneinander bestimmen, werden durch die Forderung festgelegt, daß der im Ring auftretende Verzerrungszustand eindeutig sein muß.

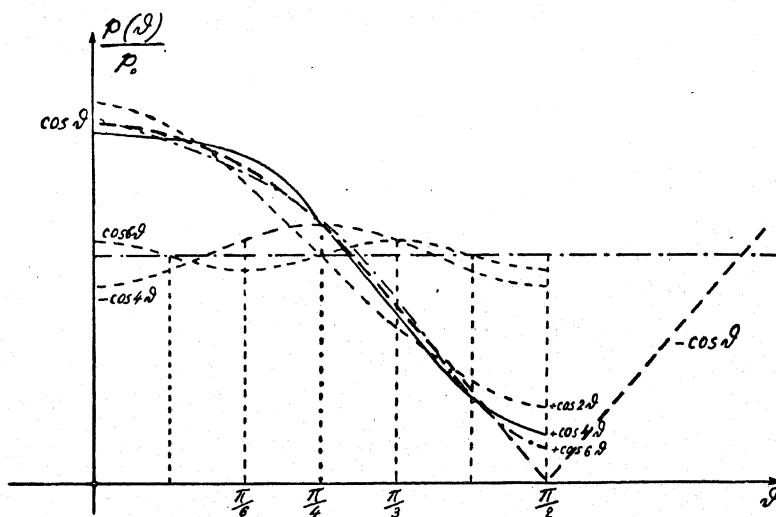


Abb. 4.

6. Die Ausführung des ersterwähnten Vorganges vollzieht sich nun so: die Flüssigkeitsbelastung des Halbringes:

$$p(\vartheta) = \gamma r_0 \cos \vartheta = p_0 \cos \vartheta, \quad p_0 = \gamma r_0,$$

ist nach der oberen Hälfte des inneren Randes so fortzusetzen, wie es in Abb. 4 und 5 angedeutet ist. Es ist also zu setzen:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{für } 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 & p = p_0 \cos \vartheta \\ \text{„ } \pi/2 \leq \vartheta \leq \pi & p = -p_0 \cos \vartheta \end{array} \right\}$$

Da die gesuchte Lösung aus trigonometrischen Elementarlösungen zusammengesetzt

wird, so ist diese Belastungsfunktion in eine nach Vielfachen von ϑ fortschreitende trigonometrische Reihe zu entwickeln. Dabei ergibt sich für das ganze Intervall $0 \leq \vartheta \leq \pi$:

$$p(\vartheta) = \frac{2p_0}{\pi} \left[1 + \frac{2}{3} \cos 2\vartheta - \frac{2}{15} \cos 4\vartheta + \frac{2}{35} \cos 6\vartheta - \dots \right] \dots \dots \dots (14)$$

während die Belastung am Außenrande verschwindet. Bis auf die nächste Umgebung der bei $\vartheta = \pi/2$ auftretenden Spitze ist die Reihe sehr gut konvergent.

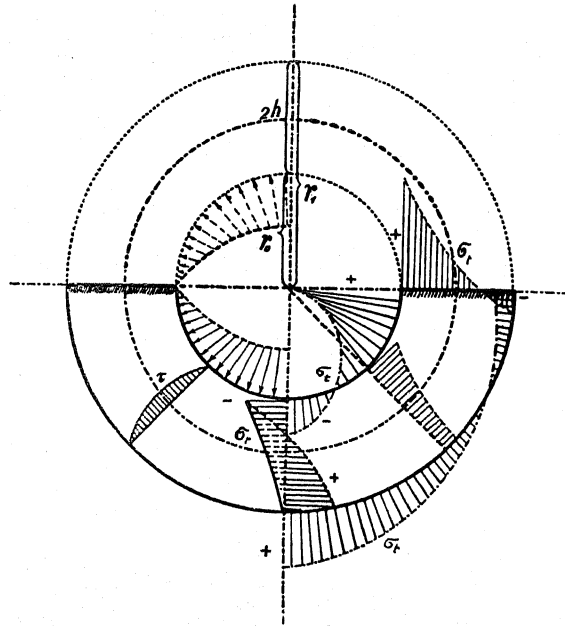


Abb. 5.

Für die Spannungsfunktion ist wegen der Bedingung der Eindeutigkeit des Verzerrungszustandes im Vollringe und wegen des Umstandes, daß die Belastungen an jedem Rand für sich im Gleichgewichte sind, der folgende vereinfachte Ansatz zu verwenden:

$$\psi = a_0 \log r + b_0 r^2 + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left[a_n r^n + b_n r^{n+2} + \frac{\alpha_n}{r^n} + \frac{\beta_n}{r^{n-2}} \right] \cos n\vartheta \dots \dots (15)$$

Rechnet man mittels dieses Ansatzes nach den Gleichungen (13) σ_r und τ aus und bringt die Randbedingungen zur Geltung:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_r]_{r=r_0} &= -p(\vartheta), & [\tau]_{r=r_0} &= 0 \\ [\sigma_r]_{r=r_1} &= 0, & [\tau]_{r=r_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

so erhält man für die Beiwerte der ersten Glieder Ausdrücke von der folgenden Form:

$$a_0 = -\frac{2p_0}{\pi} \cdot \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \quad b_0 = \frac{p_0}{\pi} \cdot \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}, \quad a_2 = -\frac{2p_0}{3\pi} \frac{r_0^2 (2r_1^4 + r_1^2 r_0^2 + r_0^4)}{(r_1^2 - r_0^2)^3}, \text{ usw.}$$

Die Spannungen selbst sind dementsprechend durch die Reihen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + [-2a_2 - 6\alpha_2 r^{-4} - 4\beta_2 r^{-2}] \cos 2\vartheta + \dots \\ \tau &= 2[a_2 + 3b_2 r^2 - 3\alpha_2 r^{-4} - \beta_2 r^{-2}] \sin 2\vartheta + \dots \\ \sigma_t &= -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + [2a_2 + 12b_2 r^2 + 6\alpha_2 r^{-4}] \cos 2\vartheta + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (17)$$

die wieder bis in die Nähe von $\vartheta = \pi/2$ sehr gut konvergent und zur zahlenmäßigen Berechnung gut brauchbar sind. Für die Praxis sind insbesondere die Werte von σ_{II}/p_0 von Wichtigkeit, die in Abb. 5 in ihrer Abhängigkeit von r und ϑ eingetragen sind. Aus dieser Abbildung ist auch die Verteilung der anderen Spannungskomponenten ersichtlich.

7. Um die Verbindung mit der angenäherten Theorie herzustellen, bilden wir nach Gleichung (1) die Summen S , N , G , setzen darin $r_0 = R - h$, $r_1 = R + h$, dann erhalten wir die ersten Glieder von S und G in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S}{p_0 R} &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{h}{R}\right) + \dots = 0,636 \left(1 - \frac{h}{R}\right) \\ \frac{G}{p_0 R^2} &= \frac{1}{\pi} \frac{h^2}{R^2} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Für $\vartheta = \pi/4$ sind die Werte der Größen S , G fast genau durch diese Glieder allein gegeben. Vergleicht man damit die nach der angenäherten Theorie, d. i. nach Gleichung (12) folgenden Werte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S}{p_0 R} &= \frac{4 + \pi}{8 \sqrt{2}} = 0,62 \\ \frac{G}{p_0 R^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4 \sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \right) = 0,151 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

so sieht man, daß für kleine Werte von h/R für S nahezu vollständige Uebereinstimmung herrscht, während für G die angenäherte Theorie für alle h/R , die kleiner sind als $\sqrt{0,151\pi} \sim 0,69$ zu hohe Werte liefert und zwar um so höhere, je mehr h/R abnimmt. Ähnlich liegen die Verhältnisse auch bei anderen Werten von ϑ .

Sur la statique du béton armé

Par A. Signorini, Naples

1. La fig. 1 représente en plan et section un cylindre en béton armé, non soumis à des efforts de masse ni à l'action de forces sur la surface latérale, mais sollicité sur la base S par un système de forces équivalent à la pression normale P appliquée en O : et, naturellement, sur la base S' , par un système de forces équivalent à une force égale et directement opposée à P . Les autres notations de la figure ont une signification évidente.

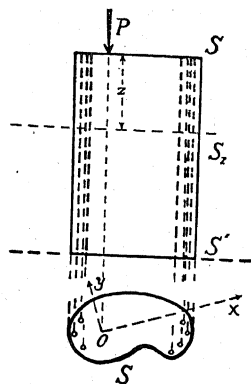


Fig. 1.

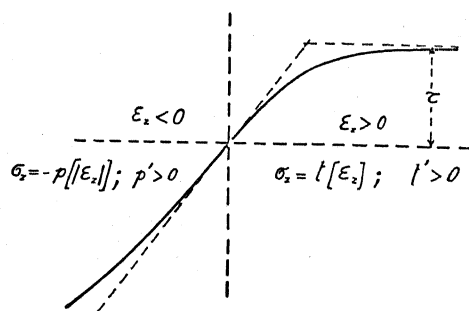


Fig. 2.

Il est bien connu que le diagramme des essais de résistance des bétons (et des maçonneries en général) n'est jamais conforme à la loi de HOOKE, mais, au contraire, il est toujours du type indiqué dans la figure 2.

Dans cette figure, la grandeur de la tension unitaire σ_x est représentée par p ou t , selon qu'il s'agit de pression ou de traction: et l'on adopte la convention de considérer comme argument de chacune des fonctions p ou t , la grandeur de l'allongement unitaire ϵ_x .

La même figure est suffisante à rappeler l'allure du phénomène qui défend d'appliquer au béton la loi de HOOKE: l'on voit bien que, dans la sollicitation à traction, la fonction $t[\epsilon_x]$, croissant ϵ_x , se rapproche assez vite d'une certaine valeur τ , qui ensuite n'est pas dépassée pour n'importe quelle augmentation de ϵ_x . Et même τ est toujours assez petit par rapport à la charge de rupture à traction du béton.

A vrai dire, on ne trouve pas non plus, dans la compression du béton, une grande obéissance à la loi de HOOKE. En adoptant la notation:

$$E_b = \frac{p[|\epsilon_x|]}{|\epsilon_x|}$$

E_b va toujours en décroissant, lorsque croît la grandeur de ϵ_x . Ainsi, si l'on représente par E_0 la valeur de E_b pour une compression très faible, et avec E_b la valeur de E_b , relative au cas où $p[|\epsilon_x|]$ égale la charge de sûreté à compression du béton, k_b , pour les bétons ordinaires on trouve:

$$\frac{E_b}{E_0} = \approx \frac{9}{10}.$$

2. Les hypothèses, universellement adoptées par les techniciens pour résoudre le problème de la pression et flexion du béton armé, peuvent être partagées en deux groupes:

Le 1^{er} groupe correspond à une extension matérielle de quelques-unes des propriétés de

la solution du problème de *Saint-Venant*, avec l'adjonction de l'hypothèse de parfaite adhérence entre béton et armature le 2^e groupe à un schéma de caractère simpliste des résultats des essais de résistance des bétons.

Les hypothèses du 1^{er} groupe, quand elles doivent être énoncées d'une façon précise, se traduisent dans les relations indiquées aux lettres a), b), c), d) du *tableau*: où sont employées, pour les caractéristiques du stress, les charges de sûreté et les modules d'élasticité, les notations habituelles.

La relation b) exprime que les coefficients de dilatation linéaire, suivant la direction z , sont les mêmes qu'on aurait si, dans la déformation du solide, chaque section S_z tournait rigidement d'un angle infinitésimal proportionnel à z , autour d'un même axe, à choisir convenablement dans le plan de S : axe que j'appellerai *axe limite* (voyez n° 5). Naturellement, d représente la distance du point générique du cylindre au plan parallèle à z , passant par l'axe limite: tandis que ω est une constante qui, avec les deux autres nécessaires pour fixer la position de l'axe limite dans le plan de S , demeure disponible pour réaliser les conditions d'équivalence entre les efforts intérieurs agissant sur S et la force P appliquée en O : c'est-à-dire, les trois équations qui, toutes seules, épuisent les conditions d'équilibre aussitôt qu'on admet l'hypothèse a), l'indépendance de σ_z de z et le postulat de SAINT-VENANT.

Les hypothèses du 2^e groupe (spécifiées aux lettres e), f), g) du tableau) correspondent à l'exacte validité de la loi de HOOKE dans la sollicitation à compression du béton et à l'absence complète de résistance à traction pour le même matériel.

Il est sous-entendu que E_m est une constante correspondant à une valeur moyenne de E_b : et il est bien connu que, pour tous les matériaux, la condition de stabilité g) absorbe la première des conditions d).

T A B L E A U

a) $\sigma_x = \sigma_y = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$; b) Hypothèse d'adhérence parfaite entre béton et armature et de conservation des sections planes: $\varepsilon_z = -\omega d.$ c) Validité de la loi de HOOKE dans la sollicitation de l'armature: $\sigma_z = E_a \varepsilon_z \quad (E_a = \text{const.}).$ d) Conditions de stabilité pour l'armature: $k_p \geq E_a \omega d_{max} \quad k_t \geq E_a \omega d_{min} .$	
e) Validité de la loi de HOOKE dans la sollicitation à compression du béton: $\sigma_z = E_m \varepsilon_z \quad (\varepsilon_z < 0).$	e') Dans le béton, pour $\varepsilon_z < 0$, $\sigma_z = -p[\varepsilon_z].$
f) Complète absence de résistance à traction pour le béton: $\sigma_z = 0 \quad (\varepsilon_z > 0).$	f') Dans le béton, pour $\varepsilon_z > 0$, $\sigma_z = t[\varepsilon_z].$
g) Condition de stabilité pour le béton: $k_b \geq E_m \omega d_{max}$	g') Condition de stabilité pour le béton: $k_b \geq p_{max}$
THÉORIE ORDINAIRE	THÉORIE GÉNÉRALISÉE

Considérons l'aire plane non homogène A , obtenue en attribuant à la section S_b du béton et à la section S_a de l'armature des densités proportionnelles aux modules respectifs d'élasticité, E_m et E_a : naturellement, j'appellerai axe neutre la droite antipolaire du centre de pression par rapport à l'ellipse centrale de A .

L'hypothèse f) n'entre pas en jeu chaque fois que la section du béton n'est pas coupée par l'axe neutre: alors toute la section du cylindre est sollicitée à compression, l'axe limite ne diffère pas de l'axe neutre et toute chose se passe comme s'il s'agissait de la flexion et compression d'un cylindre élastique (non homogène). Si, au contraire, l'axe neutre coupe la section du béton, l'axe limite l ne coïncide plus avec lui: cependant on sait bien que, dans ce cas, si l'on indique avec P la région de S_b située par rapport à l du même côté de O , l coïncide avec l'axe neutre de O par rapport à l'aire plane non homogène obtenue en attribuant à P et à l'entière S_a , des densités proportionnelles à E_m et E_a .

3. Il m'a paru qu'il valût la peine d'essayer la valeur des hypothèses de la théorie ordinaire, en généralisant ses hypothèses en d'autres qui représenteraient mieux les résultats des essais de résistance des bétons, pour confronter ensuite les résultats de la théorie plus générale ainsi bâtie avec ceux de la théorie ordinaire¹⁾.

On ne peut penser à renoncer aux hypothèses $a)$ et $b)$: notamment à l'hypothèse de conservation des sections planes et de parfaite adhérence entre béton et armature. En effet, c'est proprement de cette hypothèse que dépend la réduction des inconnues du problème à un certain nombre de paramètres au lieu d'un certain nombre de fonctions; circonstance qu'on cherche toujours à réaliser dans la solution des problèmes techniques.

Alors, sans toucher aux hypothèses $a)$, $b)$ et $c)$ supposons les hypothèses $e)$, $f)$ remplacées par les hypothèses $e')$, $f')$ analytiquement beaucoup plus générales: ce qui laisse une très large marge pour la représentation la plus fidèle des résultats des essais de résistance parce que les propriétés déjà spécifiées pour les fonctions p , t sont spontanément suggérées par les expériences les moins exactes.

Après cela, on peut établir sans la moindre incertitude que le complexe des hypothèses $a)$, $b)$, $c)$, $e')$, $f')$, en correspondance avec chaque sollicitation extérieure, quelle que soit la forme de la section et la distribution des armatures donne toujours lieu à une et à une seule solution du problème, ce qui, ayant désormais représenté de la manière la plus fidèle les résultats des essais de résistance, correspond, il me semble, à une confirmation satisfaisante de la légitimité des hypothèses $a)$ et $b)$ qui étaient restées toutes seules à avoir l'apparence d'intruses.

La démonstration du théorème d'existence et d'unicité que je viens d'énoncer coïncide avec la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du système:

$$\left. \begin{aligned} P &= \int_P p [\omega (\Xi - \xi)] dS_b - \int_T t [\omega (\xi - \Xi)] dS_b + \omega E_a \int_{S_a} (\Xi - \xi) dS_a; \\ 0 &= \int_P \xi p [\omega (\Xi - \xi)] dS_b - \int_T \xi t [\omega (\xi - \Xi)] dS_b + \omega E_a \int_{S_a} \xi (\Xi - \xi) dS_a; \\ 0 &= \int_P \eta p [\omega (\Xi - \xi)] dS_b - \int_T \eta t [\omega (\xi - \Xi)] dS_b + \omega E_a \int_{S_a} \eta (\Xi - \xi) dS_a. \end{aligned} \right\} (S)$$

En écrivant ces équations, j'ai représenté par T la région de S_b située par rapport à l du côté opposé à O ; par ξ l'axe d'anomalie inconnue J conduit par O normalement à l'axe

¹⁾ V. A. SIGNORINI. «Sulla statica del cemento armato» [Rend. del Seminario matematico della R. Univ. di Roma, 1924—25, serie 2^a, vol. III].

limite; par Ξ la distance aussi inconnue du centre de pression à l'axe neutre; la troisième inconnue est la ω qui intervient dans l'énoncé de la loi de conservation des sections planes. Il reste sous-entendu que si l'axe limite ne coupe pas la section du béton, P coïncide avec l'entière S_b et T est nul; tandis que, dans le cas contraire, les champs d'intégration P et T dépendent des inconnues Ξ, J .

J'esquisse le procédé de démonstration²⁾, parce que cela donnera lieu à mettre en évidence quelques circonstances d'un certain intérêt. J'appelle G_a, G_b les centres de gravité de S_a, S_b ; ε le nombre positif défini par l'équation

$$P = S_b p[\varepsilon] + S_a E_a \varepsilon :$$

G_p le barycentre des deux points G_a, G_b respectivement chargés des poids

$$S_b p[\varepsilon], \quad S_a E_a \varepsilon.$$

L'on reconnaît facilement que si O coïncide avec G_p , on se trouve dans le cas de pression simple. Ce cas exclu, faisons coïncider l'axe positif x avec le rayon OG_p ; et représentons par (ξ_i, η_i) le couple orthogonal d'origine O correspondant à la valeur i de l'anomalie de l'axe positif ξ_i . On démontre que si, sans changer la valeur de P , on laisse disponible la position du centre de pression, pour toutes les valeurs de i entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et seulement pour elles, il existe une sollicitation du cylindre qui simultanément satisfait aux deux conditions:

1. que son centre de pression O_i appartient à la droite η_i ;
2. que son axe limite l_i est normal et incident à l'axe positif ξ_i .

En même temps, on établit que, pour chacune des sus-dites valeurs de i une telle sollicitation est unique: et que l_i ne diffère pas de l'axe limite correspondant au cas où, en laissant le centre de pression en O , on réduise la section symétrique par rapport à la droite ξ_i en imprimant à chaque tranche infinitésimale de S_a et S_b parallèle à η_i une translation convenable suivant la direction η_i .

La simple infinité de points O_i est bien celle qui, dans la théorie ordinaire est exploitée par les techniciens pour la réduction du problème du cas général au cas symétrique: c'est-à-dire, au cas particulier d'une section pourvue d'un axe de symétrie (orthogonale ou oblique) et chargé sur le même axe.

La démonstration du théorème d'existence et d'unicité s'achève en établissant que si i croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ le point O_i décrit une courbe fermée en partant de la position G_p , et en y revenant après s'être superposé une, et une seule fois, à O (pour $i = J$).

Dans le cours de la démonstration, on établit une certaine relation laquelle, dans le cas particulier de la théorie ordinaire, met en évidence que, parmi toutes les sollicitations Σ_i , le maximum de la pression unitaire en O correspond à la sollicitation de centre O .

Mais, en restant toujours dans le champ de la théorie ordinaire, la valeur de la pression unitaire en O , pour chacune des sollicitations Σ_i est proportionnelle au travail de déformation. Cela suffit pour la démonstration d'un théorème qui rappelle le célèbre théorème de MENABREA dans la statique élastique «*Parmi toutes les sollicitations Σ_i le maximum du travail de déformation correspond à la sollicitation de centre O .*»

²⁾ V. A. SIGNORINI «Un teorema di esistenza e di unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione», [Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. II, serie 6^a, Roma, 1925]: «Sulla pressoflessione del cemento armato», [Annali di Matematica, Milano, 1927].

4. Après avoir établi le théorème d'existence et d'unicité, je n'ai pas du tout pensé à déduire de sa démonstration un procédé exact de calcul pour les trois inconnues ω , Ξ , J et les valeurs correspondantes des maxima de tension à introduire dans les conditions de stabilité. Un tel procédé aurait été trop complexe pour les applications techniques: et même du côté purement théorique, sa complexité aurait paru injustifiée à cause de la nécessaire intervention de l'expression exacte des fonctions expérimentales p et t ; expression exacte qu'on ne peut songer à déduire des diagrammes des essais de résistance, essais qui se rapportent toujours au béton non armé.

J'ai donc préféré chercher s'il était possible d'obtenir des conditions de stabilité suffisantes à l'égard de la théorie générale, par le simple emploi de la théorie ordinaire rapportée, non pas aux données effectives de la question, mais à des données auxiliaires: précisément à des données auxiliaires déduites des données effectives par des corrections simples, qui ne feraient intervenir que des éléments faciles à déduire, de façon certaine, des diagrammes des essais de résistance.

Référons-nous au cas symétrique, avec l'adjonction de l'hypothèse que le centre de pression soit intérieur à la section.

Appelons S' ce que devient la section effective si, sans toucher à la section de l'armure, l'on modifie la section du béton en raccourcissant dans le rapport E_s/E_o toutes les cordes parallèles à y et correspondantes à des valeurs négatives de x , comme il est indiqué dans la figure.

Alors, si la section S' , sollicitée en O par notre charge P , est stable à l'égard de la théorie ordinaire — au moins lorsqu'on pose $E_m = E_o$ et l'on remplace k_t par $\frac{E_s}{E_o} k_t$ — le même se vérifie pour la section effective à l'égard de la théorie générale³⁾.

La correction qui intervient dans ce théorème n'exploite aucun élément relatif au diagramme un peu douteux de la fonction t , mais, par contre, elle exploite seulement le rapport $\frac{E_s}{E_o}$, pour lequel il est facile de déduire des essais de résistance une valeur très approchée, ou, au moins, une bonne limite inférieure, qui sert également pour le but cherché. La même correction est de telle forme qu'elle s'adapte non seulement aux vérifications de stabilité, mais aussi aux calculs de projet.

Pour la démonstration du théorème, on établit d'abord que l'axe limite de S , dans la théorie générale, est toujours plus loin de O que l'axe limite de S' dans la théorie ordinaire.

Cette 1^{re} partie de la démonstration est indépendante de l'hypothèse que O soit intérieur à la section: tandis que, ensuite, le cas considéré se distingue de celui que O soit extérieur à la section.

Lorsque O est extérieur à la section, on peut donner plusieurs formes à la correction qui permet de ramener les calculs de résistance relatifs à la théorie générale, dans le domaine de la théorie ordinaire: parmi lesquelles il y en a une qui, lorsqu'on néglige la résistance à traction du béton, se réduit à l'agrandissement de la charge effective dans le rapport $\frac{E_o}{E_s}$ (sans aucune modification de la section).

5. Déjà à ce moment les procédés de calcul de la théorie générale sont ramenés à ceux de la théorie ordinaire.

³⁾ V. A. SIGNORINI «Sulla pressoflessione delle murature» [Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. II, serie 6^a, Roma, 1925].

Pour elle, on possède, comme il est bien connu, plusieurs procédés, spécialement graphiques, de détermination de l'axe limite: c'est-à-dire, de l'élément qui, dans cette théorie, conduit immédiatement et complètement à la résolution du problème de la flexion et compression.

Un procédé qui, peut-être, parfois pourrait être préféré par ceux qui aiment à faire usage des machines à calculer, découle du théorème que je vais énoncer en me rapportant toujours au cas symétrique. Soit n l'axe neutre de l'aire non homogène S_m obtenue en attribuant à S_b et S_a des densités proportionnelles à E_m et E_a .

Représentons ensuite par n' l'axe neutre de l'aire non homogène S'_m déduite de S_m en supprimant la région de S_b situé par rapport à n du côté opposé à O , et, par un procédé itératif, supposons construite toute la succession d'axes neutres $n, n', n'', \dots n^{(r)}, \dots$. On démontre que, dans tous les cas, à mesure que r croît, l'axe neutre $n^{(r)}$ va toujours en s'approchant de O : d'où l'on déduit tout de suite qu'il existe une position limite de $n^{(r)}$ qui ne diffère pas de l'axe limite de la section initiale.

Naturellement, si on se contente de connaître une mince tranche dans laquelle soit compris l'axe limite, le procédé que je viens d'indiquer peut être réduit à la construction d'un nombre fini d'axes neutres.

Et cela veut dire que la résolution du problème de la compression et flexion, en dernière analyse, reste toujours ramené à la construction d'un nombre fini d'axes neutres.

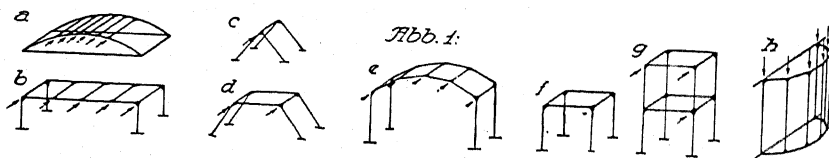
Allgemeine Theorie der Wirkung von Querriegeln bei zweirippigen Bogenbrücken

Von A. Hawranek, Brunn

Die räumliche Beanspruchung, besonders die der Querbelastung von Bogenbrücken bei Fahrbahn oben, dann von Bogenrippen mit angehängter Fahrbahn ohne obere Querverbindungen wurde in dem Buche des Verfassers¹⁾ eingehend behandelt und durch Beispiele belegt. Ebenso finden sich dort die nötigen Gleichungen für die Berechnung von Bogenrippen mit *einem* und mit *zwei* Querriegeln (S. 84) für Querbelastung.

Wenn selbst bei kleinen Spannweiten die Spannungen infolge von Querlasten 40 % der Wirkung von Eigengewicht, zufälliger Last und Wärme betragen können, so ist bei den in letzter Zeit ausgeführten großen Spannweiten mit Fahrbahn unten ($l = 131,80$ m mit bloß 2 Querriegeln) und noch größeren zu erwartenden eine nähere Untersuchung notwendig.

Dabei handelt es sich um die Windbelastung nicht allein, sondern es kann auch der Fall der längs einer Tragwand wirkenden Längsstreifenbelastung der Fahrbahn (Belastung



eines Geleises einer zweigeleisigen Brücke) sinngemäß behandelt werden. In Abb. 1 ist eine Anzahl von räumlichen Tragwerken des Brücken- und Hochbaues wiedergegeben, die vornehmlich aus zwei ebenen Tragwerken bestehen und Querverbindungen aufweisen. Sie lassen sich bei Querbeanspruchung nach den folgenden Entwicklungen berechnen.

Allgemeine Theorie der Verbindung von zwei Bogenrippen mit mehreren Querriegeln

Voraussetzungen. Mit Rücksicht auf die Erfordernisse der Praxis wird eine *symmetrische* Anlage des Tragwerkes, seiner Querriegel und der Querbelastung angenommen, wie wohl aus den gewonnenen Gleichungen die allgemeinen für nicht symmetrische Belastung sofort angeschrieben werden können. Die beiden Bogenrippen sind an ihren Enden *eingespannt* und beliebig geformt, die Querriegel an die Bogen steif angeschlossen. Von der Fahrbahnkonstruktion wird die Windbelastung auf die Bogen nicht übertragen²⁾; es sind also die Hängesäulen nicht biegesteif, was eine Ausbildung in Rundisen oder einer nachträglichen Betonierung entspricht. Außerdem sollen alle Riegel in gleicher Weise ausgebildet sein. Längsbelastungen der Brücke (Bremswirkungen) werden nicht berücksichtigt.

¹⁾ DR. HAWRANEK, «Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrücken». W. Ernst & Sohn, Berlin 1919. Siehe auch DR. HAWRANEK, «Weitgespannte Bogenbrücken». Österr. Wochenschr. f. d. öff. Bau-
dienst 1918, sowie Beton und Eisen 1918. Mitteilungen des deutschen Ing.-Vereins in Mähren 1917.
²⁾ Siehe Schlußnote in der Zusammenfassung am Ende der Abhandlung.

In Abb. 2 ist das räumliche System bei Querbelastrung wiedergegeben. Die beiden Bogen I und II sind durch Windkräfte W_1, W_2 in den Riegelanschlusßpunkten 1, 2... 1' 2'... belastet. Jeder Bogen soll außerdem lotrechte Lasten P_1, P_2 , die aber symmetrisch angenommen werden, tragen. Die Riegel sind behufs Lösung der Aufgabe in ihren Mittlen durchschnitten. Dort

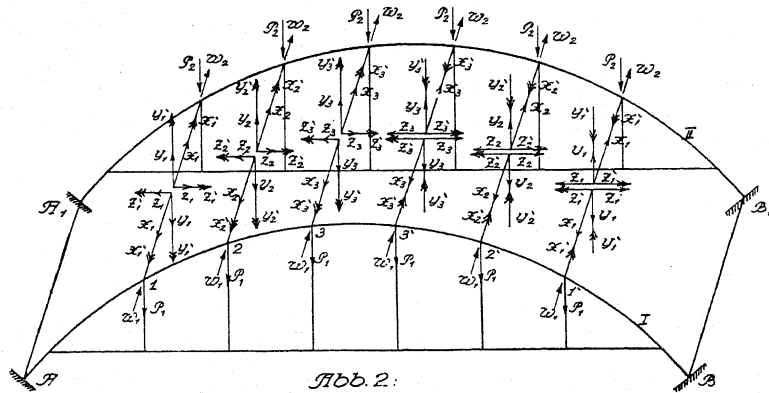


Abb. 2:

werden je 6 statisch unbestimmte Größen angebracht, und zwar 3 Kräfte X, Y, Z , drei Momente X', Y', Z' . Sie erhalten den jeweiligen Zeiger des Riegels. Die Momente sind vektoriell dargestellt, ihr Drehungssinn ist gegen den zweispitzigen Pfeil gesehen, rechts drehend, positiv angenommen.

Als statisch unbestimmtes Hauptsystem wird der eingespannte Bogen angenommen, dessen statische Größen und Verschiebungen für Belastungen durch Kräfte und Momente in seiner Ebene bekannt seien.

In diesem Falle sind bei symmetrischer Anordnung und n Riegeln $3(n-1) + 3$ Unbekannte zu berechnen, wenn n eine ungerade Zahl ist und $3n$ bei geradzahlen n .

1. Formänderungen des Bogens.

- Im Hauptsystem, bei durchschnittenen Riegeln, ergeben sich in irgend einem Bogenpunkte die Formänderungen infolge der gegebenen Belastungen W_1, W_2, P_1, P_2 nach Abb. 3 für die Bogen I, II

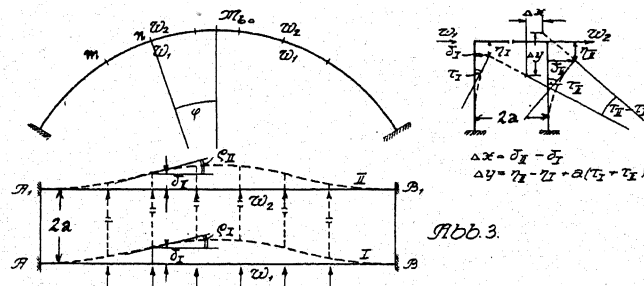


Abb. 3.

wagrechte Querverschiebungen δ_I, δ_{II}

lotrechte Verschiebungen η_I, η_{II}

Verdrehungen um eine wagrechte, in der Bogenebene liegende Achse τ_I, τ_{II}

Verdrehungen um eine lotrechte Achse ρ_I, ρ_{II}

- b) Bei Beseitigung der äußeren Angriffskräfte sind die wagrechten, lotrechten Verschiebungen und Verdrehungen eines Bogenpunktes m in der Tragwandebene infolge einer in n angreifenden

lotrechten Last	$V = 1$	ξ'	η'	ζ'
wagrechten Last	$H = 1$	ξ''	η''	ζ''
eines Momentes	$M = 1$	ξ'''	η'''	ζ'''

- c) Im eingespannten Bogenträger sind die *wagrechten* Querverschiebungen, die *wagrechten* Querverdrehungen (um eine wagrechte Achse), die *lotrechten* Querverdrehungen (um eine lotrechte Achse) in m für eine in n angreifende

Querlast	$P = 1$	δ'	τ'	ρ'
für ein wagrechtes Moment $M_1 = 1$ (Vektor wagrecht)		δ''	τ''	ρ''
für ein lotrechtes Moment $M_2 = 1$ (Vektor lotrecht)		δ'''	τ'''	ρ'''

Beide Vektoren in der Tragwandebene.

Alle Formänderungen erhalten noch den Doppelzeiger mn (m Ort der Formänderung, n Lastort).

Weil es sich bei Windvollast um eine symmetrische Hauptbelastung handelt, sollen alle Formänderungen für zwei symmetrische Wirkungen gelten.

Zur Ermittlung aller notwendigen Formänderungsgrößen bei Querbeanspruchungen sind die nötigen Formeln im Abschnitt III, Seite 70, die zur Bestimmung von Einflußlinien dieser Größen notwendigen rechnerischen und zeichnerischen Wege in Abschnitt IV, S. 75, in dem schon erwähnten Buche angegeben; hier gelten sie als gegeben.

2. Formänderungen der Riegel.

Wir bezeichnen die Querschnittsfläche eines Riegels mit F_1 , das Trägheitsmoment für dessen wagrechte Achse J_1 , für die lotrechte Achse J_2 und setzen die Riegelänge (Abstand der Bogenträger) $2a$.

Ist ϑ die spez. Verdrehung des Riegels für ein Drehmoment $X' = 1$, so erhält man die

Gesamtverdrehung der Riegelhälfte $X'a \vartheta$

die Zusammendrückung in der X -Richtung $\frac{Xa}{EF}$

Für die Wirkung der lotrechten Kraft Y an der Schnittstelle

die lotrechte Verschiebung $\frac{Ya^3}{3EJ_1}$

die Verdrehung $\frac{Ya^2}{2EJ_1}$

Für die Wirkung des Momentes Z'

die lotrechte Verschiebung $\frac{Z'a^2}{2EJ_1}$

die Verdrehung $\frac{Z'a}{EJ_1}$

Für die Wirkung der wagrechten Kraft Z

$$\text{die wagrechte Verschiebung} \quad \frac{Z a^3}{3 E J_2}$$

$$\text{die wagrechte Verdrehung} \quad \frac{Z a^2}{2 E J_2}$$

Für die Wirkung eines wagrechten Momentes Y'

$$\text{die wagrechte Verschiebung} \quad \frac{Y' a^2}{2 E J_2}$$

$$\text{die Verdrehung} \quad \frac{Y' a}{E J_2}$$

Sollten die Riegel einen veränderlichen Querschnitt haben, so sind die bezüglichen Werte aus der Biegelehre ableitbar.

Für den rechteckigen Querschnitt des Riegels mit der Breite b und der Höhe h ist, wenn $h > b$, der spez. Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \left(3 \cdot 645 - 0,06 \frac{h}{b} \right) \frac{(b^2 + h^2)}{g b^3 h^3}$$

Ist $h < b$, so ist im ersten Klammerausdruck h und b zu vertauschen. G ist der Gleitmodul; $\frac{E}{G}$ ist $2 \cdot 2 - 2 \cdot 3$ für *Beton* zu setzen. Für Ausführungen in *Eisen* kann näherungsweise nach Föppl für Querschnitte, die aus dünnen Rechtecken zusammengesetzt sind (I-Träger, Blechträger mit den Einzellängen b und Dicken h), gesetzt werden

$$\vartheta = \frac{3}{g \sum b h^3}$$

Neuere Ergebnisse für verschiedene andere Querschnittsformen finden sich in *Weber*: Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1921, Nr. 249, S. 68.

3. Aufstellung der Gleichungssysteme.

Mit den ermittelten Formänderungen des Bogens und der Querriegel können die Gleichungen aufgestellt werden. In denselben ist auf das Vorzeichen der Formänderungen keine Rücksicht genommen, letztere ergeben sich bei der Berechnung der Formänderungen selbst.

Es werden also für jede Riegelschnittstelle die Gesamtverschiebungen bzw. Verdrehungen Null gesetzt und ergeben die

Gleichungsgruppe	I für die Verschiebung in der X-Richtung					
"	II	"	"	"	"	Y-
"	III	"	"	"	"	Z-
"	IV	"	"	Verdrehung um die	X'-Achse	
"	V	"	"	"	"	Y'-
"	VI	"	"	"	"	Z'-

Die Gleichungen sind in dem folgenden Gleichungsschema Seite 288 derart eingetragen, daß jede Verschiebungsgröße mit der in der Kopfzeile eingetragenen Unbekannten zu multiplizieren ist. In der Endkolonne sind die von den Unbekannten freien

Schema des Gleichungssystems für 6 symm. gelegene Querriegel.

a = halbe Riegelänge
 $\frac{a}{3} = a_1, \frac{a}{3} = a_2, \frac{a}{3} = a_3, \frac{a}{3} = a_4, \frac{a}{3} = a_5, \frac{a}{3} = a_6$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	x_1'	x_2'	x_3'	y_1'	y_2'	y_3'	z_1'	z_2'	z_3'	1-fache Formänderung inf. d. Belastung δ
I Umschlag in δ	$\delta_{11} + c$	δ_{12}	δ_{13}										δ_{11}''	δ_{12}''	δ_{13}''	δ_{11}'	δ_{12}'	δ_{13}'	$\delta_{x1} - \delta_{x2}$
	δ_{21}	$\delta_{22} + c$	δ_{23}										δ_{21}''	δ_{22}''	δ_{23}''	δ_{21}'	δ_{22}'	δ_{23}'	$\delta_{x2} - \delta_{x3}$
	δ_{31}	δ_{32}	$\delta_{33} + c$										δ_{31}''	δ_{32}''	δ_{33}''	δ_{31}'	δ_{32}'	δ_{33}'	$\delta_{x3} - \delta_{x1}$
II Umschlag in δ'				$\partial(\xi_{11}' \delta_{11})$	$\partial(\xi_{12}' \delta_{12})$	$\partial(\xi_{13}' \delta_{13})$	$\partial(\xi_{21}' \delta_{21})$	$\partial(\xi_{22}' \delta_{22})$	$\partial(\xi_{23}' \delta_{23})$	η_{11}''	η_{12}''	η_{13}''							$\eta_{x1} - \eta_{x2} + \partial(\xi_{11}' \delta_{11})$
				$\partial(\xi_{21}' \delta_{21})$	$\partial(\xi_{22}' \delta_{22})$	$\partial(\xi_{23}' \delta_{23})$	$\partial(\xi_{31}' \delta_{31})$	$\partial(\xi_{32}' \delta_{32})$	$\partial(\xi_{33}' \delta_{33})$	η_{21}''	η_{22}''	η_{23}''							$\eta_{x2} - \eta_{x3} + \partial(\xi_{21}' \delta_{21})$
				$\partial(\xi_{31}' \delta_{31})$	$\partial(\xi_{32}' \delta_{32})$	$\partial(\xi_{33}' \delta_{33})$	$\partial(\xi_{11}' \delta_{11})$	$\partial(\xi_{12}' \delta_{12})$	$\partial(\xi_{13}' \delta_{13})$	η_{31}''	η_{32}''	η_{33}''							$\eta_{x3} - \eta_{x1} + \partial(\xi_{31}' \delta_{31})$
III Umschlag in δ''				$\partial(\xi_{11}'' \delta_{11})$	$\partial(\xi_{12}'' \delta_{12})$	$\partial(\xi_{13}'' \delta_{13})$	$\partial(\xi_{21}'' \delta_{21})$	$\partial(\xi_{22}'' \delta_{22})$	$\partial(\xi_{23}'' \delta_{23})$	ξ_{11}''	ξ_{12}''	ξ_{13}''							$\xi_{x1} - \xi_{x2} + \partial(\xi_{11}'' \delta_{11})$
				$\partial(\xi_{21}'' \delta_{21})$	$\partial(\xi_{22}'' \delta_{22})$	$\partial(\xi_{23}'' \delta_{23})$	$\partial(\xi_{31}'' \delta_{31})$	$\partial(\xi_{32}'' \delta_{32})$	$\partial(\xi_{33}'' \delta_{33})$	ξ_{21}''	ξ_{22}''	ξ_{23}''							$\xi_{x2} - \xi_{x3} + \partial(\xi_{21}'' \delta_{21})$
				$\partial(\xi_{31}'' \delta_{31})$	$\partial(\xi_{32}'' \delta_{32})$	$\partial(\xi_{33}'' \delta_{33})$	$\partial(\xi_{11}'' \delta_{11})$	$\partial(\xi_{12}'' \delta_{12})$	$\partial(\xi_{13}'' \delta_{13})$	ξ_{31}''	ξ_{32}''	ξ_{33}''							$\xi_{x3} - \xi_{x1} + \partial(\xi_{31}'' \delta_{31})$
IV Umschlag in δ'''				ξ_{11}'''	ξ_{12}'''	ξ_{13}'''	ξ_{21}'''	ξ_{22}'''	ξ_{23}'''	$\partial \partial \partial \xi_{11}'''$	ξ_{12}'''	ξ_{13}'''							$\xi_{x1} - \xi_{x2}$
				ξ_{21}'''	ξ_{22}'''	ξ_{23}'''	ξ_{31}'''	ξ_{32}'''	ξ_{33}'''	$\partial \partial \partial \xi_{21}'''$	ξ_{22}'''	ξ_{23}'''							$\xi_{x2} - \xi_{x3}$
				ξ_{31}'''	ξ_{32}'''	ξ_{33}'''	ξ_{11}'''	ξ_{12}'''	ξ_{13}'''	$\partial \partial \partial \xi_{31}'''$	ξ_{32}'''	ξ_{33}'''							$\xi_{x3} - \xi_{x1}$
V Umschlag in δ''''	ρ_{11}'	ρ_{12}'	ρ_{13}'										ρ_{11}''	ρ_{12}''	ρ_{13}''	ρ_{11}''	ρ_{12}''	ρ_{13}''	$\rho_{x1} - \rho_{x2}$
	ρ_{21}'	ρ_{22}'	ρ_{23}'										ρ_{21}''	ρ_{22}''	ρ_{23}''	ρ_{21}''	ρ_{22}''	ρ_{23}''	$\rho_{x2} - \rho_{x3}$
	ρ_{31}'	ρ_{32}'	ρ_{33}'										ρ_{31}''	ρ_{32}''	ρ_{33}''	ρ_{31}''	ρ_{32}''	ρ_{33}''	$\rho_{x3} - \rho_{x1}$
VI Umschlag in τ	τ_{11}'	τ_{12}'	τ_{13}'										τ_{11}''	τ_{12}''	τ_{13}''	τ_{11}''	τ_{12}''	τ_{13}''	$\tau_{x1} - \tau_{x2}$
	τ_{21}'	τ_{22}'	τ_{23}'										τ_{21}''	τ_{22}''	τ_{23}''	τ_{21}''	τ_{22}''	τ_{23}''	$\tau_{x2} - \tau_{x3}$
	τ_{31}'	τ_{32}'	τ_{33}'										τ_{31}''	τ_{32}''	τ_{33}''	τ_{31}''	τ_{32}''	τ_{33}''	$\tau_{x3} - \tau_{x1}$

Gleichungssysteme für verschiedene Belastungen.

Lotrechte Lasten P_1, P_2

a.

	x	y	z	x'	y'	z'	
I							ϕ
II							$\eta_{x1} - \eta_{x2}$
III							$\xi_{x1} - \xi_{x2}$
IV							$\xi_{x2} - \xi_{x1}$
V							ϕ
VI							ϕ

$$\delta_I = \beta_I = \tau_I = 0$$

$$\delta_{II} = \beta_{II} = \tau_{II} = 0$$

Eigengewicht der Querriegel.

b.

	x	y	z	x'	y'	z'	
I							$2\delta_I$
II							$\frac{\xi \partial^2}{2} (\tau + \phi)$
III							$\frac{\xi \partial^2}{2} \rho''$
IV							ϕ
V							$2\beta_I$
VI							$2\tau_{II}$

Wärmedehnung des Riegels.

c.

	x	y	z	x'	y'	z'	
I							$\phi \epsilon \alpha$
II							ϕ
III							ϕ
IV							ϕ
V							ϕ
VI							ϕ

$$\beta_I = \tau_I = \rho_I = \tau_I = 0$$

$$\xi_{x1} - \xi_{x2} \eta_{x1} - \eta_{x2} \xi_{x2} = \xi_{x2}$$

Wagrechte Lasten W_1, W_2

d.

	x	y	z	x'	y'	z'	
I							$\delta_I - \delta_{II}$
II							$\partial(\tau_I + \tau_{II})$
III							$\partial(\rho_I + \rho_{II})$
IV							ϕ
V							$\rho_I - \rho_{II}$
VI							$\tau_{II} - \tau_I$

$$\xi_{x1} = \eta_{x1} = \xi_{x2} = 0$$

$$\xi_{x2} = \eta_{x2} = \xi_{x1} = 0$$

$W_1 = W_2$

e.

	x	y	z	x'	y'	z'	
I							ϕ
II							$\partial(\tau_I + \tau_{II})$
III							$\partial(\rho_I + \rho_{II})$
IV							ϕ
V							ϕ
VI							ϕ

$$\delta_{II} - \delta_I = 0$$

$$\rho_I - \rho_{II} = 0$$

$$\tau_{II} - \tau_I = 0$$

Glieder angegeben; alle sind mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren. Die Formänderungen sind mit dem E -fachen Wert eingesetzt, wobei noch zur Abkürzung, wenn a die halbe Riegelbreite ist,

$$a_1 = \frac{a}{3 \mathcal{F}_1}, \quad a_2 = \frac{a}{3 \mathcal{F}_2}, \quad a_3 = \frac{a}{\mathcal{F}_2}, \quad a_4 = \frac{a}{\mathcal{F}_1}, \quad c = \frac{a}{F}$$

gesetzt wurde.

Nach diesem Gleichungsschema, das für 6 *symmetrisch* angeordnete Riegel aufgestellt ist, läßt sich unschwer jenes für eine beliebige Zahl von Riegeln übersichtlich anschreiben.

Handelt es sich um eine *ungerade* Anzahl von Querriegeln und bezeichnen wir den mittleren mit 3, dann verschwinden für diesen die Unbekannten Z_3, X'_3, Y'_3 ; es entfallen also die Gleichungen (9), (12) und (15). Außerdem erhalten alle Formänderungsgrößen für diesen mittleren Riegel bzw. für die Riegelanschlußstelle den Faktor $\frac{1}{2}$.

Nach dem MAXWELLSchen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen bzw. Verdrehungen sind die symmetrisch zur rechtsfallenden Diagonale im Gleichungsschema gelegenen Formänderungen gleich und zwar:

$$\delta''' = \rho', \quad \delta'' = \tau', \quad \rho'' = \tau''', \quad \eta''' = \zeta', \quad \xi'' = \zeta''$$

Benötigt werden die Einflußlinien der Formänderungen in der Tragwandebene für $\eta', \eta'', \xi'', \xi''', \zeta'''$ und quer zur Tragwandebene für $\delta', \delta'', \delta''', \tau'', \rho'', \rho'''$.

Sind nur wenige Querriegel vorhanden, so ist das Zeichnen der Einflußlinien für die Formänderungen nicht nötig; man rechnet nur die Verschiebungen bzw. Verdrehungen für die Anschlußstelle.

4. Erörterungen des Gleichungssystems.

Da in dem angenommenen Belastungsfall (P_1, P_2, W_1, W_2) die von den Unbekannten freien Glieder alle von Null verschiedene Werte haben, können die (im vorliegenden Falle) 18 Unbekannten aus den 18 Gleichungen bestimmt werden. Nun zeigt das Gleichungsschema ganz deutlich die Spaltung in zwei von einander unabhängigen Hauptgleichungssysteme (A, B) mit je 9 Gleichungen und je 9 Unbekannten, eines für Verschiebungen bzw. Verdrehungen in X, Y', Z' , das wir A nennen, das andere in Y, Z, X' (B genannt). Auf diese Tatsache hat schon ENGESSER hingewiesen. Hier erscheint sie durch das algebraische Gleichungsbild ersichtlich. An der Hand schematischer Gleichungsdarstellungen sollen verschiedene Belastungen berücksichtigt werden.

a) Lotrechte Belastungen P_1, P_2 .

Wirken *nur lotrechte Belastungen* P_1, P_2 allein, welcher Fall einer Längsstreifenbelastung einer Brücke oder im besonderen Falle einer Belastung der halben Brückenbreite entspricht, so verschwinden die Glieder der letzten Kolonne (Endglieder) für die Formänderungen des Hauptsystems in der Querrichtung X, Y', Z' (Gleichungsgruppe A) und zwar δ_I, ρ_I, τ_I ($\delta_{II}, \rho_{II}, \tau_{II}$), dann sind die bezüglichen Gleichungen homogen. Da die Nennerdeterminante bei diesem steifen Tragwerke von Null verschieden ist, sind alle Größen X, Y', Z' Null. Es bleibt nur das zweite Gleichungssystem B übrig, in welchem die von den Unbekannten freien Glieder nur Formänderungen in der Tragwandebene enthalten: η_I, ξ_I, ζ_I ($\eta_{II}, \xi_{II}, \zeta_{II}$). Aus diesen Gleichungen sind dann die Y, Z, X' zu berechnen.

Sind endlich die beiden Bogenrippen *gleich* belastet $P_1 = P_2$, so werden alle rechten Gleichungsseiten Null und damit auch alle Unbekannten, so daß in diesem Falle die Querriegel unbeansprucht bleiben.

b) *Biegung der Querriegel infolge ihres Eigengewichtes.*

Wollte man die *Biegung der Querriegel* in lotrechten Ebenen infolge ihres Eigengewichtes berücksichtigen, so ist dies gleichfalls möglich. In den Gleichungsgruppen II und III sind die von den Unbekannten unabhängigen Werte zu ändern.

Bezeichnet man zu diesem Zwecke mit g das Gewicht des Riegels pro Längeneinheit, so wird das Hauptsystem am Anschlußpunkt durch das Moment $M_1 = \frac{g a^2}{2}$ beansprucht; die Winkeländerung des Bogens um eine wagrechte Achse ist $\frac{g a^2}{2} \tau''$, da der Riegel selbst eine Winkeländerung an der Schnittstelle von $\frac{g a^3}{6 E \mathcal{F}_1}$ erfährt, so ist die ganze Querverdrehung einer Riegelhälfte

$$\tau_g = \frac{g a^2}{2} \tau'' + \frac{g a^3}{6 E \mathcal{F}_1} = \frac{g a^2}{2} (\tau'' + \alpha_1)$$

Dieser Wert tritt anstelle des von den Unbekannten freien Gliedes in der Gleichung II.

Für die Gleichungsgruppe III ist dieses Glied $\rho_g = \frac{g a^2}{2} \rho''$

c) *Wirkung einer Wärmeausdehnung der Riegel.*

Erhöht sich die Wärme der Querriegel gleichmäßig um t° Cels., so bewegen sich die Bogenrippen des Hauptsystems, wenn sie gleichfalls eine Wärmeänderung erfahren, in lotrechten Ebenen; daher werden $\rho_I = \rho_{II} = \tau_I = \tau_{II} = 0$ (Gleichungsgruppe V, VI), nur die Schnittenden der Riegel bewegen sich wagrecht um $\delta_i = 2 \varepsilon t a$.

In der Gleichungsgruppe I ist dann in der letzten Kolonne

$$\delta_i = E \varepsilon t a$$

zu setzen und mit Gleichungsgruppe V, VI aufzulösen.

d) *Wagrechte Querlasten W_1, W_2 .*

Beim Fehlen von lotrechten Lasten ($P_1 = P_2 = 0$) verschwinden alle in den Tragwänden gelegenen Formänderungsgrößen des Hauptsystems in der letzten Kolonne (Endglieder) für die Wirkungen X', Y, Z (B)

$$\eta_I = \xi_I = \zeta_I = 0 \quad (\eta_{II} = \xi_{II} = \zeta_{II} = 0)$$

In diesem Falle sind jedoch nur die Endglieder der Gruppe IV Null, jene der Gruppe II sind $a (\tau_I + \tau_{II})$, der Gruppe III sind $a (\rho_I + \rho_{II})$

Es wären also beide Hauptgleichungsgruppen A, B aufzulösen. Nun genügt es für die Praxis vollkommen, auch mit Rücksicht auf die heute noch nicht ganz geklärte Windwirkung auf die hintern Brückenhauptträger, den Winddruck auf beide Hauptbogen gleich groß anzunehmen. Es ist also nun $W_1 = W_2$.

Hiebei vereinfacht sich die Rechnung insofern, als die Formänderungen quer zur Tragwandebene für beide Hauptträger im Hauptsysteme gleich groß werden und alle Endglieder des Gleichungsschema, welche Differenzen von δ, ρ, τ enthalten, Null werden.

Es ist

$$\delta_{II} - \delta_I = 0$$

$$\rho_I - \rho_{II} = 0$$

$$\tau_{II} - \tau_I = 0$$

Damit ist die Hauptgleichungsgruppe A homogen und alle X, Y', Z' werden Null. Es ist dann nur die Gleichungsgruppe B aufzulösen.

Sind *zwei symmetrische Riegel* angeordnet, so ergeben sich folgende Gleichungen mit X', Y, Z :

$$Y \left(a^2 \tau'' + \frac{a^3}{3 \mathcal{F}_1} + \eta' \right) + Z a^2 \tau'' + X' \eta'' + a \tau_I = 0$$

$$Y a^2 \rho'' + Z \left(a^2 \rho''' + \frac{a^3}{3 \mathcal{F}_2} + \xi'' \right) + X' \xi'' + a \rho_I = 0$$

$$Y \zeta' + Z \zeta'' + X' (a \vartheta + \zeta''') = 0$$

e) Vereinfachungen.

Da die Verdrehungen der Riegel, namentlich wenn sie schwach ausgebildet werden, gegenüber den andern Wirkungen Y, Z , zurücktreten, kann man näherungsweise die $X' = 0$ setzen.

Für zwei symmetrisch gelegene Riegel lauten dann die Gleichungen mit den zwei Unbekannten Y, Z :

$$Y \left(a^2 \tau'' + \frac{a^3}{3 \mathcal{F}_1} + \eta' \right) + Z a^2 \tau'' + a \tau_I = 0$$

$$Y a^2 \rho'' + Z \left(a^2 \rho''' + \frac{a^3}{3 \mathcal{F}_2} + \xi'' \right) + a \rho_I = 0$$

Sind die statisch unbestimmten Größen aus den Gleichungen gerechnet, so lassen sich die Schnittkräfte des Bogens (Hauptsystem) im Scheitel ermitteln und daraus die Biegungs- und Drehmomente des Bogens sowie dessen Beanspruchungen bestimmen.

5. Zweckmäßige Lage der Querriegel.

An der Hand der tatsächlichen Biegungs- (M_{bx}) und Drehmomente (M_{tx}) in den Bogenpunkten bei Anwendung von Querriegeln und den M_{bx}^0 -, bzw. M_{tx}^0 -Werten für den gleichen Bogen ohne Querriegel läßt sich bei ziffermäßigen Auswertungen der Einfluß der Querriegel erkennen.

In Abb. 4 sind diese Momentenwerte für eine Bogenbrücke mit 5 Querriegeln wiedergegeben (aus «Bautechnik» 1923, S. 488, NAKONZ, Kanalbrücke bei Groß-Wusterwitz). Es werden durch die Riegel in den Biegemomenten der Bogen Ersparnisse von 52,6 %, in den Drehmomenten von 80 % erzielt. Die Endriegel in den Viertelpunkten des Bogens reißen den größten Momentensprung an sich; im Kämpfer werden die Biegemomente des Bogens um 33 % kleiner.

Bei andern Brücken mit nur 2 Querriegeln in den Viertelpunkten wird das Kämpferbiegemoment sogar um 44 % kleiner; die Ersparnisse in den Momentenflächen für Biegung und Verdrehung bewegen sich ungefähr in den gleichen Grenzen.

Die Anordnung von *wenigen* Querriegeln, etwa in den Viertelpunkten, ist besonders günstig, weil dort der Bogenquerschnitt gewöhnlich nicht ausgenutzt ist. Außerdem sind die Biegemomente im Scheitel klein.

Nur in Fällen, wo die freie Bogenlänge mit Rücksicht auf das Knicken zu groß ist, wären noch Zwischenriegel anzuordnen, aber nicht im Scheitel, was in einer andern Abhandlung untersucht wird.

6. Querschnittsformen der Riegel.

In der Abb. 5 findet sich eine Zusammenstellung der statisch unbestimmten Riegelkräfte YZ für eine Brücke mit 2 Riegeln in den Viertelpunkten.

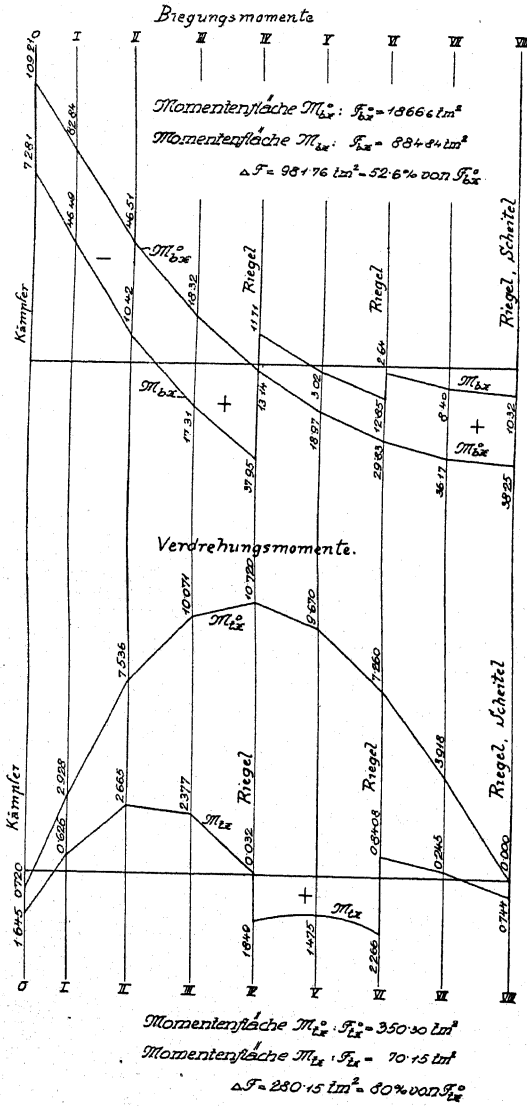


Abb. 4

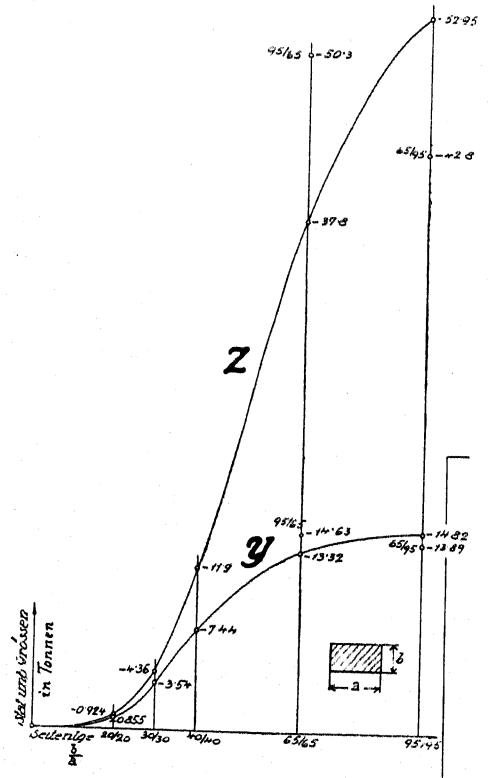


Abb. 5

Um den Einfluß des Riegelquerschnitts, und zwar der Größe wie der Form, auf die statisch unbestimmten Größen YZ zu zeigen, sind für je zwei quadratische Riegelschnitte von 20, 30, 40, 65, 95 cm Seitenlänge die Größen Y und Z gerechnet, man findet, daß mit Zunahme des *Querschnittes* die statisch unbestimmten Größen und die *Bogen- und Riegelbeanspruchungen* wachsen. Hierbei ist der Einfluß auf die wagrechte Kraft viel größer. In einer graphischen Darstellung sind die Seitenlängen der Riegel als Abszissen, die statisch unbestimmten Größen YZ als Ordinaten aufgetragen.

Auch die untersuchten rechteckigen Riegelquerschnitte 65×95 cm, einmal liegend, das andere Mal stehend angeordnet, haben größere Werte der statisch unbestimmten Größen zur Folge als quadratische mit der kleineren Seitenlänge.

Andererseits sieht man, daß bei der Wahl von rechteckigen Riegel-Querschnitten jene Anordnung mit größerer Breite und kleinerer Höhe zweckmäßiger ist als die umgekehrte, da erstere kleinere Y - und Z -Werte liefert.

Außerdem ist aus dem Schaubild zu entnehmen, daß die Z -Werte wesentlich größer sind als die Y -Werte, was sich auch in anderen Fällen ergibt.

Hervorgehoben soll werden, daß es natürlich unzulässig ist, nur die Y -Größen aus einer Gleichungsgruppe ohne Rücksicht auf die anderen Unbekannten zu lösen, oder die Z -Größen unabhängig von den anderen Unbekannten zu ermitteln, denn diese Werte beeinflussen sich gegenseitig.

Faßt man die Erwägungen zusammen, so gelangt man zum Schluß, daß es am wirtschaftlichsten ist, so wenig Querriegel als möglich bei Bogen mit aufgehängter Fahrbahn anzuordnen. Die Lage ungefähr in den Viertelpunkten ist am zweckmäßigsten. Im Scheitel sind Riegel von geringerem Einfluß, daher ihre Anordnung dort nicht zweckmäßig, außer in Fällen, wo die freie Bogenlänge mit Rücksicht auf das Knicken zu groß ist.

Was den Riegelquerschnitt betrifft, so erhöhen starke Riegel die Steifigkeit des Bogens, erfordern aber eine starke Zusatzbewehrung des Bogens und Riegels. Kleinere Querschnitte sind also wirtschaftlicher, und wenn man zu Riegel mit rechteckiger Form greift, ist die flache Lage des Rechtecks günstiger wegen der überwiegenden Z -Kräfte.

Sind die Hängesäulen mit der Fahrbahn und dem Bogen *steif verbunden*, so lassen sich die im Hauptsystem auftretenden Momente für Querbelastung nach dem Buche «Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrücken» mit Hilfe der S. 121 angegebenen 5 Momentengleichungen bestimmen, so daß auch für diesen 2. Hauptfall die Lösung gegeben ist.

Die seitliche Knicksicherheit halboffener Bogenbrücken bei Fehlen einer elastischen Querstützung

Von R. Mayer, Mannheim
(Hiezu Tafel X)

Problemstellung: Nicht immer gelingt es, bei Bogenbrücken die Tragwände gegen seitliches Ausknicken in der bei offenen Brücken üblichen Weise dadurch zu sichern, daß man die Querverbände zu ihrer elastischen Abstützung heranzieht. Letztere werden ja mit zunehmender Höhe des Bogens über der Fahrbahn zum mindesten im quadratischen Verhältnis zu dieser Höhe nachgiebiger und zur Stützung ungeeigneter; auch kann, namentlich bei Ausführung in Eisenbeton die Herstellung einer steifen Eckverbindung zwischen den Hängesäulen und Querträgern auf konstruktive Schwierigkeiten stoßen; bei weitgespannten Brücken endlich muß die Fahrbahn durch Dehnungsfugen unterbrochen werden, deren seitliches Spiel ein gemeinsames Ausweichen je mehrerer Querrahmen ermöglicht, ohne daß ihre Quersteifigkeit vom ausknickenden Bogen wesentlich in Anspruch genommen wird. In solchen Fällen muß die seitliche Sicherung der Brücke dadurch bewirkt werden, daß man, soweit dies die Rücksicht auf die einzuhaltende Mindestdurchfahrtshöhe zuläßt, quer zur Brücke einen meist schon zur Aufnahme der Windkräfte erforderlichen Verband anordnet, der durch sein statisches Zusammenwirken mit den Tragwänden diese zu einem räumlichen System verkettet, welches genügende seitliche Stabilität besitzt. Die Tragwände bilden dann mit dem Querverband einen »gegliederten Druckstab«, der sich von den bisher behandelten Stäben dieser Art dadurch unterscheidet, daß seine »Gurtungen« nach der Bogenachse gekrümmt sind und daß, je nach dem Einfluß, den die Mindestdurchfahrtshöhe auf die Entwurfsgestaltung ausübt, seine Feldteilung ungleich und seine Querverbindungen an verschiedenen Stellen verschieden steif sein können. Gefragt wird nach derjenigen gleichförmigen Belastung der Brücke, bei welcher sie seitlich ausknickt.

Lösung: Wir setzen in der Folge eine flache, nach der Stützlinie gewölbte Bogenbrücke voraus, deren Kämpfer in Kugelgelenken gelagert sind und deren Querverband aus in beiden Hauptrichtungen biegesteif angeschlossenen Querriegeln besteht. Die Querschnitte der Querriegel seien beliebig, aber innerhalb eines Querriegels unveränderlich und mit ihren Trägheitshauptachsen nach der Tangente und Normalen des Bogens orientiert¹⁾. Die Zahl der

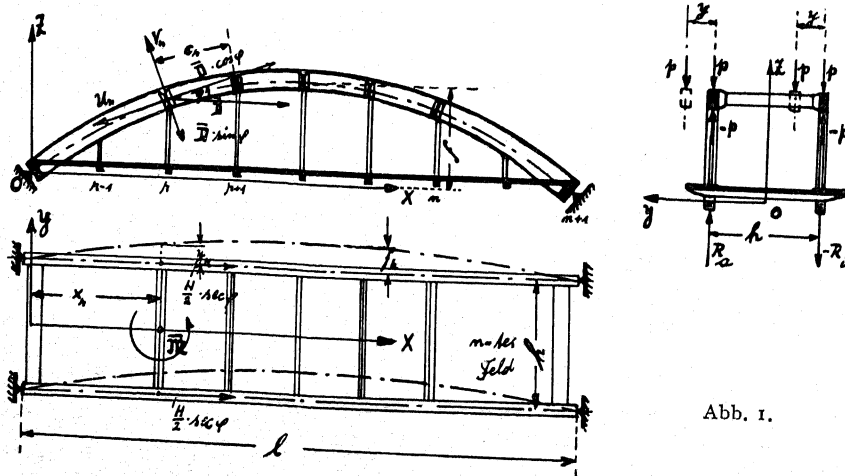


Abb. 1.

¹⁾ Eine Behandlung des Problems für andere Querversteifungen und andere Randbedingungen erscheint demnächst voraussichtlich im „Beton und Eisen“.

Knotenpunktslasten sei so groß, daß mit einer gleichförmigen Belastung der Bogensehnen gerechnet werden darf.

Wir beziehen die Brücke auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $OXYZ$, dessen Lage aus Abb. 1 hervorgeht. Seien

E, G, m Elastizitäts-, Gleitmodul und Poissonsche Zahl des Baustoffs,

p die Belastung der Längeneinheit der Sehne einer Tragwand,

H der Horizontalschub der ganzen Brücke,

φ der Winkel der Bogentangente mit der XY -Ebene,

$\Delta \varphi_r = \varphi_r - \varphi$ der Unterschied der Winkel φ_r am r . Knotenpunkt und an beliebiger Stelle,

\mathfrak{M} das Biegemoment der ganzen Brücke beim Ausknicken,

\mathfrak{D} das Torsionsmoment der ganzen Brücke beim Ausknicken,

M, D die entsprechenden Momente für eine Tragwand,

F', J Querschnittsfläche und Trägheitsmoment einer Tragwand bezüglich der Bognormalen,

T die Torsionsfunktion eines Tragwandquerschnitts, definiert durch die Drallbeziehung

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = \frac{D}{GT},$$

F'', X, Y Querschnittsfläche und Trägheitsmoment des Querriegelquerschnitts bezüglich Bogen-tangente und Bognormale,

U, V Querkraftskomponenten in Querriegelmitte in Richtung von Bogentangente und Bogen-normale,

ξ Abscisse eines Stabquerschnitts, bei den Tragwänden vom Knotenpunkt mit der kleineren Ordnungsziffer ab, bei den Querriegeln von deren Mitte ab gemessen.

Die Bögen mögen unter der Last p seitlich ausknicken mit dem Pfeil f_k , so ist die Gleichung der Knicklinie einer Tragwand $y = f_k \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$. Beim seitlichen Ausknicken treten

(und hierin unterscheidet sich das vorliegende Problem in bemerkenswerter Weise von dem des ebenen, gegliederten Druckstabes) die Lasten p mit den Bögen in gleichem Maß aus ihrer früheren Wirkungsebene heraus, so daß das Tragwerk sowohl auf Biegung als auch auf Torsion beansprucht wird.

Die Lichtbilder, Abb. 2 und 3 (Tafel X), zeigen die statische Wirkung des Systems hierbei sehr deutlich; sie sind Aufnahmen von Kartonmodellen unter kritischen Lasten. Man erkennt an dem Modell Abb. 2, dessen Querriegel so angeordnet sind, daß sie gegen Verbiegung in Richtung der Bognormalen geringen Widerstand bieten, die Verwindung der Tragwände und die S-förmige Verbiegung der Querriegel, welche der Torsion der Tragwände entgegenwirken; bei dem Modell Abb. 3, dessen Querriegel nach der Bogentangente leicht verbogen werden können, werden die Tragwände wesentlich auf Biegung in Anspruch genommen und hierbei durch die nunmehr in anderer Richtung in Mitleidenschaft gezogenen Querriegel entlastet.

Außere Kräfte: Zu ihrer Ermittlung betrachten wir das ausgeknickte System Abb. 1 mit den Bogenlasten p und bringen in deren ursprünglichen Wirkungsebenen noch das Gleichgewichtssystem der aus $+p$ und $-p$ bestehenden Lasten an. Die angreifenden Kräfte zerfallen dann in eine *Drehungsgruppe*, bestehend aus den Kräftepaaren $py \cdot dx$ mit den zu ihnen gehörigen Auflagerreaktionen der Brücke, und eine *Bieungsgruppe*, bestehend aus den Lasten p und den zu ihnen nach der gewöhnlichen Bogentheorie gehörigen Kämpferreaktionen.

Bezeichnet man mit $R_a = -R_i$ die zur Drehungsgruppe gehörigen Reaktionen eines Brückenlagers, so ist aus

$$2 R_a \cdot h = 2 \int_0^l p \cdot y \cdot dx = 2 p \cdot f_k \cdot \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \cdot dx = \frac{4}{\pi} p f_k l$$

$$R_a = \frac{2}{\pi} p f_k \cdot \frac{l}{h}$$

Im Schnitt x wird damit das Torsionsmoment für die ganze Brücke

$$\overline{D} = R_a \cdot h - 2 \int_0^x p f_k \sin \frac{\pi x}{l} \cdot dx = \frac{2}{\pi} \cdot p f_k l \cdot \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Dasselbe kann in zwei Komponenten zerlegt werden $\overline{D} = \overline{D} \cdot \cos \varphi = \frac{2}{\pi} \cdot p f_k l \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \varphi$, welches um eine zur Bogentangente parallele Achse dreht und den Bogen verwindet, sowie $\overline{D} \cdot \sin \varphi$, welches um eine zur Bogennormalen parallele Achse dreht und den Bogen verbiegt.

Die zur Bieigungsgruppe gehörigen Kräfte ergeben im Schnitt x die Resultierende $H \cdot \sec \varphi$, welche auf die um y ausgewichene Brücke das um eine zur Bogennormalen parallele Achse drehende Moment $\overline{M} = H \cdot \sec \varphi \cdot y$ ausübt, dessen Drehsinn demjenigen von $\overline{D} \cdot \sin \varphi$ entgegengesetzt ist, woraus $\mathfrak{M} = \overline{M} - \overline{D} \cdot \sin \varphi = H \sec \varphi \cdot f_k \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} \cdot p f_k l \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \varphi$ als resultierendes Moment für die seitliche Verbiegung der Brücke folgt. Vermöge der zwischen H und p aus der Bogentheorie bekannten Beziehung, für die man näherungsweise $H \cong \frac{p l^2}{4f}$ setzen kann, läßt sich aus den für \mathfrak{M} und \overline{D} abgeleiteten Gleichungen p eliminieren und man erhält damit

$$\mathfrak{M} = H \cdot f_k \cdot \left[\sec \varphi \cdot \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{8f}{\pi l} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \right] \text{ für das Bieigungsmoment und } \dots \dots (1)$$

$$\overline{D} = H \cdot f_k \cdot \frac{8f}{\pi l} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \text{ für das Torsionsmoment der Brücke. } \dots \dots (2)$$

Für sehr flache Bögen darf hierin $\sin \varphi = 0$, $\sec \varphi = \cos \varphi = 1$ gesetzt werden.

Innere Kräfte: Bei gelenkigem Anschluß der Querriegel übernehmen beide Bögen die Momente \mathfrak{M} und \overline{D} je zur Hälfte. Infolge ihres steifen Anschlusses an die Querriegel werden sie durch die letzteren entlastet. Die S-förmige Verbiegung der Querriegel geschieht aus Symmetriegründen mit einem Inflexionspunkt in deren Mitte, wo deshalb abgesehen von den belanglosen Querriegel-Längskräften nur die Querkraftskomponenten U und V angreifen, deren auf die Tragwände übertragenen Momente $-\frac{U \cdot h}{2}$ und $-\frac{V \cdot h}{2}$ die sonst von diesen übernommenen Momente $\frac{\mathfrak{M}}{2}$ und $\frac{\overline{D}}{2}$ vermindern. Damit werden schließlich die von einer Tragwand zu übernehmenden Momente im r -ten Felde

$$M_r = \frac{\mathfrak{M}_r - h \cdot \sum_1^r (U_r \cos \Delta \varphi_r + V_r \sin \Delta \varphi_r)}{2} \text{ und}$$

$$D_r = \frac{\overline{D}_r - h \cdot \sum_1^r (V_r \cos \Delta \varphi_r - U_r \sin \Delta \varphi_r)}{2}.$$

Für flache Bogenbrücken vereinfachen sich die vorstehenden Ausdrücke, wenn man in Ansehung der kleinen Richtungsunterschiede $\cos \Delta \varphi_r = 1$ und $\sin \Delta \varphi_r = 0$ setzt. Man kann dann statt des gekrümmten Gliederstabes den Stab behandeln, der aus ihm durch Abwicklung in die Scheiteltangentialebene hervorgeht; hierbei begibt man sich des Einflusses der Krümmung auf die entlastenden Momente der Querriegel, behält jedoch den Krümmungseinfluß auf die Brückenmomente nach Gl. (1) und (2) sowie auf die Feldlängen noch bei. Man erhält dann die Tragwandmomente

$$M_r = \frac{\mathfrak{M}_r - h \cdot \sum_1^r U_r}{2} \text{ biegend und } D_r = \frac{\mathfrak{D}_r - h \cdot \sum_1^r V_r}{2} \text{ drehend.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nun ist } \sum_1^r U_r = S_r \text{ die Gurtlängskraft aus } U \\ \sum_1^r V_r = Q_r \text{ die Gurtquerkraft aus } V \end{array} \right\} \text{ im } r\text{-ten Felde, } \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots \dots (3) \\ \dots \dots \dots \dots (4) \end{array} \right.$$

wonach

$$M_r = \frac{\mathfrak{M}_r - h \cdot S_r}{2} \dots \dots \dots (5)$$

und

$$D_r = \frac{\mathfrak{D}_r - h \cdot Q_r}{2} \dots \dots \dots (6)$$

folgt.

Wir wählen die Kräfte S_r und Q_r als statisch Unbestimmte und finden durch Subtraktion der für zwei aufeinanderfolgende Knotenpunkte angeschriebenen Gl. (3) und (4) die Beziehungen

$$U_r = S_r - S_{r-1} \dots \dots \dots (7)$$

und

$$V_r = Q_r - Q_{r-1}, \dots \dots \dots (8)$$

welche die Pfostenquerkräfte auf die S_r und Q_r zurückführen.

Die Elastizitätsgleichungen: Zur Berechnung der S_r und Q_r schreiben wir die elastische Energie A_i des Systems in der Form an

$$A_i = \sum_r \int_r^{r+1} \left(\frac{\mathfrak{M}_r - h S_r}{2} \right)^2 \cdot \frac{d\xi}{E \mathcal{I}_r} + \sum_r \int_r^{r+1} \left(\frac{\mathfrak{D}_r - h Q_r}{2} \right)^2 \cdot \frac{d\xi}{G T_r} + \frac{h^3}{24 E} \cdot \sum_r \left[\frac{(Q_r - Q_{r-1})^2}{X_r} + \frac{(S_r - S_{r-1})^2}{Z_r} \right] + \sum \frac{S_r^2 \cdot c_r}{2 E F_r'} + \frac{\kappa}{2 G} \cdot \sum \frac{Q_r^2 c_r}{F_r'} + \frac{\kappa h}{2 G} \cdot \sum \frac{(Q_r - Q_{r-1})^2 + (S_r - S_{r-1})^2}{F_r''}, \quad (9)$$

wo die Summen über das ganze System zu erstrecken sind. Die drei letzten Summen der rechten Seite in Gl. (9) sind auf die Größe der statisch Unbestimmten von unerheblichem Einfluß und werden bei deren Berechnung vernachlässigt. Bei Bildung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial A_i}{\partial Q_r} = 0$ und $\frac{\partial A_i}{\partial S_r} = 0$ hat man zu beachten, daß in dem der Querriegelverbiegung entsprechenden Summenausdruck der Gl. (9) Q_r und S_r je zweimal vorkommen und zwar in den Gliedern $Q_r - Q_{r-1}$ und $Q_{r+1} - Q_r$, sowie $S_r - S_{r-1}$ und $S_{r+1} - S_r$. Nach Verein-

$$\text{fachung folgt } \frac{6 E}{h^2 G} \cdot \int_r^{r+1} \frac{\mathfrak{D}_r \cdot d\xi}{T_r} = -\frac{Q_{r-1}}{X_r} + Q_r \cdot \left(\frac{1}{X_r} + \frac{6 E c_r}{G T_r h} + \frac{1}{X_{r+1}} \right) - \frac{Q_{r+1}}{X_{r+1}} \dots \dots (10)$$

$$\frac{6}{h^2} \cdot \int_r^{r+1} \frac{m_r \cdot d\xi}{\mathcal{F}_r} = -\frac{S_{r-1}}{Z_r} + S_r \cdot \left(\frac{1}{Z_r} + \frac{6c_r}{\mathcal{F}_r h} + \frac{1}{Z_{r+1}} \right) - \frac{S_{r+1}}{Z_{r+1}} \quad (11)$$

Bei steilen Bögen, wo die Näherung $\cos \Delta \varphi_r = 1$ und $\sin \Delta \varphi_r = 0$ nicht zulässig ist, werden die Gl. (10) und (11) nicht mehr von Q_r und S_r paarweise unabhängig, was ihre Auflösung erheblich erschwert.

Die Gleichungen (10) und (11) lassen sich bei n Feldern je $n = \text{mal}$ aufstellen. Die dann noch fehlenden beiden Bestimmungsgleichungen für die $2(n+1)$ Pfostenquerkraftskomponenten, lauten $\sum_1^{n+1} U_r = 0$ und $\sum_1^{n+1} V_r = 0$; sie sind bei symmetrischen Verhältnissen von selbst erfüllt. Ueberhaupt reduziert sich die Zahl der statisch Unbestimmten bei Symmetrie auf die Hälfte, indem für symmetrisch entsprechende Felder r und $n-r$ $S_r = S_{n-r}$ und $Q_r = -Q_{n-r}$ wird.

Die Knickbedingung: Nach Berechnung der Q_r und S_r folgt aus Gl. (9) die elastische Energie in der Form Gl. (9a) $A = C \cdot (H \cdot f_k)^2$, wo die Konstante C nur vom Baustoff und den Formwerten abhängt. Nun ist die elastische Energie gleich der Arbeit der äußeren Kräfte beim seitlichen Ausknicken. Aus $y = f_k \cdot \sin \frac{\pi x}{s}$ als der Gleichung der Knicklinie ergibt sich als Verkürzung der ursprünglichen Bogenlänge s beim Knicken

$$\Delta s = \int_0^s dx \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} - 1 \right) \approx \frac{\pi^2 f_k^2}{4s}$$

Dementsprechend leistet die beim Knicken konstante Kämpferkraft $H \cdot \sec \varphi_0$ die äußere Arbeit

$$A_a = H \cdot \sec \varphi_0 \cdot \frac{\pi^2 f_k^2}{4s} \quad (12)$$

Die übrigen äußeren Kräfte liefern keinen Arbeitsbeitrag. Man erhält somit aus $A_a = A_i$ oder

$$H \cdot \sec \varphi_0 \cdot \frac{\pi^2 f_k^2}{4s} = C \cdot (H f_k)^2 \quad (13)$$

die Bedingung zur Berechnung des kritischen Horizontalschubs, welche vom Knickpfeil f_k unabhängig ist, d. h. wie stets bei der elementaren Behandlung des Knickproblems bleibt der Knickpfeil unbestimmt.

Vorstehende Entwicklungen setzen voraus, daß nirgends die Proportionalitätsgrenze des Baustoffs überschritten wird. Knickt die Brücke jenseits des Geltungsbereiches des Hooke'schen Gesetzes, so ist statt der Moduln E und G ein der Knickspannung entsprechender Modul $E_{\sigma k} < E$ einzuführen. Es empfiehlt sich in diesem Falle, die Gl. (9) zunächst mit E zu erweitern, wobei $E : G = \frac{2(m+1)}{m}$ auch jenseits der Proportionalitätsgrenze gesetzt werden mag, solange das Verhalten des Baustoffs jenseits dieser Grenze nicht weiter geklärt ist. Man erhält dann statt Gl. (13) die Knickbedingung in der Form

$$H = \sec \varphi_0 \cdot \frac{\pi^2}{4s} \cdot \frac{E_{\sigma k}}{C} \quad (13a)$$

²⁾ Gl. (11) ist aus der Theorie des ebenen Rahmenträgers bekannt; siehe F. ENGESSER, „Die Berechnung der Rahmenträger“, Z. f. Bauwesen 1913.

und hieraus nach Division durch $2 F'$ als dem Querschnitt beider Tragwände

$$\sigma_k = C' \cdot E_{\sigma_k} \quad \dots \quad (14)$$

als Knickspannung mit dem zu σ_k passenden Wert E_{σ_k} .

Die Gleichungen (13) und (14) bedürfen noch einer Berichtigung, weil bei ihrer Herleitung mit den planmäßigen Systemlängen gerechnet wurde, wiewohl sich die Tragwände bis zum Erreichen der Knickgrenze bereits verkürzen. Der Berichtigungsfaktor ergibt sich aus folgender Ueberlegung: Für einen Vollwandstab lautet die Differentialgleichung der Knicklinie unter Berücksichtigung der achsialen Verkürzung

$$\left(1 - \frac{P}{EF}\right) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P \cdot y}{E \mathcal{F}} = 0 \quad \text{oder}$$

$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y}{k^2} = 0$ mit $\frac{1}{k^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} : \left(1 - \frac{P}{EF}\right)$. Das Integral $y = A \cdot \sin \frac{x}{k} + B \cdot \cos \frac{x}{k}$ dieser Differentialgleichung genügt den Randbedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = s$, wenn $B = 0$ und bei beliebigem A $\frac{1}{k} = \frac{\pi}{s}$ ist, woraus nach kurzer Rechnung $P = \frac{\pi^2 E \mathcal{F}}{s^2} : \left(1 + \frac{\pi^2 i^2}{s^2}\right)$ folgt. Für den Vollwandstab ist daher wegen seiner achsialen Verkürzung die Eulersche Knickgrenze mit dem Berichtigungsfaktor $\frac{1}{1 + \left(\frac{\pi i}{s}\right)^2}$ zu multiplizieren, der, wie man sich leicht überzeugt, für die

praktischen Verhältnisse s/i sehr nahezu gleich 1 ist. Beim gegliederten Druckstab ist ange-nähert $i \cong h/2$ und bei weiter Spreizung gegenüber der Stablänge s nicht mehr vernachlässigbar klein, so daß hier der Berichtigungsfaktor $\frac{1}{1 + \left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2}$ von 1 schon merklich abweicht. Der

berichtigte kritische Horizontalschub wird daher aus Gl. (13)

$$H_k = \frac{\pi^2 \cdot \sec \varphi_0}{C \cdot 4 s \cdot \left[1 + \left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2\right]} \cdot E_{\sigma_k} \quad \dots \quad (13a)$$

und die Knickspannung aus Gl. (14)

$$\sigma_k = \frac{C'}{1 + \left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2} \cdot E_{\sigma_k} = C'' \cdot E_{\sigma_k} \quad \dots \quad (14a)$$

Mechanische Aehnlichkeit bei Modellversuchen: Aus der Ableitung der Gl. 14a) ergibt sich ohne weiteres, daß die Constante C'' ihren Wert nicht ändert, wenn man die Brücke in irgend einem Verhältnis geometrisch ähnlich verkleinert. Es gilt daher der Satz: *Geometrisch ähnliche Brücken aus gleichem Baustoff haben dieselben Knickspannungen.* Dementsprechend verhalten sich die Knickkräfte von geometrisch ähnlichen Brücken wie die Quadrate ihrer Längen, worin das Mittel liegt, um bei Modellversuchen mit entsprechend kleinen Lasten auskommen zu können.

Der Modellversuch kann auch dazu benützt werden, um bei bekannten Elastizitätseigenschaften des Bauwerks dessen Knickgrenze ohne Rechnung zu bestimmen. Man benutzt in diesem Falle die am Modell empirisch festgestellte Knickspannung σ_k dazu, um aus der für den Modellbaustoff giltigen Kurve $E_m = f_m(\sigma)$ nach Gl. (14a) die Modellkonstante

$C'' = \frac{\sigma_{km}}{E_{\sigma_{km}}}$ zu bestimmen, die bei geometrischer Aehnlichkeit zum Bauwerk auch für das

letztere gilt. Hiernach läßt sich dann unter Benützung von C'' und der für das Bauwerk giltigen Baustoffkurve $E_B = f_B(\sigma)$ dessen Knickspannung auch für den Fall unschwer ermitteln, daß Modell und Bauwerk aus verschiedenen Baustoffen hergestellt werden. Man hat hierzu nur nach Gl. (14 a) zu einigen angenommenen Werten σ mit den dazu gehörigen Werten E_σ die Spannungen σ_k nach Gl. 14 a) zu berechnen und die zusammengehörigen Wertpaare σ und σ_k in einer Kurve aufzutragen, deren Schnitt mit der Geraden $\sigma = \sigma_k$ die gesuchte Knickspannung σ_k ergibt (Abb. 4).

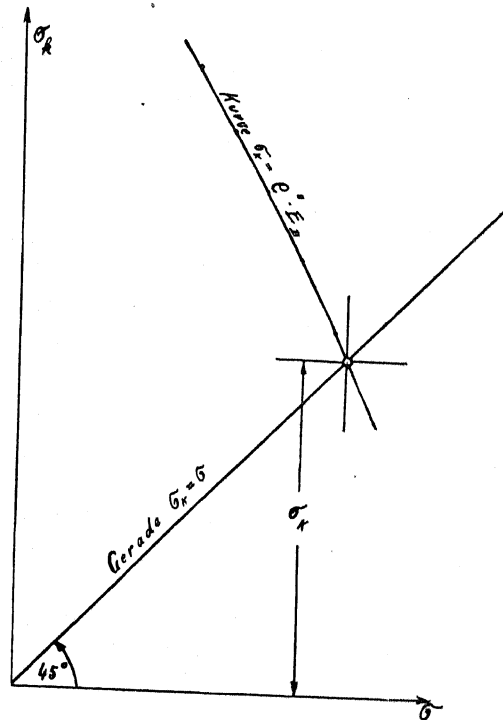


Abb. 4

The Use of Models in the Solution of Indeterminate Structures

By George E. Beggs, Princeton, N. J. (U. S. A.)

(See Plate XI for figures 2, 3, 5 and 6)

To avoid the difficulties inherent in the mathematical methods of solving indeterminate structures, a mechanical method employing elastic models has been developed. The essential difference between the mathematical and mechanical methods arises from the replacement of

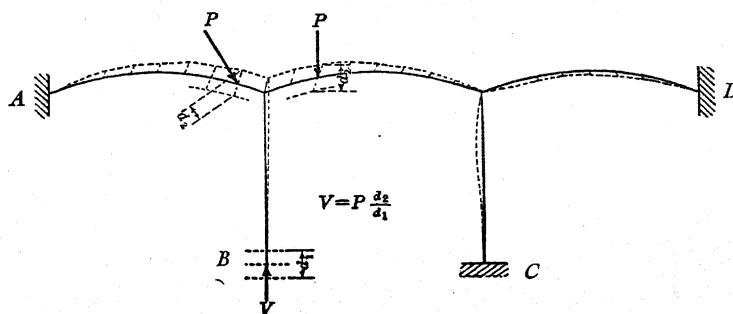


Fig. 1 a.

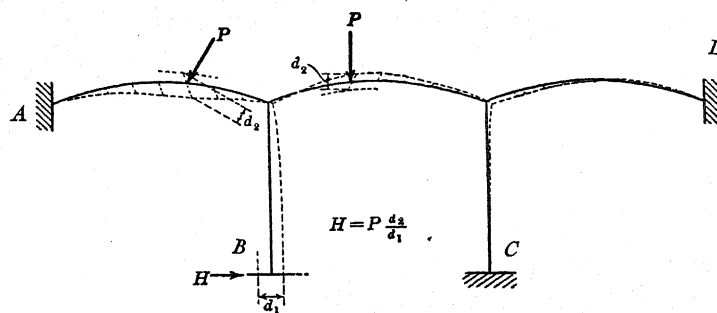


Fig. 1 b.

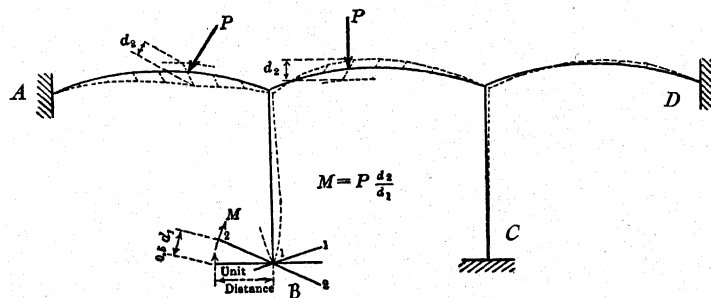


Fig. 1 c.

the calculation of deflections by their measurement. A particular advantage of the mechanical method is that it completely avoids the solution of simultaneous equations, for each indeterminate quantity is uniquely expressed as a function of the known load and two measurable deflections, as in the equation $S = P d_1/d_2$. Inasmuch as all stress components may be obtained from an elastic equation of the above simple type, there remains for checking purposes the three

equations of statical equilibrium. For this reason the mechanical method of solution is spoken of as self checking.

The underlying principle of the solution of structures by the use of models will be clear from a consideration of fig. 1 *a, b, c*. The line diagram in each lettered figure represents a model of an indeterminate structure. The reaction components — vertical, horizontal and rotative, — due to any assumed load P are to be found experimentally. It should be observed that no actual load will be applied to the model, for the process consists merely in the measurement of relative displacements. Let us deal first with the reaction at base B of the left hand vertical pier. Suppose supports A, C, D , to be held fixed. Let a small finite vertical displacement d_1 be produced at B , as in fig. 1 *a*, without permitting rotation or horizontal displacement of the base B . The corresponding displacement d_2 at the load point P in the direction of P is observed. It follows from elastic theory that $V = P d_2/d_1$. In a similar manner, indicated by fig. 1 *b, c*, the values of the other components, H and M , may be found experimentally from measured deflections. If the scale of the model is one unit equals n units of length, the value of the moment obtained from the model by the equation $M = P d_2/d_1$ must be multiplied by n to give the corresponding value for the full sized structure. The values of V and H , however, are not subject to correction for the scale of the model. By observing simultaneously displacements at various points of the model corresponding to predetermined displacements at sections of unknown stress, influence lines for stress components may be obtained. If the structure is hinged at a support, rotation of the model about the hinge point is allowed by use of a pin connection consisting of a steel point piercing the model.

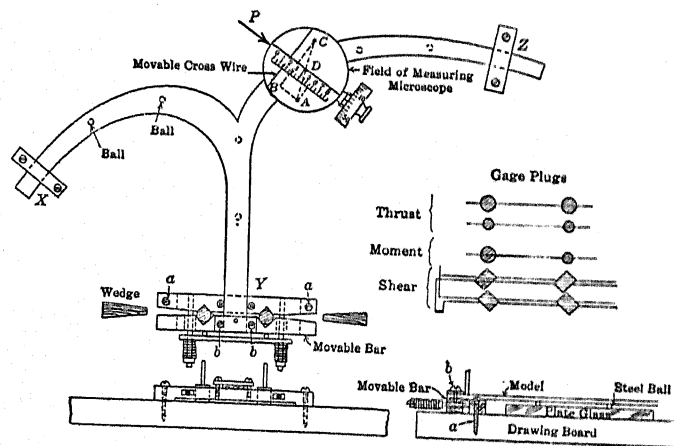


Fig. 4.

The Deformeter Apparatus employed in connection with elastic models is illustrated in figs. 2, 3, 4 (see Plate XI). It consists of very precise means for producing known, but very small, displacements at sections where stress is sought, and optical means for measuring the corresponding deflections of the model at assumed load points. If reaction components are sought, the model is connected to the drawing board by «deformeter gauges», as indicated by fig. 4. Each deformeter gauge consists of two parallel steel bars, with pairs of opposing V notches, held together by coil springs so as to allow a small relative motion between the bars. Very precise gauge plugs of specified sizes (tolerance plus or minus 0.00002" inch) are provided for introduction between the gauge bars, for the purpose of producing predetermined amounts of thrust, shear, and rotative displacement. The so-called fixed bar of the gauge is made fast to the drawing board by screws.

By means of a clamping plate, the model is attached to the movable bar of the gauge, if the support is assumed fixed; or by a needle point, if the support is assumed hinged. For the unstrained position of the model, two «normal» gauge plugs remain in the two pairs of opposing V notches of the gauge. A filar micrometer microscope is set up over the assumed point of applied load, and the fixed cross hair of the micrometer, which is parallel to the micrometer screw, is oriented parallel to the direction of the assumed load. Refer to fig. 4. Suppose the vertical thrust component of the reaction at Y is sought. The «normal» plugs are removed from the gauge at support Y , and a pair of smaller thrust plugs are inserted, so causing a vertical displacement of the support. The moving cross hair of the micrometer is now brought tangent to a reference mark on the model at the assumed load point, and an initial reading of the micrometer is taken. The small thrust plugs are now removed and larger thrust plugs are inserted in the deformer gauge. Thus is produced a predetermined amount of known vertical displacement at the support and a definite deformation of the elastic model. The reference mark will appear in the microscope to move across the field of view in some diagonal direction AC . The moving cross hair of the micrometer is again brought tangent to the reference mark and a second reading of the micrometer is taken. The difference between the two micrometer readings will be the component AB of the motion AC of the reference mark, this component being measured in the direction of the assumed load. The V component of the desired reaction now equals the applied load multiplied by the ratio of two known deflections, namely, AB and the gauge displacement.

The models used in connection with deformer gauges are made of celluloid or fine quality card board. They are usually of constant thickness. The model is not necessarily a small scale reproduction of the actual structure, but its members are given the same proportions of stiffness as those of the actual structure by making the widths of the model members proportional to the cube roots of the moments of inertia of the actual cross sections. It will be noted that the coefficient of elasticity both of the model and of the actual structure may be disregarded, for the *ratio* of deflections is independent of this coefficient.

The deformer gauge method may also be used to solve structures which are internally indeterminate. In this case the gauge is attached to an intermediate cut section of the structure where stress components are sought. The gauge in this instance is mounted upon a frictionless bearing, consisting of two glass plates with steel balls between, so that the gauge itself may move with the model structure as gauge plugs of various sizes are exchanged in the gauge. The method has thus been extended to the practical solution of many problems involving internal indeterminacy.

The general method of solving indeterminate structures by models has recently been extended to the experimental determination of influence surfaces for the six reaction components of a skew arch. Refer to Fig. 5 (Plate XI). A rubber model of a skew arch was mounted with one end permanently fixed and with the other end fixed to a movable casting, whose motion was universally controllable by turnbuckles, which could be operated to produce translation or rotation of the arch abutment at will with reference to any one of three chosen X, Y, Z , axes. The displacement of the movable abutment and also the vertical components of the deflections of the assumed load points were communicated to Ames dials in the manner indicated by Fig. 4. The experimental values of reaction components obtained by this deformation method satisfied very well the three equations of statical equilibrium, and agreed reasonably well with a special theoretical analysis. As a further check on the results, the model was subjected to concentrated loading at various points, as shown in Fig. 6 (Plate XI), and several of the reaction

components were weighed directly on a scale. The weighed values agreed very closely with the values found by the deformation method.

Attention is directed particularly to the necessity of employing small deflections in the solution of indeterminate structures with the aid of models. The ratio of deflections is theoretically and practically correct when the model is deformed but a small measurable distance from its geometric shape, but if large deformations are introduced in the model the method becomes grossly inaccurate in many cases that cannot be anticipated, while in other cases fair results may be obtained.

Die günstigste Form statisch unbestimmter Bogenträger.

Von J. Krebitz, Graz

Die Frage, ob und inwieweit die sogenannte TOLKMITT'sche Linie als Bogenachse durch eine günstigere ersetzt werden kann, wurde schon mehrfach behandelt¹⁾. Eine strengere mathematische Erfassung der Bogenrichtigstellung liegt bisher nicht vor und soll nachstehend gezeigt werden.

Die beste Ausnützung einer gegebenen Querschnittsform bei wechselnder ausmittiger Belastung liegt dann vor, wenn die Randspannungen gleich groß sind und gerade die zulässige Grenze erreichen. Bei statisch bestimmten Bogenformen mit drei Gelenken gelingt es in einfacher Weise, alle Bogenteile so zu legen und so zu bemessen, daß die vorgenannte beste Ausnützung überall zutrifft. Anders sind die Verhältnisse, wenn ein oder mehrere Gelenke ausgeschaltet und der Bogenträger statisch unbestimmt wird. Dann kann die Drucklinie nur in jenen Querschnitten, in welchen bei statischer Bestimmtheit kein Gelenk notwendig ist, zu einem gleichmäßigen Pendeln um die Bogenachse gezwungen werden, d. h. es können alle diese Querschnitte so gelegt und so bemessen werden, daß die größten Randspannungen gerade das zulässige Maß erreichen. Da Querschnittslage und -Stärke nicht nur für den Querschnitt selbst, sondern für den ganzen Bogen von Einfluß sind, muß bei der Ermittlung der Verbesserungen der ganze Bogen berücksichtigt werden. Würde man der Drucklinie die Freiheit der Einstellung nur in den theoretisch unendlich dünnen Gelenkquerschnitten gestatten wollen, die günstigste Ausnützung also praktisch auf den ganzen Bogen ausdehnen, so ergäbe sich eine Bogenform, bei welcher der Einfluß der Achsenverkürzung verschwindet, d. h. der Pfeil würde ins Unendliche anwachsen müssen.

Es muß also für jedes bei statischer Bestimmtheit notwendige Gelenk eine Zone der Drucklinie zur freien Einstellung überlassen bleiben. Je kürzer diese Zone gewählt wird, desto stärker weicht die mittlere Lage der Drucklinie in dieser Zone von der Bogenachse ab, während sie bei größerer Erstreckung sich der Bogenachse nähert. Es muß also beim Zweigelenkbogen mindestens in der Scheitelzone, beim Eingelenkbogen in den Kämpferzonen und beim eingespannten Bogen im Kämpfer und im Scheitel auf die Uebereinstimmung von Bogenachse und mittlerer Drucklinie verzichtet werden. Selbstverständlich kann man sich jede freie Einstellungszone in gewissen Grenzen verschoben denken und diese Zonen über das notwendige Erfordernis hinaus vermehren.

Der Weg, der bei der Verbesserung einer gewählten Bogenform einzuschlagen ist, ist dem Wesen nach immer derselbe und sei nachstehend für den eingespannten Bogen wiedergegeben. Wir beschränken uns auf die praktisch allein vorkommende symmetrische Bogenform und den rechteckigen Querschnitt. Eine Verallgemeinerung für beliebigen Querschnitt und unsymmetrische Bogenform bietet keine Schwierigkeiten.

¹⁾ NEUMANN, Beton und Eisen, 1922, Seite 189 ff.

OSTENFELD, Beton und Eisen, 1923, Seite 175 ff.

PROKSCH, Beton und Eisen, 1924, Seite 33 ff.

HARTMANN, die genauere Berechnung gelenkloser Gewölbe und der Einfluß des Verlaufes der Achsen und der Gewölbestärken, Leipzig, 1925, Seite 21 ff.

Es bedeuten mit teilweiser Beziehung auf die untenstehende Abbildung:

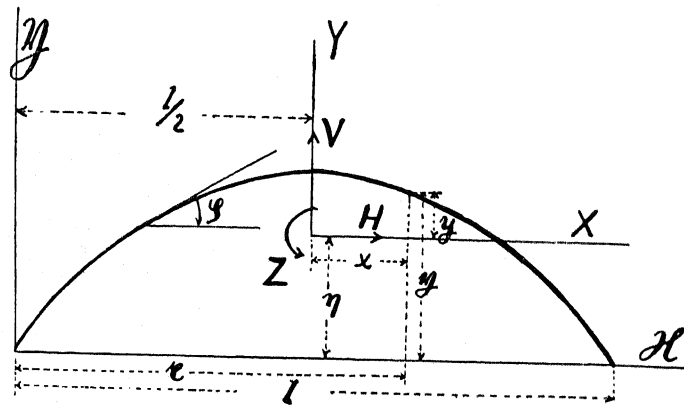


Abb. 1.

- η und η die Koordinaten der angenommenen Bogenachse, bezogen auf das festliegende Koordinatenkreuz $X\eta$;
- x und y die Koordinaten der Bogenachse, bezogen auf die durch den elastischen Mittelpunkt des Bogens gelegten, zu den früheren parallelen Achsen;
- x_0 und y_0 die Koordinaten des Kernpunktes für die obere Faser;
- x_u und y_u die Koordinaten des Kernpunktes für die untere Faser;
- M das Feldmoment des Freitragers von der Stützweite l an beliebiger Stelle, positiv, wenn es die Bogenachse streckt;
- Q die Querkraft des Freitragers;
- H die wagrechte Teilkraft;
- V die lotrechte Teilkraft des Kämpferwiderstandes;
- Z das Einspannmoment, positiv bei dem in der Abbildung angedeuteten Drehsinn;
- M das gesamte Biegemoment an beliebiger Stelle, positiv, wenn es eine Streckung der Bogenachse zur Folge hat;
- N die Normalkraft, positiv als Druck;
- E die Formänderungszahl des Baustoffes;
- α die Wärmeausdehnungsziffer;
- t die Temperaturänderung;
- φ den Neigungswinkel der Bogenachse gegen die Wagrechte;
- η den Abstand des elastischen Mittelpunktes von der Verbindungslinie der Kämpfer;
- d die Bogenstärke;
- b die Bogenbreite;
- s ein theoretisch differentielles, praktisch endliches Stück der Bogenachse;
- F die Querschnittsfläche;
- J das Trägheitsmoment;
- W das Widerstandsmoment;
- s die zulässige größte Pressung.

Weiter müssen wir uns zur einwandfreien Festlegung der in Betracht kommenden Werte noch bestimmter Zeiger bedienen und zwar gelte für einen herausgehobenen Querschnitt der Zeiger i , für den allgemeinen Querschnitt der Zeiger n . Tiefgestellt wird dieser Zeiger, wenn es sich um Werte in dem betreffenden Querschnitt handelt, durch Hochstellung desselben wird angedeutet, daß ein gleichzeitig auftretender Wert in einem anderen Querschnitt vorliegt.

Endlich werden noch durch die Zeiger o und u die Kraftfunktionen unterschieden, welche die ungünstigste Randpressung in der Ober- und Unterfaser hervorrufen. Es bedeutet also z. B. \mathfrak{M}_n^{io} das Freiträgermoment im allgemeinen Querschnitt n , bei jener Belastung, welche im Querschnitt i die größte Pressung an der Oberkante zur Folge hat.

Endlich deute ein hochgestellter Strich ' noch an, daß es sich um Werte handelt, die für den richtig gestellten Bogen gelten.

Unter Verwendung der angeführten Bezeichnungen erhält man für eine festliegende Belastung:

$$M = -Z - Hy + V \cdot x + \mathfrak{M} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$N = Q \cdot \sin \varphi + V \cdot \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{\Delta s}{E \cdot \mathfrak{F}} \cdot \eta}{S}, \text{ wobei } S = \sum \frac{\Delta s}{E \cdot \mathfrak{F}} \text{ ist} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$Z = \frac{\sum \frac{\mathfrak{M} \cdot \Delta s}{E \cdot \mathfrak{F}}}{S} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$H = \frac{\sum \frac{y \cdot \mathfrak{M} \Delta s}{E \cdot \mathfrak{F}} - \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi \cdot \Delta s}{E \cdot F} + \alpha \cdot t \cdot l}{D} \quad \dots \dots \dots (5)$$

worin
$$D = \sum \frac{y^2 \Delta s}{E \cdot \mathfrak{F}} + \sum \frac{\Delta s}{E \cdot F} \cdot \cos^2 \varphi \quad \text{ist}$$

und
$$V = \frac{-\sum \frac{x \cdot \mathfrak{M} \Delta s}{E \cdot \mathfrak{F}} + \sum \frac{Q \cdot \sin^2 \varphi \Delta s}{E \cdot F}}{G} \quad \dots \dots \dots (6)$$

worin
$$G = \sum \frac{x^2 \Delta s}{E \cdot \mathfrak{F}} - \sum \frac{\Delta s \sin^2 \varphi}{E \cdot F} \quad \text{bedeutet.}$$

Vergrößert man nun zunächst an der Stelle n die Ordinate η_n um $\Delta \eta_n$, so kann man, wenn $\Delta \eta_n$ verhältnismäßig klein ist, die daraus folgenden Aenderungen der übrigen Werte durch Differenzieren der obigen Gleichungen ermitteln und es ergibt sich:

$$\Delta \eta = \frac{\Delta s_n \cdot \Delta \eta_n}{E \cdot \mathfrak{F}_n \cdot S} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\Delta y_n = \Delta \eta_n - \frac{\Delta s_n}{E \cdot \mathfrak{F}_n \cdot S} \cdot \Delta \eta_n \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\Delta y_i = -\frac{\Delta s_n \cdot \Delta \eta_n}{E \cdot \mathfrak{F}_n \cdot S} \quad \dots \dots \dots (9)$$

wobei y_i die Ordinate eines beliebigen Punktes der Bogenachse ist; ferner:

$$\Delta H = \frac{\Delta s_n \cdot \Delta \eta_n}{E \cdot \mathfrak{F}_n \cdot D} (\mathfrak{M}_n - Z - 2 H y_n) \quad \dots \dots \dots (10)$$

Vermehrt man die Bogenstärke d_n um Δd_n , so erhält man unter denselben Voraussetzungen wie oben:

$$\Delta \eta = - \frac{3 \Delta s_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot d_n \cdot S} \cdot y_n \cdot \Delta d_n \quad \dots \quad (11)$$

$$\Delta y_i = - \Delta \eta \quad \dots \quad (12)$$

weiter:

$$\Delta Z = \frac{3 \Delta s_n \cdot \Delta d_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot d_n \cdot S} \cdot (Z - \mathfrak{M}_n) \quad \dots \quad (13)$$

$$\Delta H = - \frac{\Delta s_n \Delta d_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot d_n \cdot D} \cdot \left\{ 3y (\mathfrak{M}_n - Z - H \cdot y_n) - \frac{\mathcal{F}_n}{F_n} \cos \varphi_n \cdot (Q_n \sin \varphi_n + H \cos \varphi_n) \right\} \quad (14)$$

und

$$\Delta V = \frac{\Delta s_n \Delta d_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot d_n \cdot G} \cdot \left\{ 3x_n \cdot (\mathfrak{M}_n + V \cdot x_n) - \frac{\mathcal{F}_n}{F_n} \sin^2 \varphi_n \cdot (Q_n + V) \right\} \quad \dots \quad (15)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir an die Aufstellung der Gleichungen gehen, welche die beste Querschnittsausnutzung gewährleisten.

Es gilt für den richtiggestellten Bogen an der Stelle i :

$$\sigma_0 = \frac{M'_{io}}{W'} + \frac{N'_{io}}{F'} = \sigma_u = - \frac{M'_{iu}}{W'} + \frac{N'_{iu}}{F'};$$

mit $\frac{W'}{F'} = \frac{d + \Delta d}{6}$ folgt daraus:

$$M'_{io} + M'_{iu} + \frac{d_i + \Delta d_i}{6} \cdot (N'_{io} - N'_{iu}) = 0 \quad \dots \quad (16)$$

Berücksichtigt man nun noch, daß bei Vernachlässigung der Werte von Kleinheit zweiter Ordnung:

$$M'_{io} = M_{io} - \Delta Z^{io} - y_i \cdot \Delta H^{io} - \Delta y_i \cdot H^{io} + x_i \cdot \Delta V^{io} \quad \dots \quad (17)$$

$$M'_{iu} = M_{iu} - \Delta Z^{iu} - y_i \cdot \Delta H^{iu} - \Delta y_i \cdot H^{iu} + x_i \cdot \Delta V^{iu} \quad \dots \quad (18)$$

$$N'_{io} = N_{io} + \Delta V^{io} \sin \varphi_i + \Delta H^{io} \cos \varphi_i \quad \dots \quad (19)$$

$$N'_{iu} = N_{iu} + \Delta V^{iu} \sin \varphi_i + \Delta H^{iu} \cos \varphi_i \quad \dots \quad (20)$$

gilt und setzt die den Aenderungen $\Delta \eta_n$ und Δd_n nach den Gleichungen (9), (10) und (12) bis (15) entsprechenden Werte ein, so ergibt sich für die Gleichheit der Randspannungen im Querschnitt i die Beziehung:

$$\Sigma a_{in} \Delta \eta_n + \Sigma b_{in} \Delta d_n + (H^{io} + H^{iu}) \Delta \eta_i - \frac{\Delta d_i}{6} \cdot (N_{io} - N_{iu}) = M_{io} + M_{iu} + \frac{d_i}{6} (N_{io} - N_{iu}) \quad \dots \quad (I)$$

worin

$$a_{in} = \frac{\Delta s_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot D} \cdot \left\{ y_{io} (\mathfrak{M}_n^{io} - Z^{io} - 2 H^{io} \cdot y_n) + y_{iu} (\mathfrak{M}_n^{iu} - Z^{iu} - 2 H^{iu} y_n) - \frac{D}{S} \cdot (H^{io} + H^{iu}) \right\}$$

und

$$b_{in} = - \frac{3 \Delta s_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot D \cdot d_n} \cdot \left\{ \left(y_{io} \cdot y_n + \frac{D}{S} \right) \cdot (\mathfrak{M}_n^{io} - Z^{io} - y_n H^{io}) + \left(y_{iu} \cdot y_n + \frac{D}{S} \right) \cdot (\mathfrak{M}_n^{iu} - Z^{iu} - y_n H^{iu}) - \frac{\mathcal{F}_n}{3 F_n} \cdot \cos \varphi_n \cdot \left[y_{io} (H^{io} \cdot \cos \varphi_n + Q_n^{io} \cdot \sin \varphi_n) + \right. \right.$$

$$+ y_{iu} \cdot (H^{iu} \cdot \cos \varphi_n + Q_n^{iu} \cdot \sin \varphi_n) \Big] + \frac{D}{G} \cdot \left[x_{io} \cdot x_n \cdot (\mathfrak{M}_n^{io} + x_n \cdot V^{io}) + x_{iu} \cdot x_n \cdot (\mathfrak{M}_n^{iu} + x_n \cdot V^{iu}) \right] \\ - \frac{D}{3G} \cdot \frac{\mathcal{F}}{F} \cdot \sin^2 \varphi_n \left[x_{io} (Q_n^{io} + V^{io}) + x_{iu} \cdot (Q_n^{iu} + V^{iu}) \right] \Big\} \text{ ist.}$$

Setzt man nun noch σ_0 oder σ_u gleich s , so werden beide Ränder bis zur zulässigen Grenze beansprucht. Für $\sigma_0 = s$ erhält man:

$$M'_{io} + \frac{W'}{F'} \cdot N'_{io} = W' \cdot s \dots \dots \dots (21)$$

Da $W' = W + \frac{b \cdot \Delta d_n}{3}$ gilt, ergibt sich mit Einsetzung der Werte nach 17 und 19, bzw. 9, 10 und 12—15:

$$\Sigma c_{in} \cdot \Delta \eta_n + \Sigma e_{in} \cdot \Delta d_n - H^{io} \cdot \Delta \eta_i - \Delta d_i \left(\frac{b_i \cdot d_i \cdot s}{3} - \frac{N_{io}}{6} \right) = W_i \cdot s - M_{io} - \frac{d_i}{6} \cdot N_{io} \quad (\text{II})$$

worin:

$$c_{in} = \frac{\Delta s_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot D} \cdot \left\{ \frac{D}{S} H^{io} - y_{io} (\mathfrak{M}_n^{io} - Z^{io} - 2 H^{io} \cdot y_n) \right.$$

und

$$e_{in} = \frac{3 \Delta s_n}{E \cdot \mathcal{F}_n \cdot D \cdot d_n} \left\{ \left(y_{io} \cdot y_n + \frac{D}{S} \right) \cdot (\mathfrak{M}_n^{io} - Z^{io} - y_n \cdot H^{io}) - \frac{\mathcal{F}_n y_{io}}{3 F_n} \cdot \cos \varphi_n (H^{io} \cdot \cos \varphi_n + \right. \\ \left. + Q_n^{io} \cdot \sin \varphi_n) + \frac{D}{G} \cdot x_{io} \cdot x_n (\mathfrak{M}_n^{io} + x_n \cdot V^{io}) - \frac{D \cdot \mathcal{F}_n x_{io}}{3 G \cdot F_n} \sin^2 \varphi_n (Q_n^{io} + V^{io}) \right\} \text{ ist.}$$

Ganz ähnlich gebaut ist die Beziehung, wenn man σ_u gleich s setzt. Von einer Wiedergabe derselben sei abgesehen.

Man erhält demnach für jeden Querschnitt, der günstigst ausgenützt werden soll, je eine Gleichung I und II. Da für jeden Querschnitt zwei Verbesserungen möglich sind, $\Delta \eta$ und Δd , so liefern also n zu berichtende Querschnitte $2n$ -Gleichungen, die hinsichtlich der $2n$ -Unbekannten linear sind. Die zur Ermittlung der Koeffizienten notwendigen Ausdrücke müssen größtenteils schon für die erstmalige Untersuchung gerechnet werden, soweit dies nicht notwendig ist, bereitet ihre Bestimmung keine sonderlichen Schwierigkeiten.

Nach den Erörterungen im Eingange ist beim eingespannten Bogen auf die günstigste Ausnützung von mindestens drei Bogenstücken (Δs) zu verzichten. Hat man daher den angenommenen Bogen für die Untersuchung in insgesamt m Teile geteilt, so kann für $m - 3$ solche Teile die günstigste Lage und Stärke des Querschnittes bestimmt werden.

Bleiben die Bogenstücke nächst den Kämpfern und im Scheitel unverschoben und in ihrer angenommenen Stärke, so wird die neue Bogenachse im Scheitel und an den Kämpfern flacher als die Tolkmittsche Linie, was im Scheitel eine vermehrte Pressung in der Oberfaser, im Kämpfer in der Unterfaser zur Folge hat. Die größten Beanspruchungen werden auf diese Weise unter Entlassung aller anderen Teile in die Kämpfer- und Scheitelabschnitte verlegt, wo ihnen zumeist in geeigneter Weise begegnet werden kann. Gelingt es nicht den vermehrten Beanspruchungen insbesondere im Scheitel durch besseren Baustoff zu begegnen, so muß dieser entlastet werden. Man hält dann die Nachbarabschnitte fest und verlangt im Scheitel gleiche

Randspannungen. Hierbei wird die Scheitelkrümmung verschärft. Die gleiche Maßnahme im Kämpfer führt auch hier zu einer verstärkten Krümmung. Wollte man auch im Kämpfer- oder Scheitelabschnitt oder gar in beiden Gleichheit der Randspannungen erzielen, so würden die Gleichungen I sehr große Verschiebungen der Bogenachse ergeben, für welche sie nach ihrer Herleitung keine Gültigkeit mehr haben.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man die möglichen Verschiebungen und Querschnittsänderungen jener Bogenabschnitte, in welchen auf gleiche Randspannung verzichtet werden muß, dazu benützen kann, auch in diesen Querschnitten die größte Pressung und den größten Zug dem zulässigen Ausmaß gleichzuhalten. Die hierbei außer der Beziehung II erforderlichen Gleichungen werden ähnlich gewonnen wie II.

Untersuchungen über den Einfluß häufig wiederholter Belastungen auf Beton und Eisenbeton

Von E. Probst, Karlsruhe

(Für Abb. 1—3 s. Tafel XII)

Das Problem des Einflusses wiederholter Belastungen auf die Festigkeitseigenschaften von Baumaterialien ist bisher vorwiegend bei Maschinenkonstruktionen behandelt worden. Die bekannten Untersuchungen von WÖHLER in den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts befassen sich hauptsächlich mit Ermüdungserscheinungen an Eisenbahnachsen. In den 80er Jahren wurde die gleiche Frage von BAUSCHINGER behandelt.

Während im Bauingenieurwesen bisher in erster Linie den Brückenbauer das Problem interessierte, hat es durch den Beton- und Eisenbetonbau auch für andere Konstruktionsarten an Beachtung gewonnen.

Bei einer Brücke werden die Konstruktionsglieder Spannungen ausgesetzt, die von einer unteren Grenze σ_u , der Eigengewichtsspannung, nach einer oberen Grenze σ_0 , der Verkehrslastspannung, und umgekehrt wechseln. Bei Gurtstäben von Fachwerkträgern liegen die Spannungsgrenzen σ_0 und σ_u stets entweder im positiven oder im negativen Gebiet, bei Diagonalstäben kann σ_0 und σ_u je nach der Laststellung entweder im positiven oder im negativen Gebiet liegen, so daß hier ein Spannungswechsel über 0 eintreten muß.

Die neueren Untersuchungen über die Arbeitsfestigkeit von Stählen, die in den letzten Jahren namentlich in Amerika und England gefördert wurden, stammen von HOWARD, HOPKINSON, H. J. MOORE, I. B. JULY, C. E. STROMEYER, D. J. MC. ADAM, J. B. KOMMERS, JENKINS, T. M. JASPER und O. FÖPPL. Sie zeigen deutlich, daß hauptsächlich der Maschinenbauer ein praktisches Interesse an dieser Frage hat.

Bei *Beton* und *Eisenbeton*, als Baumaterial, liegen der Natur der Verbundbauweise entsprechend besondere Verhältnisse vor. Mehr noch als bei Beanspruchungen auf Druck, kann das Verhalten des auf Zug beanspruchten Betons von sehr großer praktischer Bedeutung sein. Die Festigkeitsberechnung erfolgt zwar stets für den Fall, daß der Beton der ganzen Zugzone gerissen und die Eisen sämtliche Biegunszugspannungen aufzunehmen haben. Trotzdem ist unter Umständen die Güte und Sicherheit eines Eisenbetontragwerkes mittelbar von der *Rißsicherheit* abhängig. Risse gewähren den Wasserdämpfen und aggressiven Stoffen den Zugang zu den Eisen. Der Rost, der sich dann bildet, schwächt die Eisenbewehrung und führt u. U. zu einem Absprengen der Betonumhüllung, wodurch die Sicherheit des Bauwerks verringert werden kann.

Für die seit längerer Zeit im Gang befindlichen Untersuchungen wurde in Verbindung mit der Firma *J. Losenhausen*, Düsseldorf, eine Maschine konstruiert, die für Untersuchungen auf Druck und Biegung dient. (Abb. 1, Tafel XII.)

Die Maschine besteht im wesentlichen aus einem unteren und einem oberen Tisch, von denen der untere mit dem Probekörper zur Krafteinwirkung angehoben werden kann, der obere wird unter Zwischenschaltung von vier Dämpfungsfedern zur Verminderung des Hubweges gegen ein oberes Querhaupt abgestützt, das durch vier Säulen mit der Grundplatte verbunden ist. Ein 5 PS-Motor arbeitet auf einem Schneckengetriebe, das eine Kurvenscheibe *A* antreibt. Diese versetzt den durch das Lager *C* gestützten Kniehebel *B* in Schwingungen. Der eine Arm des Kniehebels hat die Gestalt einer zylindrischen Büchse *D*. In dieser Büchse ist eine zweite Büchse *E* verschiebbar angebracht, jedoch ist ihre Lage während des Betriebes gegenüber der Büchse *D* unverschieblich. Die Verstellung von *E* gegen *D* ist nur vorgesehen, um die Hübe des Tisches *K* regeln zu können. In der Büchse *E* ist eine weitere zylindrische Büchse *F* drehbar

aufgehängt. Durch die Büchse F ist der Haupthebel G geführt, der auf H festgelagert ist. Die schwingende Bewegung des Kniehebels B wird also dem Haupthebel G durch die bewegliche Büchse F mitgeteilt, wobei die Büchse F auf dem Hebel G gleitet. Der Hebel G überträgt seine Bewegung durch das Druckgelenkstück J auf den Tisch K .

Die Büchse E ist gegenüber der Büchse D mit Hilfe einer Zahnstange verstellbar, und zwar kann ihre jeweilige Lage an einer besonderen Skala abgelesen werden. Die Einstellung des Hebelverhältnisses und damit des Tisshubes ist also mit großer Genauigkeit ($1/10$ mm) möglich.

Die Kurvenscheibe A ist in der Prinzipskizze der Einfachheit halber um eine zur Bildebene senkrechte Achse drehbar dargestellt. In Wirklichkeit liegt ihre Achse parallel zur Bildebene und die Kurven sind senkrecht zur Scheibe auf deren Rand aufgebracht.

Das Lager C ist ein normales Zapfenlager, ebenso wie die Aufhängung der Büchse F in der Büchse E . In der Prinzipskizze ist diese Aufhängung der Deutlichkeit halber aus der Mittellinie der Büchse D herausgerückt. Die Lagerung bei H ist ebenfalls durch einen Zylinderzapfen bewirkt. Die Kugelhöfe des Druckgelenkstückes J sind in Kugelpapfen gelagert.

Die für 10 t Höchstlast konstruierte Maschine diente zu den bisher abgeschlossenen Untersuchungen auf reinen Druck. (Abb. 2, Tafel XII.) Die Belastungsgeschwindigkeit konnte zwischen 30 und 90 Hüben in der Minute reguliert werden.

Für die weiteren Arbeiten konnte, dank der Unterstützung der Helmholtz-Gesellschaft, eine Maschine für 50 t Höchstlast gebaut werden (Lichtbild 3, Tafel XII).

Für die nunmehr im Anfangsstadium befindlichen Untersuchungen auf *Biegung* ist es von besonderem Vorteil, daß gleichzeitig auf 2 Maschinen beobachtet werden kann. Während die 10 t-Maschine für die Untersuchungen auf Biegung dienen soll, werden die zur Ermittlung der Spannungen erforderlichen Elastizitätsmessungen an gleichalterigen Betonprismen zur gleichen Zeit auf der 50 t-Maschine ausgeführt.

Die Untersuchungen über den Einfluß häufig wiederholter Belastungen auf Druckfestigkeit und Druckelastizität wurden von dem früheren Assistenten des Vortragenden, Dr. Ing. A. MEHMEL, ausgeführt. Die Arbeit ist als Dissertation im Jahre 1926 im Verlag J. Springer, Berlin, im Druck erschienen.

Die wesentlichsten Ergebnisse zeigen, daß bei Beton im σ - ϵ -Diagramm die Prozesse, die zunächst nicht umkehrbar sind, durch häufige Lastwiederholungen umkehrbar werden, solange eine kritische Spannung nicht überschritten wird. Diese liegt, im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen, zwischen 47 und 60 v. H. von σ_D .

Die Zunahme der bleibenden Formänderungen ist erheblich größer als die der federnden; bei letzteren tritt zuerst innerhalb gewisser Grenzen eine Art Beharrungszustand ein und zwar um so später, je höher die obere Grenzspannung ist.

Die der erstmaligen Beanspruchung entsprechende σ - ϵ -Linie mit der ϵ -Achse zugewandten Krümmung wird schon nach wenigen Lastwiederholungen zur Geraden gestreckt, die bei weiteren Wechselbeanspruchungen eine Drehung um den Koordinatenursprung ausführt. (Abb. 4.)

Die Lastwiederholungen unterhalb der kritischen Spannung führen zu einer Verfestigung des Betons über die obere Grenzspannung hinaus, ohne die Bruchfestigkeit zu beeinflussen.

Ist die obere Grenzspannung der Wiederholungen höher als die kritische Spannung, so fängt der Körper zu ermüden an. Die Krümmung der σ - ϵ -Linie kehrt sich um und zeigt ihre hohle Seite der σ -Achse; $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_u}$ wird kleiner. Der Charakter der σ - ϵ_{fed} -Linie und nicht die bleibenden Formänderungen sind für die Ermüdung charakteristisch. (Abb. 5.)

Nachdem in dieser Weise die Frage des Einflusses häufig wiederholter Druckbelastungen für Beton einer Mischung geklärt werden konnte — Zusammensetzung und Alter des Betons

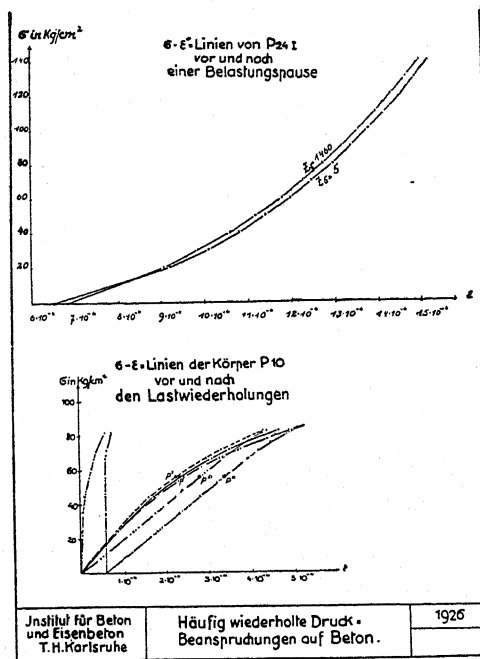


Abb. 4.

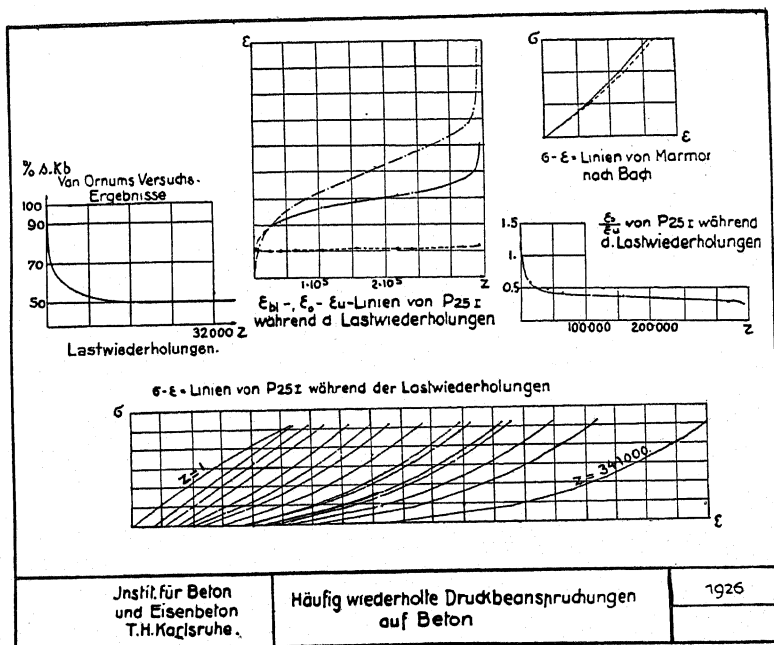


Abb. 5.

werden an den grundsätzlichen Ergebnissen nicht ändern —, liegt es nahe, die gleichen Untersuchungen für einen Zug durchzuführen. Auf diese wird vorerst verzichtet. Da aber bei Eisenbetonkonstruktionen den Biegungsspannungen zudem größere Bedeutung zukommt, werden die

nächsten Untersuchungen an Balken aus Beton und Eisenbeton durchgeführt werden, die auf Biegung beansprucht werden.

Als Vorbereitung zur Weiterführung dieser Untersuchungen wurde ein 3 Jahre alter Eisenbetonbalken mit den Abmessungen (Querschnitt: 10/17 cm; 1,40 m Spannweite mit entsprechender Eisenbewehrung) durch 2 im Abstand von 40 cm zur Mitte symmetrische Einzelasten unterhalb der Biegungszugfestigkeit des Betons und später in der Nähe der Streckgrenze der Eiseneinlagen wiederholten Biegungsbeanspruchungen ausgesetzt. Die Geschwindigkeit der Belastungswechsel wurde mit 1—1,5 Hüben pro Sekunde gewählt.

Neben Durchbiegungsmessungen wurden mit Hilfe von Martensschen Spiegelapparaten die Längenänderungen an der Zugseite vor Auftreten der Risse im Beton und später in der Druckzone gemessen.

I. Es zeigte sich, daß 72,000 Lastwechsel die federnden Dehnungen des auf Biegung beanspruchten Betons nicht wesentlich, die bleibenden Dehnungen jedoch erheblich vergrößert haben, was auch in der Entwicklung der beobachteten Risse zum Ausdruck kommt.

II. Eine große Zahl von Lastwiederholungen (bis zu 280,000) bestätigte für den auf *Biegungsdruck* beanspruchten Beton die Ergebnisse der Untersuchungen bei reinem Druck. Die Eiseneinlagen zeigten ähnliche Erscheinungen, wie sie bei Eisenkonstruktionen beobachtet wurden.

Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr

I. Teil.

Von M. Roš, Zürich

(Hiezu Tafel XIII)

I. Die Festigkeitstheorien

Die älteren Theorien von der nach Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze eintretenden Störung des inneren elastischen Gleichgewichtes bzw. von der Bruchgefahr, nämlich:

- die Hypothese der größten Hauptspannung,
- die Hypothese der größten positiven Hauptdehnung, und
- die Hypothese der inneren Reibung,

können sich, weil im Widerspruche mit den Ergebnissen der Versuche bzw. der Erfahrung, nicht behaupten.

Die Theorie der größten Schubspannung von GUEST-MOHR¹⁾ für zähe Körper hat sich gestützt auf ältere Versuche als die zutreffendere erwiesen. Versuche mit zähen Stoffen (Flußeisen, Kupfer, Stahl) sollen für Zustände an der Elastizitäts- bzw. Fließgrenze einen annähernd gleichbleibenden Wert für den Unterschied zwischen der größten Hauptspannung σ_3 und kleinsten σ_1 ergeben haben, ganz unabhängig von der Größe der mittleren Hauptspannung σ_2 . Die größte Schubspannung strebte einem konstanten Werte zu von der Größe:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \text{konstant.} \dots \dots \dots (1)$$

Die Versuche von TH. v. KÁRMÁN²⁾ mit spröden Stoffen (Marmor und Sandstein), welche sich unter allseitigem Druck wie zähe Stoffe mit mehr oder weniger ausgeprägter Quetschgrenze verhielten, bestätigten sehr schön die Mohrsche Vorstellung von der Elastizitätsgrenze.

R. BÖKER³⁾ führte unter allseitigem Druck Zugversuche durch und stellte fest, daß der *Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Elastizitätsgrenze*, im Gegensatz zur Annahme Mohrs, vorhanden ist. Er stellte Unterschiede von 9—11 % fest.

Neuere amerikanische Versuche mit Stahlmaterial führten zur einwandfreieren Feststellung, daß die Fließgrenze für Torsion

$$\begin{aligned} &\cong 0,60 \sigma_s \text{ (Fließgrenze für Zug = Streckgrenze)} \\ \tau_{max} &\cong 0,60 \sigma_f \text{ (Fließgrenze für Druck = Quetschgrenze)} \end{aligned}$$

beträgt, somit höher als $\tau_{max} = 0,50 \sigma_f$ entsprechend Mohr, ist.

Im Jahre 1904 stellte Prof. M. T. HUBER⁴⁾ (Lwów) die Theorie der konstanten Gestaltungsänderungsarbeit als Maß für die Anstrengung des Materials auf. Die gleiche Beziehung als Plastizitätsbedingung leiteten mit etwas abweichender Begründung und unabhängig die Herren

¹⁾ O. MOHR, «Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?» Zeitschrift des V. D. I. 1900. «Abhandlungen auf dem Gebiete der technischen Mechanik», 1905/1913. J. GUEST, «Philosophical Magazine», Bd. 50, 1900. M. MESNAGER, «Déformation et rupture des solides». Revue de métallurgie No. 6 et 7, 1922.

²⁾ TH. VON KÁRMÁN, «Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck». Mitteilungen über Forschungsarbeiten V. D. I., Heft 118, 1912.

³⁾ R. BÖKER, «Die Mechanik der bleibenden Formänderung in kristallinisch aufgebauten Körpern.» Mitteilungen über Forschungsarbeiten V. D. I., Heft 175/176, 1915.

⁴⁾ M. T. HUBER, «Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Anstrengung eines Materials.» Lemberg 1904. Siehe auch A. Föppl «Drang und Zwang». Erster Band S. 50, 1920.

Prof. R. v. MISES⁵⁾ (im Jahre 1913) und H. HENCKY⁶⁾ (im Jahre 1924) ab. Diese Plastizitätsbedingung, durch die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 ausgedrückt, lautet:

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3) = 4k^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

wenn mit $2k$ die Plastizitätsgrenze (Streck- bzw. Quetschgrenze) für den einaxigen Spannungszustand bezeichnet wird. k ist somit eine Materialkonstante.

Aus dieser Beziehung geht hervor, daß, im Gegensatz zu Mohr und ganz allgemein, die *mittlere Hauptspannung σ_2 auf die Fließgrenze von Einfluß sein muß.*

Die genauere Betrachtung des Huber-Henckyschen Satzes führt zur Erkenntnis von dessen ganz allgemeiner Gültigkeit, vom Beginn der ersten Formänderung bis unmittelbar vor Erreichung der Bruchgrenze.

Es gibt jedoch viele zwei- und dreiaxige Spannungszustände, für welche die Mohrsche Theorie für Spannungszustände an und in der Plastizitätsgrenze gilt und somit auch der Plastizitätsbedingung, als Sonderfall, genügt.

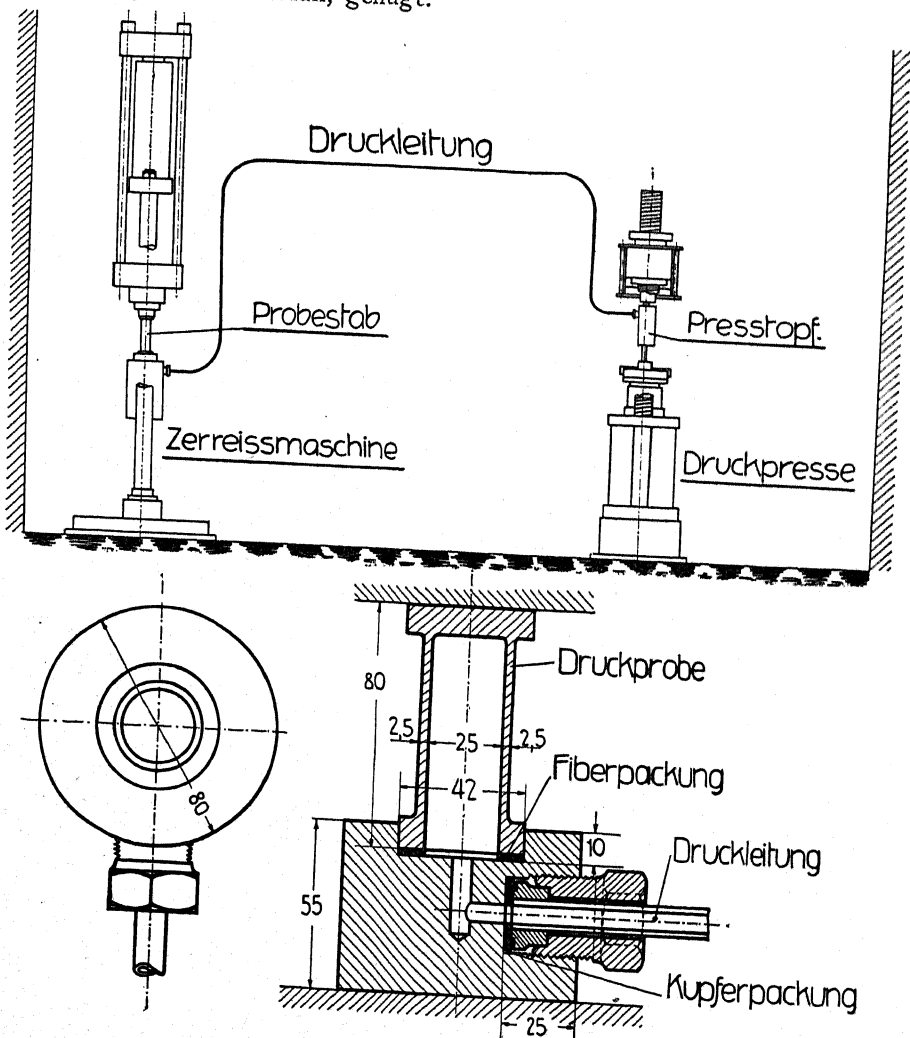


Abb. 4.
oben: Versuchseinrichtung, unten: Druckversuch.

⁵⁾ R. VON MISES, «Göttinger Nachrichten.» 1913, S. 582/592.

⁶⁾ H. HENCKY, «Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen.» Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 4, Heft 4, 1924.

II. Die Versuchseinrichtung und Versuchsstäbe

29 hohle Stäbe wurden Druck-, Zug- und Torsionsversuchen mit und ohne Innendruck unterworfen (Abb. 1, 2 und 3, Tafel XIII). Auf diese Weise war es möglich, sehr verschiedenartige, dreiaxige Spannungszustände zu erzeugen (Abb. 8 bis 14).

Vermittelt eines eigens zu diesem Zwecke von der Firma A. J. AMSLER & Co. in Schaffhausen konstruierten Multiplikators (Preßtopf), der in eine Amslersche Presse eingebaut war, wurde der Innendruck i ausgeübt (Abb. 4 und 5).

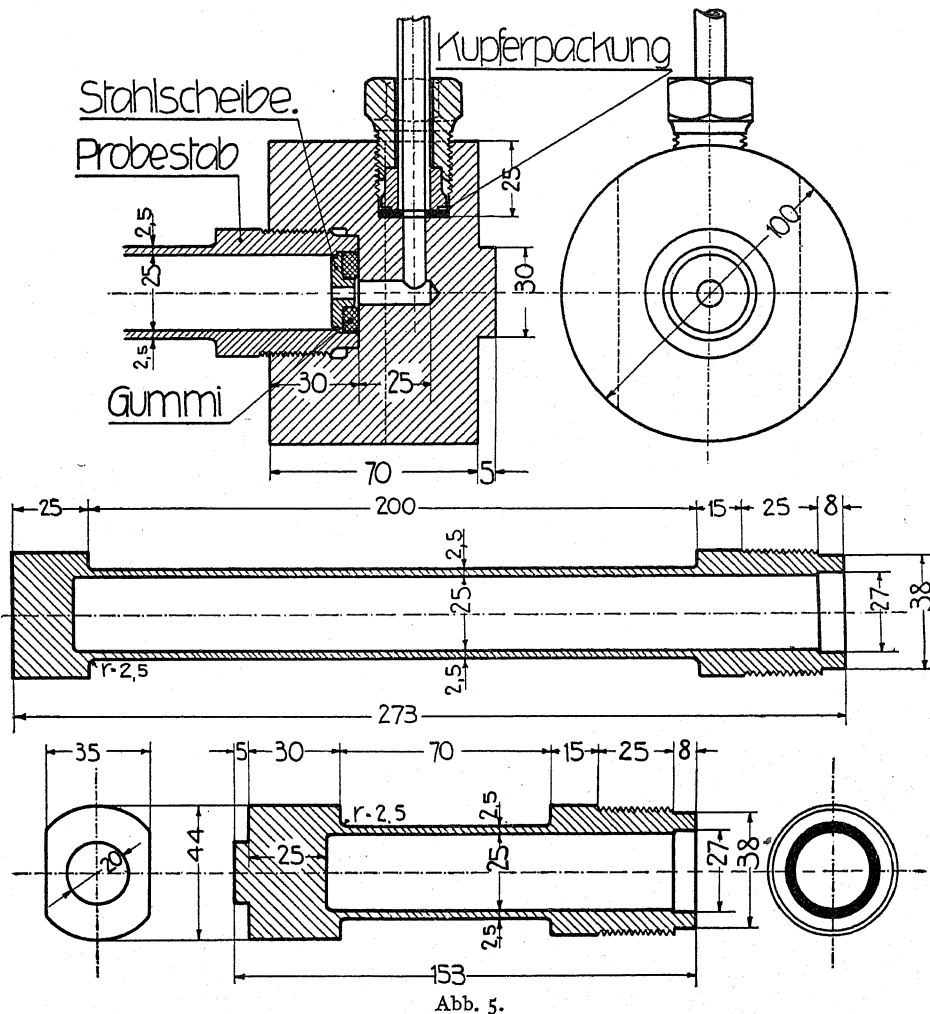


Abb. 5.

oben: Anschlußflansch für die Zug- und Torsionsversuche. Mitte: Zugversuch. unten: Torsionsversuch.

Sämtliche Versuchsstäbe aus sorgfältig ausgewähltem Material, der gleichen Welle entnommen, wurden durch Kaltbearbeitung hergestellt. Jeder Stab wurde nur einmal den Versuchen unterworfen.

Die Messungen erfolgten längs und quer durch je 2 diametral und jeweils in gleicher Höhe angeordnete Spiegelapparate bzw. Dehnungsmesser (Abb. 1, 2 und 3).

Die Ungleichheit der Spannungen in radialer Richtung zufolge des Innendruckes i , welche an der inneren Wandung der hohlen Versuchskörper die Größe i und an der Außenwandung die Größe o erreichen, des ferner die über den Wandquerschnitt etwas ungleiche Spannungsverteilung in Querrichtung (Ringspannung) wurden, wenn sie auch Schwierigkeiten

für die Beurteilung der Anstrengung an der Fließgrenze mit sich bringen (Plastisches Gleichgewicht, Variationsrechnung) gerne in den Kauf genommen, gegenüber den unschätzbaren Vorzügen, welche die unmittelbare Beobachtung der jeweiligen Deformationszustände gleichzeitig in Längs- und Querrichtung bietet (Abb. 6).

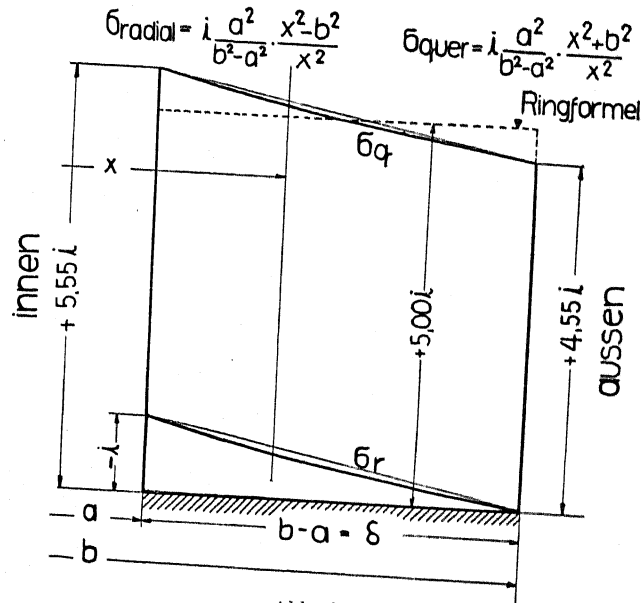


Abb. 6.
Verlauf der Spannungen σ_q quer (Ringspannung) und σ_r radial (Innendruck).

III. Theoretische Grundlagen

Trägt man die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so läßt sich der jeweilig ins Auge gefaßte Grenzzustand nach Mohr ($\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$) (Elastizitäts-, Plastizitäts-, Bruchgrenze) als auf der Fläche eines regelmäßigen sechseckigen Prismas liegend, darstellen. Die Kanten des Prismas liegen auf einem Kreiszylinder, dessen Halbmesser $2k \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ beträgt. Der Schnitt dieses sechseckigen Prismas mit der $\sigma_1 - \sigma_2$ -Ebene ist ein Sechseck. Die Endpunkte auf den σ_1 - und σ_2 -Achsen entsprechen dem Werte $2k = 2\tau =$ konstant. Die Axe des Prismas schließt mit den positiven Richtungen der 3 Koordinatenachsen σ_1 , σ_2 und σ_3 den gleichen Winkel $\varphi = 54^\circ 40'$ ein ($\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$) ⁷⁾ (Abb. 7).

Die Plastizitätsbedingung der konstanten Gestaltänderungsarbeit, von Huber-Hencky durch die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 ausgedrückt, lautet:

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3) = 4k^2, \quad \dots \dots \dots (2)$$

worin $2k =$ Streckgrenze (Zug) = Quetschgrenze (Druck), somit $k =$ Materialkonstante. Sie läßt sich durch einen dem Sechseckprisma umschriebenen Kreiszylinder darstellen (Abb. 7).

Der Unterschied in den Grenzwerten (Elastizitäts-, Fließ- oder Bruchgrenze) nach den beiden Theorien folgt unmittelbar aus dem Unterschied zwischen dem Spannungsprisma und dem Spannungszyylinder. Dieser ist für ebene Spannungszustände am größten für die Punkte

⁷⁾ H. M. WESTERGAARD, «On the Resistance of ductile materials.» Journal of Franklin Institut. May 1920, Pag. 627/640.

B_1 , B_2 und B_3 und erreicht einen Wert bis zu 15 % zuungunsten der Theorie von Guest-Mohr (Abb. 15).

Da sowohl nach der Theorie von Guest-Mohr als auch nach dem Ansatz von Huber-Hencky die Ausdrücke, die Hauptspannungen enthalten (linke Seite der Gleichung), Funktionen des Innendruckes i sind und andererseits die Materialkonstante k (rechte Seite der Gleichung),

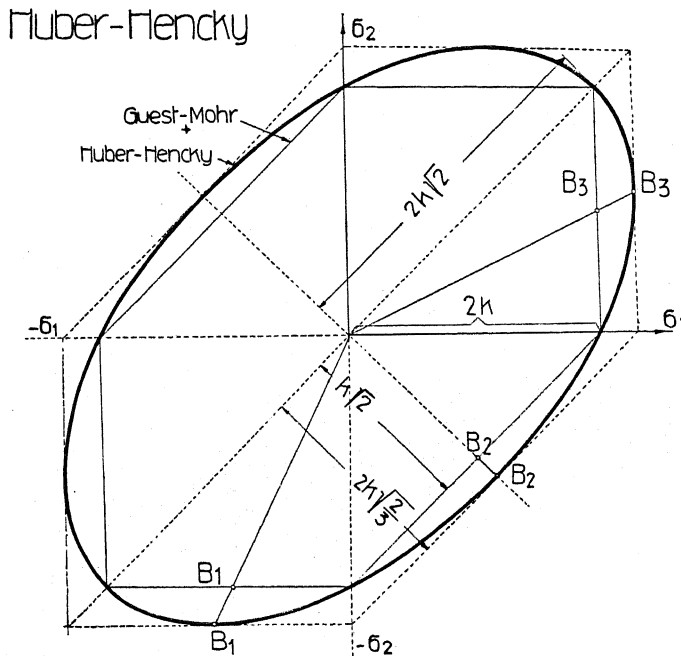


Abb. 7.

Räumliche bzw. ebene Darstellung der Grenzwerte von Huber-Hencky für zähe Stoffe.

durch den einaxigen Zug-, bzw. Druckversuch einwandfrei festgestellt werden konnte, war es möglich, die den jeweiligen kombinierten Spannungszuständen entsprechenden, nach Guest-Mohr und Huber-Hencky zu erwartenden i -Werte rechnerisch zu ermitteln und den aus den zugeordneten Versuchen ermittelten i -Werten bei Erreichung der Plastizitätsgrenze gegenüberzustellen (Abb. 8 bis 14).

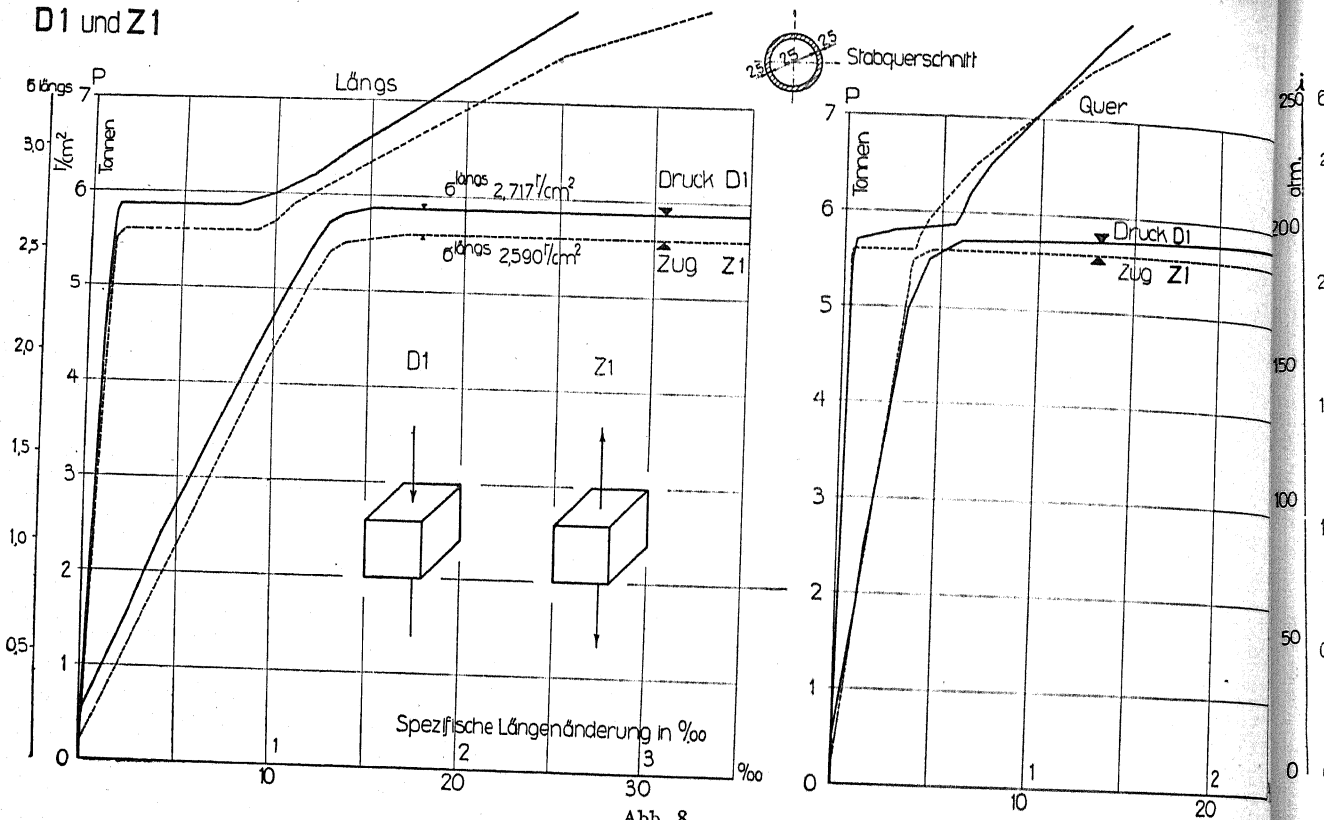
Kurz vor dem Erreichen der Plastizitätsgrenze an der inneren Wandung der Hohlkörper sind die mit I bezeichneten Spannungszustände gültig. Die mit II bezeichneten Spannungszustände sind mit genügender Schärfe gültig für ein Element der Mitte der Wand in Fließzustand, welches die gleiche Anstrengung aufweist, wie ein Element der Außenwandung beim Erreichen des Fließens außen, woselbst letzteres scharf durch die Dehnungsmesser registriert werden konnte (Abb. 8 bis 14).

IV. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Auf Grund der Versuche der E.M.P.A.⁸⁾ mit Hohlkörpern aus zähem S.M.-Stahl von sehr gleichmäßiger Beschaffenheit auf Zug, Druck und Torsion ohne und mit Innendruck ausgeführt, läßt sich sagen:

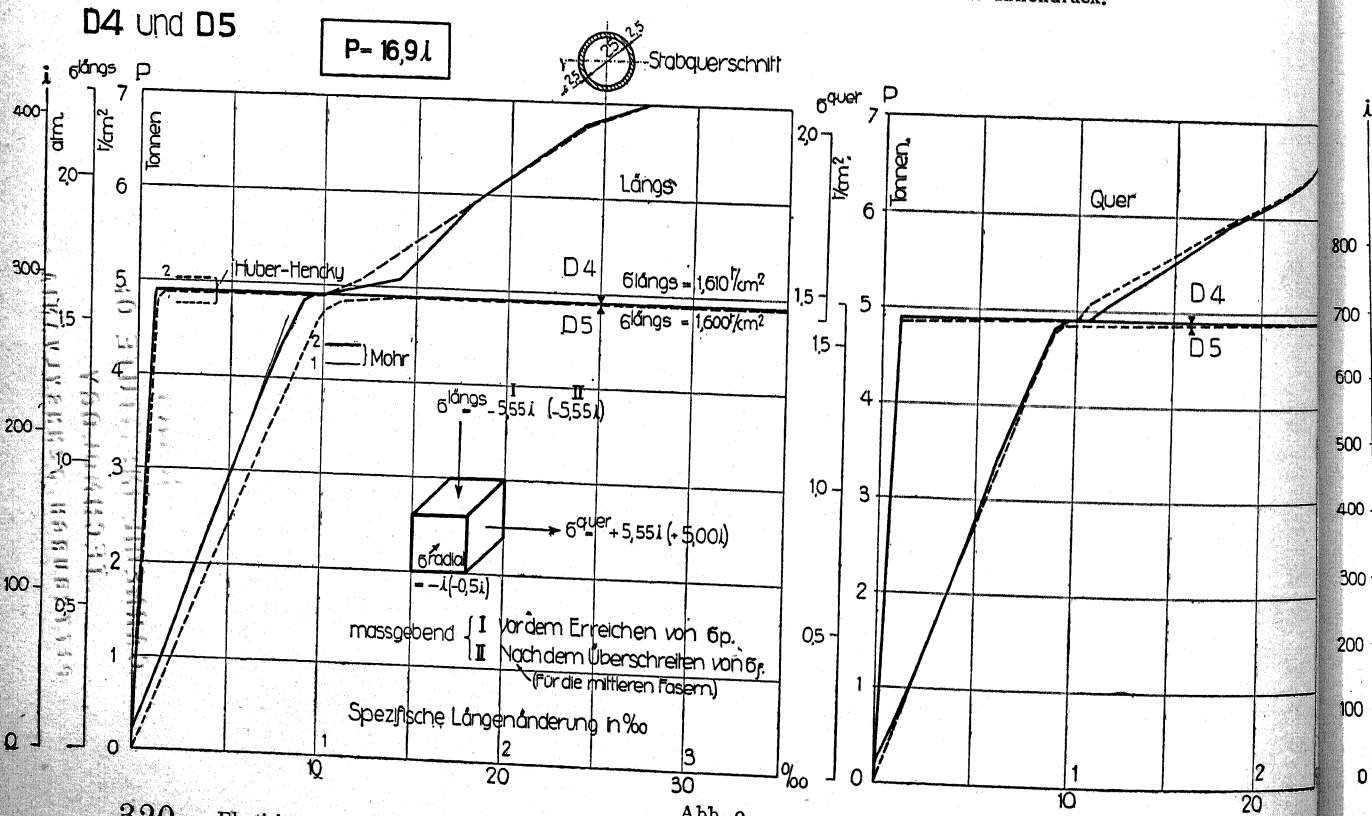
⁸⁾ M. Roš und A. EICHINGER, «Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr.» Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H. Zürich. Schweiz. Verband für die Materialprüfungen der Technik. Zürich, September 1926.

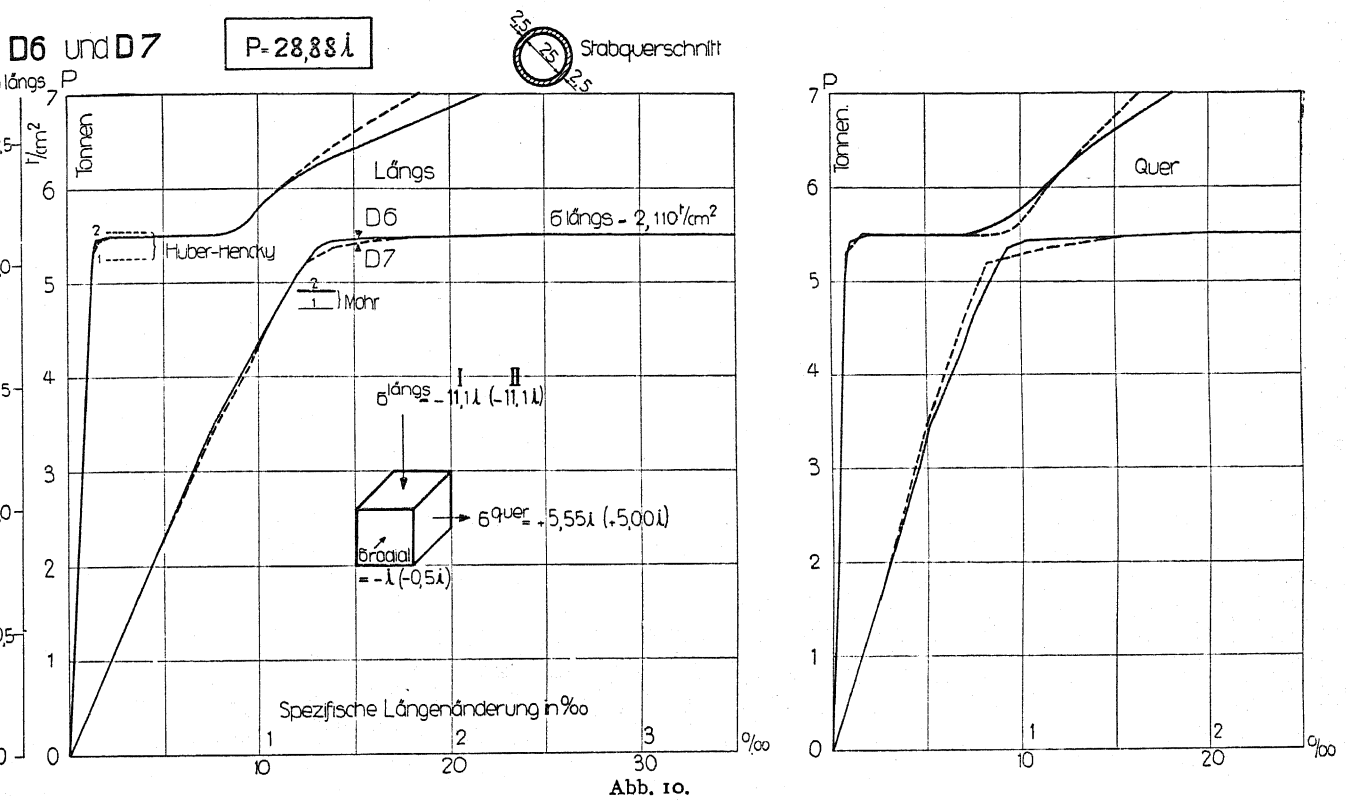
D1 und Z1



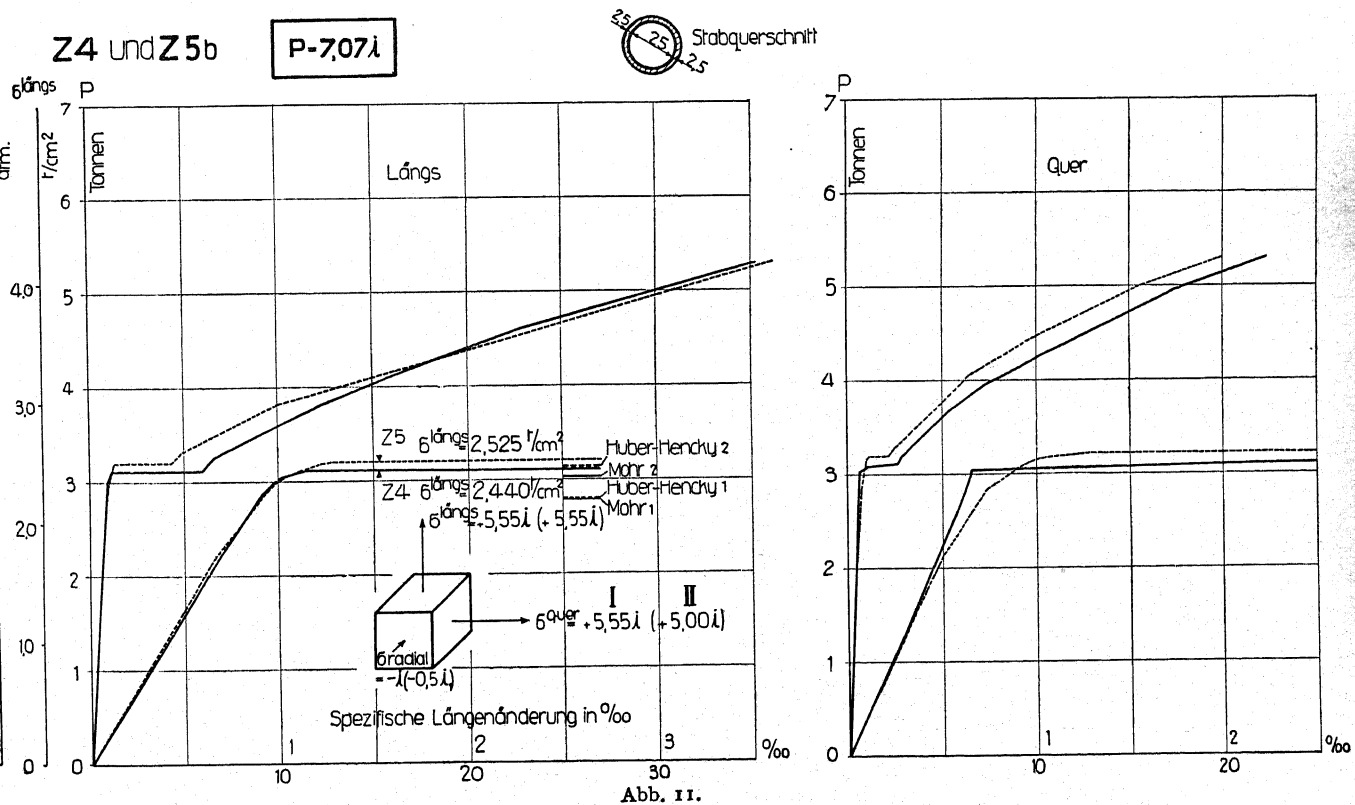
Elastizitätsmessung. Druck- und Zugversuche mit hohlen Stäben ohne Innendruck.

D4 und D5





Elastizitätsmessung. Druckversuche mit hohlen Stäben mit Innendruck. Spannungszustand: $(-\sigma_l) = (+2\sigma_q)$.



Zugversuche mit Innendruck mit hohlen Stäben. Spannungszustand: $(+\sigma_l) = (+\sigma_q)$.

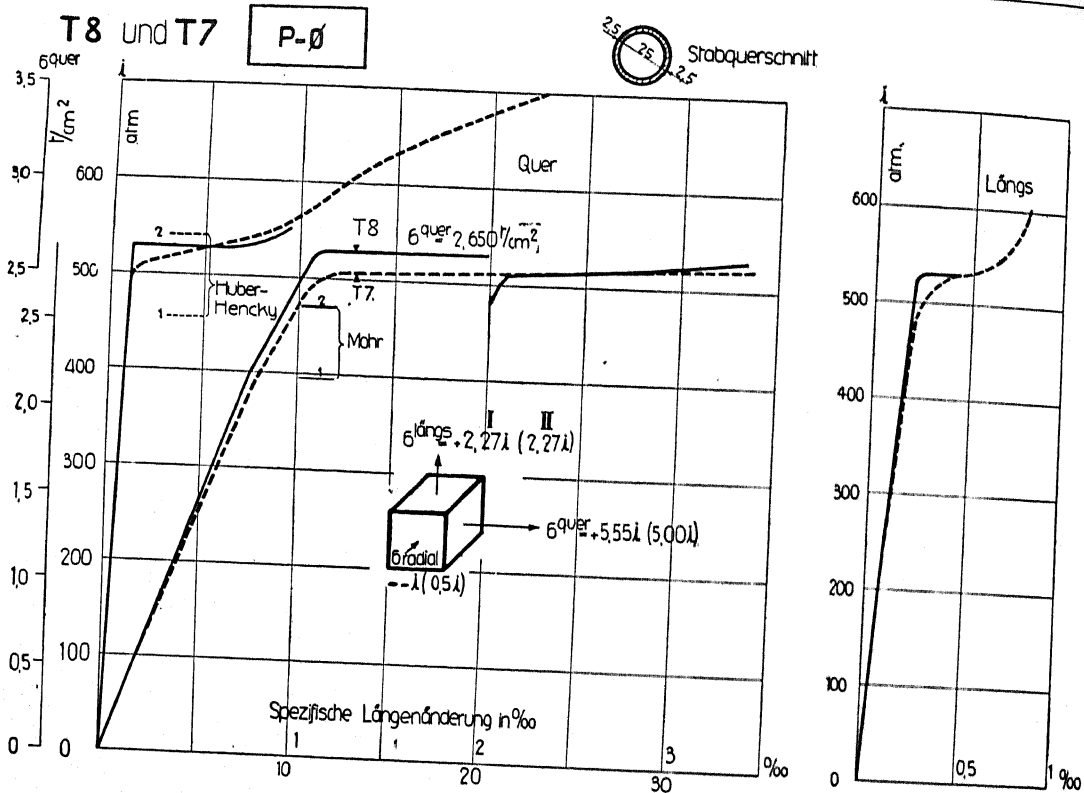


Abb. 12.

Abb. 12.
Elastizitätsmessung. Zugversuche mit hohlen Stäben mit Innendruck. Spannungszustand $(+\sigma_l) = (+0,5 \sigma_q)$.

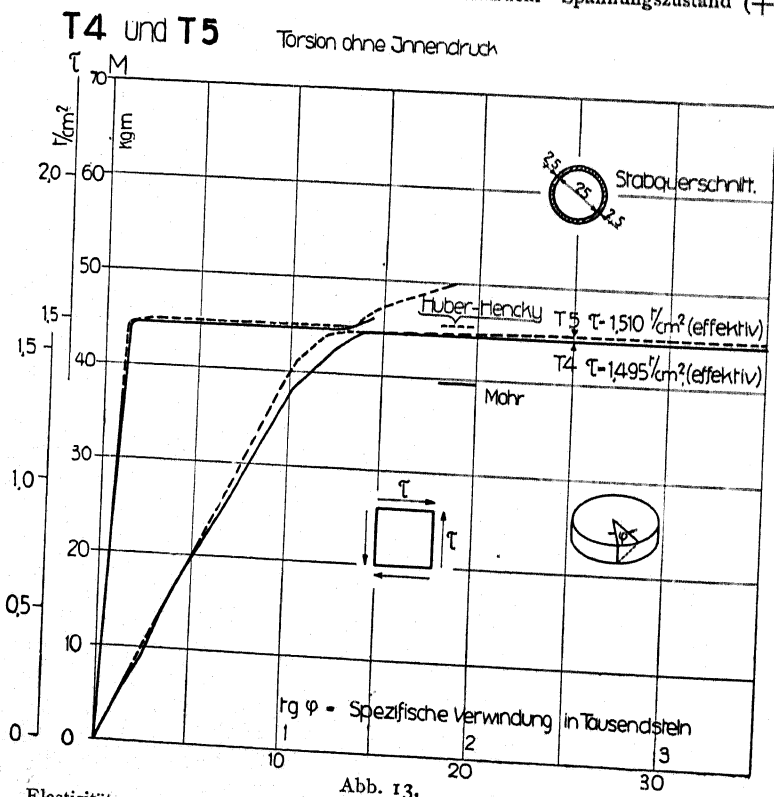


Abb. 13.

Elastizitätsmessung. Torsionsversuche mit hohlen Stäben ohne Innendruck.

T2 und T3

M-27,9l



Stabquerschnitt

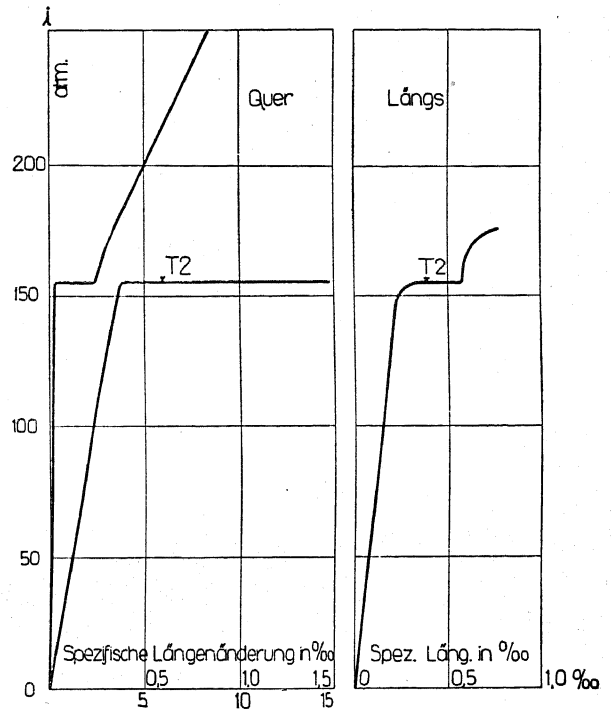
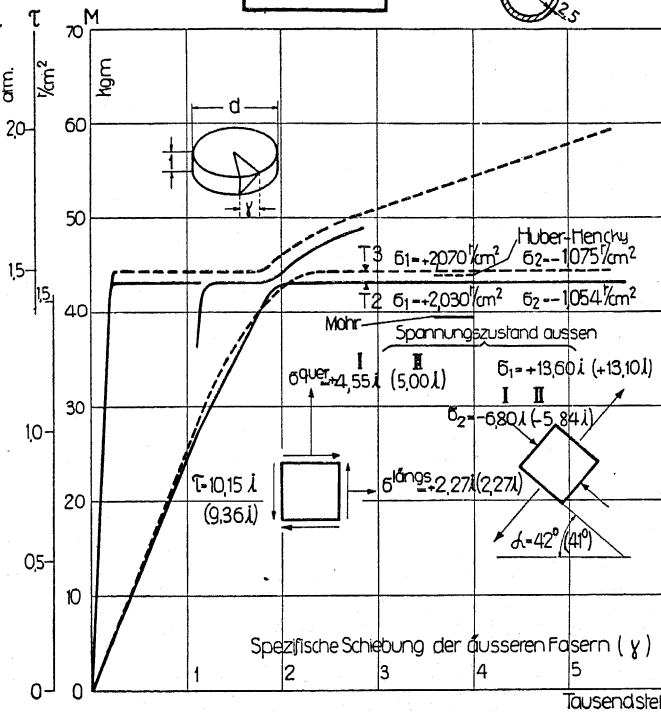


Abb. 14.

Elastizitätsmessung. Torsionsversuche mit hohlen Stäben mit Innendruck. Spannungszustand: $(+\sigma_1) = (-2\sigma_2)$.

Tabelle I

Bruch-Spannungszustände der Versuchsstäbe

Stab No.	Höchstlast		Spannungszustände bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt (Zustand II)				Bruchlast		Spannungszustände bezogen auf den Bruchquerschnitt (effektiv)				Art des Bruches
	P_{\max}	i_{\max}	σ_l	σ_q	σ_r	τ_{\max}	P_B	i_B	σ_l	σ_q	σ_r	τ_{\max}	
Masse	t	atm	t/cm ²	t/cm ²	t/cm ²	t/cm ²	t	atm	t/cm ²	t/cm ²	t/cm ²	t/cm ²	
Z1	10,46	0	4,84	—	—	2,42	9,30	0	8,30	—	—	4,15	Gleitungsbruch
Z6	33,30	0	4,71	—	—	2,36	25,10	0	8,74	—	—	4,37	Gleitungsbruch
Z2	9,20	482	5,36	2,41	-0,24	2,80	9,20	482	unbestimmt				Gleitungsbruch
Z3	9,20	478	5,35	2,39	-0,24	2,80	9,20	478	8,36	3,67	-0,24	4,30	Gleitungsbruch
Z4	5,30	770	4,20	3,85	-0,38	2,29	5,30	770	4,50	4,29	-0,39	2,45	Trennungsbruch (Schlacken-Einschlus)
Z5	5,72	810	4,49	4,05	-0,41	2,45	5,72	810	5,61	5,71	-0,41	3,06	Trennungsbruch
T1	-4,90	860	0,00	4,30	-0,43	2,36	4,90	860	-0,19	5,23	-0,43	2,83	Trennungsbruch
T7	0	852	1,94	4,26	-0,43	2,35	Ø	852	2,39	5,18	-0,43	2,81	Trennungsbruch
	M_{\max}	i_{\max}	σ_1	σ_2	σ_3	τ_{\max}	M_B	i_B				τ_{\max}	
T6	79,8	0	-4,26	4,26	0	4,26	gleich wie auf dem urspr. Querschnitt					4,26	Gleitungsbruch
T2	122,5	440	—	—	—	4,10	122,5	440	—	—	—	4,29	Gleitungsbr.a.Kopf
T3	122,5	440	—	—	—	4,10	122,5	440	—	—	—	4,29	Gleitungsbr.a.Kopf

$\sigma_x = \sigma_l =$ Längsspannung.
 $\sigma_x = \sigma_q =$ Ringspannung.
 $\sigma_y = \sigma_r =$ Radialspannung.
(+) = Zug.
(-) = Druck.

$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\}$ Hauptspannungen.

$\sigma_z = \sigma_l$ = Längsspannung.
 $\sigma_r = \sigma_q$ = Ringspannung.
 $\sigma_y = \sigma_r$ = Radialspannung.
 (+) = Zug.
 (-) = Druck.

σ_1
 σ_2
 σ_3

Hauptspannungen.

1. Die Ergebnisse der Versuche im Bereich der Fließgrenze zeigen mit der Theorie der konstanten Gestaltänderungsarbeit von HUBER-HENCKY fast genaue Uebereinstimmung (Abb. 8 bis 14).
2. Gegenüber der Theorie der größten Schubspannung von GUEST-MOHR ergeben die Versuchsergebnisse Unterschiede bis zu max. 15 % (Abb. 15). Die Werte nach Guest-

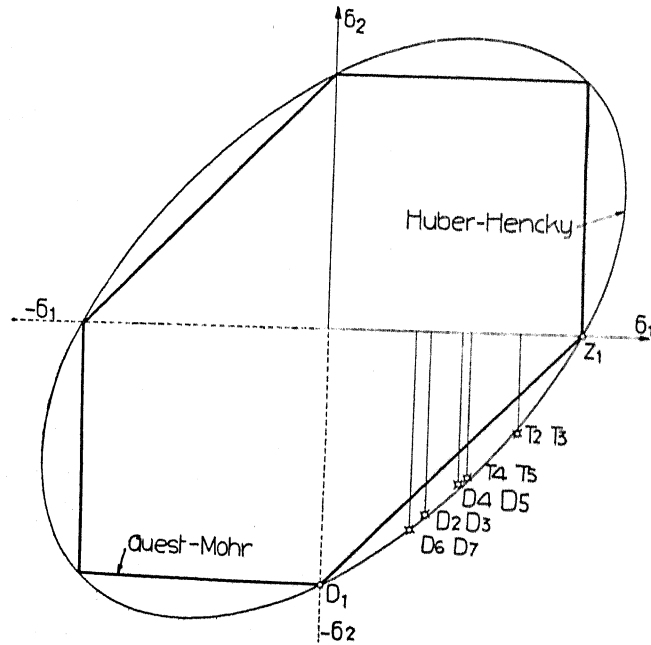


Abb. 15.

Ergebnisse der Versuche. Theoretische Werte.

Mohr sind kleiner. Eine Hüllkurve in Mohrscher Darstellung ist nicht möglich (Abb. 16). Durch die Versuche wurde der Einfluß der mittleren Hauptspannung in unverkenn-

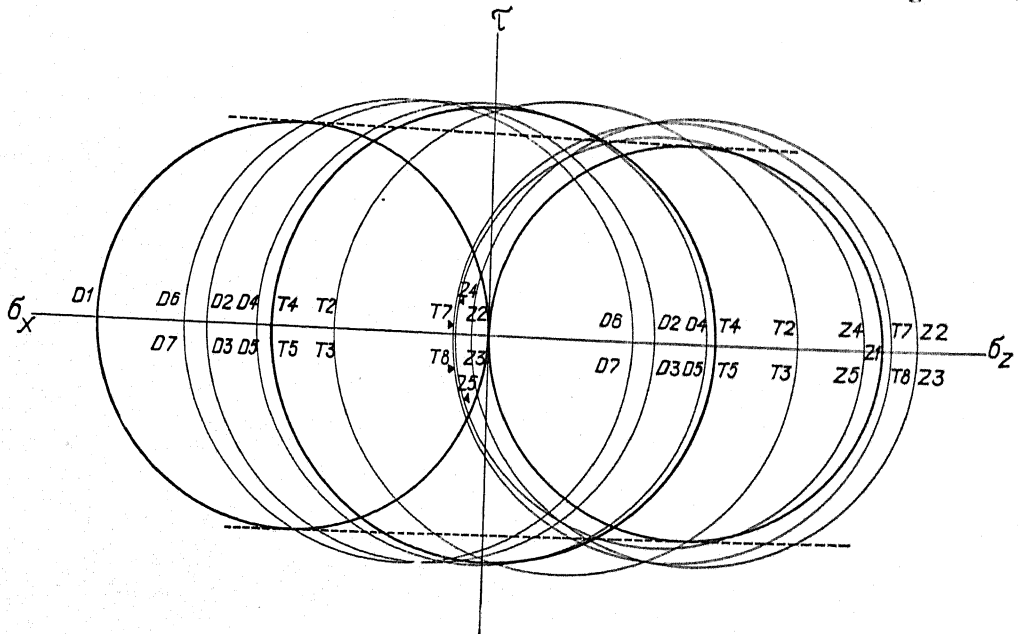


Abb. 16.

Die Mohrschen Hauptkreise sämtlicher Druck-, Zug- und Torsionsversuche mit hohlen Körpern.

barer Weise nachgewiesen⁹⁾. In einigen Sonderfällen stimmen Guest-Mohr und Huber-Hencky genau überein.

Die Theorie von Guest-Mohr wird einer praktisch sehr brauchbaren Annäherung gerecht.

3. Aus den Ergebnissen der Spannungszustände und Formänderungen nach Bruch ist zu entnehmen, daß sich die Bruchtheorie von Mohr für den Bruch selbst (nach Trennung der Teile) behaupten kann, insofern man sie, im Einklang mit der Mohrschen Voraussetzung, auf den *Gleitungsbruch* beschränkt. Der Gleitungsbruch wird durch einen praktisch konstant verbleibenden Größtwert der Schubspannung, bezogen auf den effektiven Bruchquerschnitt, bedingt (Tabelle I).
4. Ganz geringe Unhomogenitäten (Schlackeneinschlüsse etc.) können einen Trennungsbruch zur Folge haben und dann scheint die größte Zugspannung, bezogen auf den wirklichen Bruchquerschnitt, maßgebend zu sein (Tabelle I).
5. Die Versuche bestätigen die Tatsache, daß zähe Stoffe mit ausgesprochener Fließgrenze im plastischen Gebiet ihre *Quasiisotropie* nicht einbüßen. Das Fließen erfolgt in allen Richtungen gleichzeitig (Abb. 8 bis 14).
6. Die *Poissonsche Querdehnungszahl* m nimmt für Spannungszustände innerhalb des plastischen Bereiches und auch darüber hinaus, auf die bleibenden Formänderungen bezogen, genügend genau den Wert $m = 2$ an (Abb. 8).

⁹⁾ A. NÁDAI, «Zur Mechanik der bildsamen Formänderungen.» Werkstoffausschußbericht No. 56 des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute 1925. W. LOPE, «Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle, Eisen, Kupfer und Nickel». Zeitschrift für Physik 1926, Heft 11 — 12.

2. Teil.

Von A. Eichinger, Zürich

Auf Grund der vorliegenden Ergebnisse wurde versucht, in Erkenntnis der Deformationsvorgänge vor und insbesondere nach Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze bzw. Fließgrenze einen neuen Beweis für die Gültigkeit der Beziehung:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 = 4k^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

zu erbringen. In Anlehnung an die Theorie von Mohr und in besserer Anpassung an die Versuchsergebnisse ist dieses auch gelungen.

Es interessiert uns vorläufig in erster Linie, wie sich der Körper bei allgemeinem Spannungszustand verhält, wenn seine Festigkeitseigenschaften bei einachsigen Zug und einachsigen Druck genau bekannt sind.

Durch die vorliegenden Versuche ist für Stähle der Beweis erbracht, daß die totalen Formänderungen in zwei Teile getrennt werden können, und zwar:

In die elastischen Formänderungen, welche den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \alpha \left[\sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ e_2 &= \alpha \left[\sigma_2 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ e_3 &= \alpha \left[\sigma_3 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

(für Stahl ist $m = \frac{10}{3}$ und $\frac{1}{\alpha} = 2100000 \text{ kg/cm}^2$) genügen und in die bleibenden Formänderungen, welche die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \delta \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \epsilon_2 &= \delta \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \epsilon_3 &= \delta \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

erfüllen.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind Hauptspannungen. In den Gleichungen (4) gilt $m = 2$ nur für kleine bleibende Formänderungen, für große muß m aus der Bedingung: Volumenänderung $\Delta V = 0$ abgeleitet werden. Der Körper bleibt danach auch weiter isotrop.

Die Theorie von Mohr trägt der durch die Gleichungen (4) ausgedrückten Tatsache nicht Rechnung, da nach dieser das Gleiten nur in jenen Flächen stattfinden sollte, welche die größte Schubspannung enthalten. Die Körperabmessung sollte demnach in der Richtung der mittleren Hauptspannung σ_2 keine Aenderung erfahren, es sollte nämlich ganz allgemein $\epsilon_2 = 0$ sein. Da dieses aber nicht der Fall ist, so wird der erste Teil der Hypothese von Mohr-Guest wie folgt zu vervollständigen sein:

Die bleibenden Formänderungen kommen durch Verschiebungen in Gleitebenen zustande, die mit den Ebenen der Hauptschubspannungen identisch sind. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß die Formänderungen durch die Gleichungen (4) ausgedrückt, schon durch das Vorhandensein zweier Systeme dieser Gleitebenen zustandekommen könnten (z. B. die auf die Ebenen YZ und XZ senkrecht stehenden), was auch im weiteren der Einfachheit halber angenommen wurde.

Diese zwei komponentalen Verschiebungen müssen laut den Gleichungen (4) $2 \cdot h \cdot \epsilon_1$ und $2 \cdot h \cdot \epsilon_2$ betragen, wobei h der konstante Abstand dieser Gleitebenen ist (Abb. 17). Die resultierende Verschiebung ist:

$$S = 2 h \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \dots \dots \dots (5)$$

oder wenn die Werte aus den Gleichungen (4) eingesetzt werden:

$$S = \delta h \sqrt{3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)} \dots \dots \dots (6)$$

Es scheint plausibel zu sein, daß die Anstrengung von dieser resultierenden Verschiebung abhängt, womit auch der zweite Teil der Mohr-Guestschen Theorie wie folgt zu vervollständigen ist:

Das Maß der Anstrengung ist die Größe der resultierenden Verschiebung in der resultierenden Verschiebungsebene, oder auch, was sich leicht zeigen läßt, die Schubspannung dieser Ebene.

Beim einachsigen Zugversuch, falls $\sigma_{Zug} = 2k$ gesetzt wird, ist

$$S_{Zug} = \delta \cdot h \cdot \sigma_3 \cdot \sqrt{3} = \delta \cdot h \cdot 2k \cdot \sqrt{3} \dots \dots \dots (7)$$

Es muß noch beantwortet werden, wann die Anstrengungen zäher Körper bei zwei verschiedenen Spannungszuständen die gleiche ist. Ich glaube, daß es dafür im Sinne des Vorherigen nur eine Antwort gibt, nämlich:

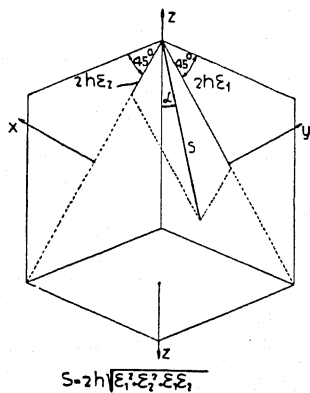


Abb. 17.

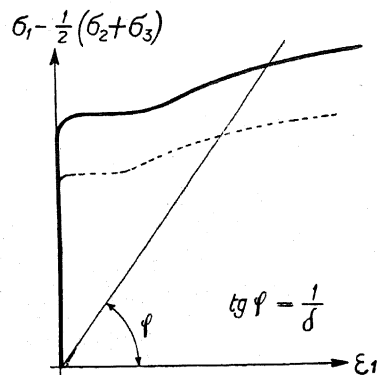


Abb. 18.

Bei zwei verschiedenen Spannungszuständen wird die Anstrengung dort die gleiche, wo die δ -Werte miteinander übereinstimmen (Abb. 18), also dort, wo die Plastizitätsmoduli $\frac{1}{\delta}$ einander gleich sind. (Innerhalb der Elastizitätsgrenze dem Elastizitätsmodul $E = \frac{1}{\alpha}$ entsprechend.)

Wenn man dieses in den Gleichungen (6) und (7) ausnützt, so kommt man zur Beziehung

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 = 4k^2 \dots \dots \dots (2)$$

Dieses Ergebnis stimmt genau mit jenem überein, welches aus der Annahme der Konstanz der bezogenen Gestaltungsenergie von HUBER-V. MISES-HENCKY hervorgeht.

Die Versuche haben es bestätigt, daß diese Beziehung vom Belastungszustand Null bis kurz vor die Bruchgrenze gilt.

Die Dämpfung, die bei der Schwingungsbeanspruchung von Metallen auftritt, in Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit

Von O. Föppl, Braunschweig

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 1 dargestellt. a ist der Probestab, dessen Baustoffeigenschaften festgestellt werden sollen, und der auf Verdrehung beansprucht wird. Das eine Ende b ist festgehalten, während das andere Ende eine Schwingscheibe c trägt, die Verdrehungsschwingungen um den Winkel $\Delta\varphi$ ausführt. Der Probestab a ist in Kugellagern mehrfach gelagert, so daß er sich nicht durchbiegen kann. Bei der Verdrehung der Schwingscheibe tritt, solange das Hookesche Gesetz gilt, in jedem Querschnitt des Stabes eine Schubspannung

$$\tau = \frac{r}{l} G \cdot \Delta\varphi \text{ auf, mit einem Größtwert am Umfang des Stabes } \tau_0 = \frac{r_0}{l} G \Delta\varphi.$$

Die Schwingungsanordnung wird im Tempo ihrer Eigenschwingungszahl durch einen von außen eingeleiteten Impuls erregt. Wir denken uns ein Element aus dem Stabe in Richtung der Hauptachsen herausgeschnitten. Durch die Oberfläche dieses Elementes wird die Schubspannung τ übertragen, die den Verformungswinkel γ zur Folge hat. Wenn die Beanspruchung unter der Proportionalitätsgrenze liegt, dann kann die Beziehung zwischen τ und γ durch die Gleichung

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \dots \quad (1)$$

mit G als Schubmodul wiedergegeben werden. Durch feine Messungen kann man feststellen, daß die strenge Gültigkeit der Gleichung (1) — wenn überhaupt ein strenger Gültigkeitsbereich vorhanden ist — weit unterhalb der Beanspruchung liegt, die dem betreffenden Metall im praktischen Betrieb vielfach zugemutet wird. Die Abhängigkeit zwischen γ und τ wird dann nicht mehr durch eine Gerade, sondern durch die Hysteresisschleife der Abb. 2 wiedergegeben.

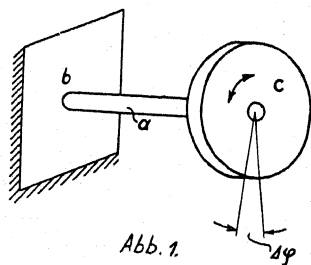


Abb. 1.

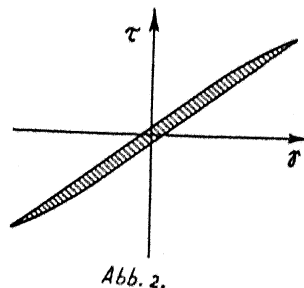


Abb. 2.

Neben der elastischen Verformung tritt ein plastischer Verformungsanteil auf, dessen Richtung von der Verformungsfortschrittsrichtung abhängt. Bei Schwingungen wird ein Teil der zugeführten Arbeit in Wärme umgesetzt. Wir nennen diesen Teil, der gleich ist dem Inhalt der Hysteresisschleife, die Dämpfung des Baustoffs und bezeichnen ihn mit ϑ . Der Wert ϑ ist auf eine Schwingung und auf 1 cm³ Baustoff bezogen $\left(\text{Dimension } \frac{\text{cm kg}}{\text{cm}^3 \text{ Schwingung}} \right)$.

Den Wert von ϑ können wir in Abhängigkeit vom Verformungswinkel γ auftragen. Da γ selbst eine Funktion von r ist ($\gamma = \frac{r}{l} \cdot \Delta \varphi$), müßten wir das herausgegriffene Element in

radialer Richtung beliebig dünn ausführen, am besten einen sehr dünnen Hohlzylinder mit den Halbmessern r_0 und $(r_0 - \delta r_0)$ herausgeschnitten denken. Aus der Temperaturerhöhung des Stabes im Beharrungszustande erhalten wir die auf eine Schwingung in Wärme umgesetzte Energie oder die *mittlere* Dämpfung, die im Querschnitt auftritt, und können daraus die Randdämpfung ϑ_0 nach einem besonderen Verfahren¹⁾ ermitteln. Da hier aber nicht die absoluten Dämpfungsgrößen, sondern nur die Abhängigkeiten dieser Werte von den Verformungsgeschwindigkeiten festgestellt werden sollen, werden wir im nachfolgenden die *mittlere* Dämpfung ϑ weiter verwenden. Wir tragen ϑ in Abhängigkeit vom Randverformungswinkel γ_0 auf und erhalten die Kurvenschar in Abb. 3.

Die Versuche sind durchgeführt worden, um festzustellen, ob ϑ nur von γ_0 abhängt oder ob sein Wert auch durch die Größe der Verformungsgeschwindigkeit beeinflusst wird. Man nahm früher an, daß die Dämpfungsfähigkeit bei gleichem Verformungswinkel verhältnismäßig der Verformungsgeschwindigkeit sei. Diese Annahme wird noch bis in die jüngste Zeit in der deutschen technischen Literatur vielfach vertreten. Ausschwingversuche, die F. E. ROWETT²⁾ in Cambridge 1913 angestellt hat, führten zu dem Ergebnis, daß die Größe der Dämpfung unabhängig von der Verformungsgeschwindigkeit ist.

Im Gegensatz zu den Versuchen von Rowett haben wir die Dämpfungsfähigkeit im Beharrungszustand der Schwingung festgestellt. Wir haben also die Schwingung von außen so stark erregt, daß die durch die Baustoffdämpfung usw. vernichtete Energie dem System fortlaufend neu zugeführt wird. Die Größe der Dämpfung kann aus der Temperaturerhöhung des Baustoffes im Beharrungszustand leicht bestimmt werden. Das Verfahren läßt die Möglichkeit sehr genauer Messungen bezüglich der absoluten Größe der Dämpfungsfähigkeit zu, da der Beharrungszustand beliebig lange Zeit aufrecht erhalten werden kann. In bezug auf die absoluten Werte sind wir zu wesentlich anderen Ergebnissen wie Rowett gekommen. Darauf ist an anderer Stelle eingegangen worden³⁾. Wir haben aber ebenso wie Rowett festgestellt, daß die Dämpfung unabhängig von der Verformungsgeschwindigkeit ist und zwar gilt das bei unseren Stäben von 15 mm \varnothing und etwa 400 mm Meßlänge innerhalb von minutlichen Wechselzahlen, die zwischen 0 und 2000/min. liegen.

Die Dämpfung bei der Wechselzahl 0 haben wir durch statische Eichung, d. h. Messung der Verformung bei ganz langsamem Auftragen der Belastung, bestimmt. Der Inhalt der Hysteresisschleife ist Arbeit bezogen auf die Volumeneinheit des Baustoffes, also von der

Dimension $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2 \text{ Schwingung}}$. Diesen Betrag haben wir in Abhängigkeit vom Verformungswinkel γ_0 aufgetragen und die in Abb. 3 dargestellte Kurve ($n = 0$) erhalten.

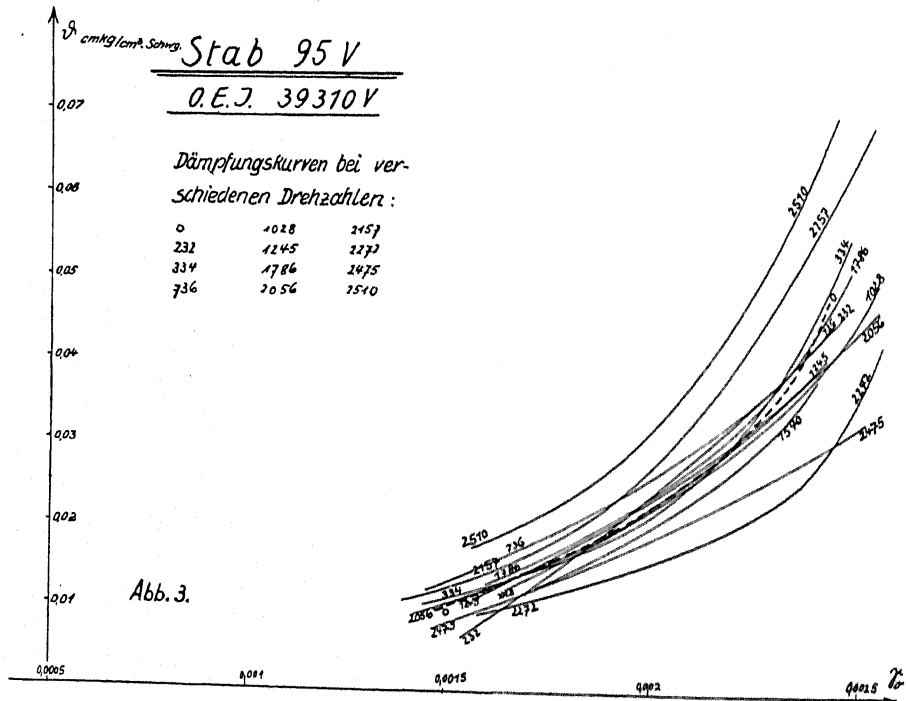
Im Beharrungszustand des schwingenden Stabes haben wir ferner aus der Erwärmung des Stabes die fortgeleitete Energie gemessen und ebenfalls in Abhängigkeit vom Verformungswinkel γ_0 aufgetragen. Die γ_0 - ϑ -Kurven haben wir bei 12 verschiedenen Geschwindigkeiten zwischen 230 und 2500/min. bestimmt. (Abb. 3.) Bei den Geschwindigkeiten von über 2000/min. traten erhebliche Fundamenterschütterungen auf, durch die die Messungen wesentlich

1) O. Föppl, Schweiz. Bauzeitung, Bd. 86, Heft 23 vom 5. 12. 25.

2) Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, Bd. 89, S. 528.

3) O. FÖPPL, Z. d. V. D. I. 1926, Heft 39.

gestört worden sind. Sieht man von den 4 obersten Schwingungszahlen ab, dann sind nur geringe Abweichungen zwischen den einzelnen Kurven vorhanden. Die Abweichungen rühren zum Teil davon her, daß wir die Messungen auf verschiedenen Drehschwingungsmaschinen mit verschiedenen Meßinstrumenten aufgenommen haben. Die Fehler der einzelnen Messungen werden deshalb nach verschiedenen Seiten liegen, so daß die Mittelwertskurve verhältnismäßig genaue absolute Größenangaben enthält. Inzwischen hat Herr Dipl.-Ing. BECKER in meinem Laboratorium Versuche an der gleichen Maschine, die er zwischen 300 und 2500 Schwingungen in der Minute regelbar machte, angestellt und noch weit genaueres Zusammenfallen der Kurvenäste bei den verschiedenen Schwingungszahlen erhalten. (Diss. Braunschweig 1927.)



Ich möchte annehmen, daß die Annahme, die Dämpfung sei verhältnismäßig der Verformungsgeschwindigkeit, angesichts dieser Versuchsergebnisse, nicht mehr aufrecht erhalten werden kann.

Wir haben gesehen, daß man aus der statischen Eichkurve ($n = 0$) die dynamische Dämpfung ermitteln kann. Die Hysteresisschleife der statischen Eichung rührt aber vom plastischen Verformungsanteil her, d. h. ein Baustoff mit rein elastischer Verformung würde die Hysteresisschleife Null haben. Wenn eine Hysteresisschleife auftritt, dann kann die Gesamtverformung γ in einen elastischen Anteil γ_e und einen plastischen Anteil γ_p zergliedert werden. Der Inhalt D der Hysteresisschleife ist verhältnismäßig einerseits der Formänderungsarbeit $\frac{1}{2} \tau \gamma$, anderseits dem plastischen Verformungsanteil $\frac{\gamma_p}{\gamma}$. Wir können also unter der Voraussetzung, daß die Verformung in der Hauptsache elastisch erfolgt, schreiben:

$$D = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma \cdot \frac{\gamma_p}{\gamma} \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \tau \gamma \cdot \lambda \frac{1}{c}$$

wobei mit $\lambda = \frac{\gamma_p}{\gamma}$ die verhältnismäßige plastische Verformung bezeichnet ist. c ist ein Pro-

proportionalitätsfaktor, dessen Größe vorerst unbekannt ist. Wir setzen nun den Inhalt D der Hysteresisschleife ins Verhältnis zur Formänderungsarbeit $\frac{1}{2} \tau \gamma$ und erhalten mit $\psi = 2 D / \tau \gamma$

$$c = \lambda : \psi$$

Der Wert von c liegt bei Stahl und Kupfer zwischen 0,18 und 0,23; die höheren Werte gelten für die höheren Verformungsgrade. Mit Hilfe des Wertes c kann man die Dämpfung ohne Aufnahme einer Hysteresisschleife, allein aus der statischen Eichung ermitteln.

Die im vorliegenden Bericht behandelten Drehschwingungsversuche wurden durch die Beihilfen der Helmholtz-Gesellschaft und des Vereins Deutscher Ingenieure wesentlich gefördert.

Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing

Von G. Masing, Berlin-Siemensstadt

Auf Grund einer Reihe von Beobachtungen der Streck- und Stauchgrenze konnte der Schluß gezogen werden, daß bei plastischen Beanspruchungen von kalt gerecktem Messing in der Zerreißmaschine keine wirkliche Verfestigung stattfindet und daß die Verschiebungen der Stauch- und Streckgrenze sich durch Veränderungen der Eigenspannungen erklären lassen. Es schien insbesondere, daß auch der BAUSCHINGER-Effekt sich im Sinne von HEYN auf diese Weise erklären läßt. Diese Ergebnisse ließen es lohnend erscheinen, die Ansätze von HEYN¹⁾

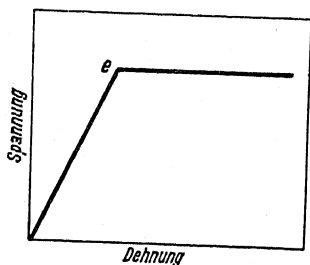


Abb. 1.

Dehnungslinie eines Körperelementes.

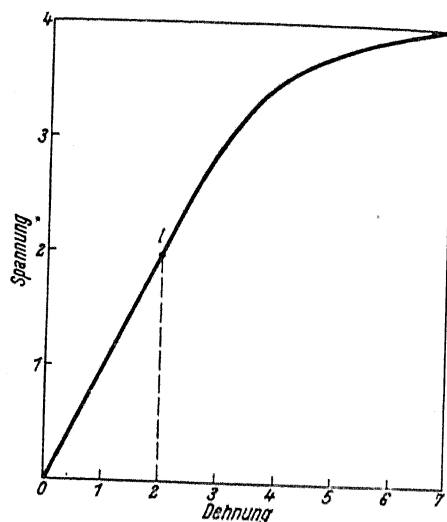


Abb. 2.

Schema einer Dehnungslinie.

und MASING¹⁾ einer genaueren Prüfung zu unterziehen, als es durch Bestimmung der Streck- und Stauchgrenzen möglich ist. An Hand dieser Ansätze läßt sich aus einer Dehnungskurve die gesamte darauf aufgenommene Stauchkurve berechnen.

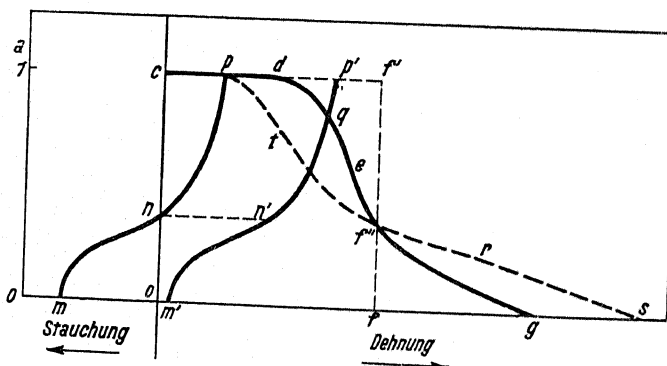


Abb. 3.

Wir nehmen mit HEYN an, daß der Metallkörper aus einem System von Körperelementen mit demselben Elastizitätsmodul, aber mit verschiedenen Streckgrenzen besteht und daß sich die Dehnungslinie solch eines Elementes, wie Abb. 1 darstellt, aus zwei Geraden zusammensetzt.

¹⁾ E. HEYN, Festschrift der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft 1921.

²⁾ G. MASING, Wissensch. Veröff. a. d. Siemens-Konzern 3, 1 (1923) s. 231.

Oberhalb der Streckgrenze e findet keine weitere Erhöhung der Spannung statt. Wenn wir mit Hilfe dieses Ansatzes eine Dehnungslinie, Abb. 2, analysieren, so werden wir sagen können, daß oberhalb der Elastizitätsgrenze l der scheinbare Elastizitätsmodul, also die Ableitung der Spannung y nach der Dehnung x , in jedem Punkte der Kurve unmittelbar den Bruchteil des Querschnitts a angeben wird, der noch nicht begonnen hat, plastisch zu fließen.

In Abb. 3 stellt die Kurve $c b p e g$ die Ableitung der Dehnungslinie und damit die Werte von a in Abhängigkeit von der Dehnung dar. Diese Kurve läßt sich jedoch noch anders interpretieren. Da die Elastizitätsmoduli aller Körperelemente gleich sind, so können wir sie alle willkürlich gleich 1 setzen. Die Abszissen x der Abb. 3 stellen dann unmittelbar die Elastizitätsgrenzen der einzelnen Körperelemente dar. Kurve $c b p e g$ gibt die Verteilung der Elastizitätsgrenzen im Querschnitt an. Sie ist also die elastische Charakteristik des Stabes, die wir aus der Dehnungskurve gewonnen haben. Wir können annehmen, daß dieselbe elastische Charakteristik mit umgekehrten Vorzeichen im spannungsfreien Zustande auch für die Stauchgrenze gilt. Nach vollendetem Zugversuch stellt die Kurve $d p q f'' g$ die Verteilung der hierbei erzeugten Eigenspannungen dar, wobei der Anteil der Bruch- und Zugspannung durch die Bedingung gegeben ist, daß die Flächen $d f' f'' e q$ und $f f'' g$ einander gleich sind.

Der Körper sei nur mit Eigenspannungen behaftet, deren Verteilung durch die Kurve $m n p$ dargestellt sei. Wir stellen uns die Aufgabe, mit Hilfe der elastischen Charakteristik die Dehnungskurve eines solchen Körpers zu berechnen. Bei der Dehnung $n n'$ verschieben sich die Linien der Eigenspannungen parallel zu sich selbst nach $m' n' p'$. Der Wert p' liegt jedoch oberhalb der Elastizitätsgrenze d des entsprechenden Körperelementes. Deshalb ist jetzt bereits die Elastizitätsgrenze überschritten und die zur Dehnung $m n'$ gehörige Spannung bestimmt sich durch die Fläche $m n p d q n m'$. Der scheinbare Elastizitätsmodul bei der Dehnung $n n'$ entspricht der Ordinate des Punktes q . Auf diese Weise erhalten wir die Kurve der scheinbaren Elastizitätsmoduli in Abhängigkeit von der Dehnung $c p d f'' r s$, und aus dieser können wir durch Integration die Dehnungskurve berechnen.

Analytisch findet man diese $a-x$ -Kurve folgendermaßen:

Die Spannungsverteilung $m n p$ sei durch die Gleichung $x = \sigma = F(a)$ dargestellt; für $m' n' p'$ bekommen wir

$$x - x_1 = F(a), \quad \dots \dots \dots (1)$$

wo $x_1 = n n_1$ ist. Der Punkt q liegt gleichzeitig auf beiden Kurven $m' n' p'$ und $c d e g$, der x -Wert muß hier also auch der Gleichung $a = f'(x)$, die wir nach x aufgelöst als $x = \varphi(a)$ schreiben können, genügen. Durch Substitution von x in (1) bekommen wir:

$$x_1 = \varphi(a) - F(a) \dots \dots \dots (2)$$

(2) ist die Gleichung der $c p t r s$ -Kurve (Abb. 3).

In dieser Gleichung bedeutet x_1 die Dehnung des Stabes. Diese Dehnung ist aber nicht mit der Spannung, unter der die elastisch beanspruchten Teile stehen, identisch, da sie vorher nicht spannungsfrei waren. Die gestrichelte Kurve $c p t r s$ (Abb. 4) gibt deshalb auch nicht die Spannungsverteilung im Stabe an.

Wir wollen noch zwei Sonderfälle einer vorgegebenen Spannungsverteilung betrachten. Der erste Fall betrifft die Dehnungskurve eines bis g (Abb. 3) vorgedehnten Stabes. Die Spannungsverteilung ist in diesem Falle durch die Linie $c d e g$ der Elastizitätsgrenzen gegeben. Die Spannung, unter der ein solcher Stab steht, ist nach dem oben Erörterten durch $\bar{\sigma} = \text{Flächeninhalt von } c d q e g = c o \cdot o f$ gegeben. Bei der Entspannung verschiebt sich die Spannungslinie parallel nach links, bis der Punkt f'' der Senkrechten ff'' auf die Ordinatenachse

kommt. Sämtliche Teile, die oberhalb f'' liegen, erhalten Druckspannungen, die unterhalb f'' liegenden verbleiben unter Zugspannungen. Wenn die Druckspannungen die Stauchgrenzen der betreffenden Teile überschreiten, ist also die Spannungsverteilung durch die nach links verschobene Kurve $d e f'' g$ gegeben. Ihre Gleichung ist:

$$F(a) = \varphi(a) - \bar{\sigma} = x. \quad \dots \dots \dots (3)$$

Durch Einsetzen in (2) erhält man:

$$x_1 = \bar{\sigma} = \text{konst.} \quad \dots \dots \dots (4)$$

d. h. die Dehnung erfolgt bis g rein elastisch, und dann fängt der ganze Stab zu fließen an, wie ja auch eine bekannte Betrachtung an Hand der Dehnungskurven ergibt.

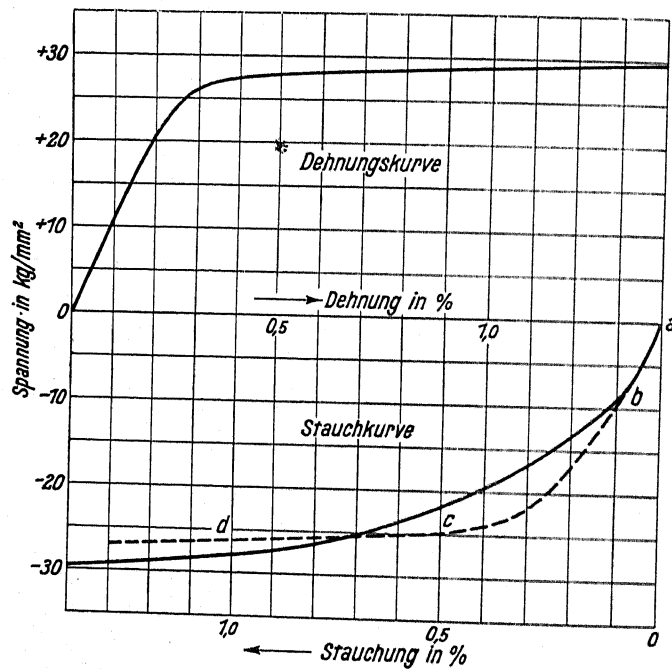


Abb. 4.

Zweitens betrachten wir den Fall, daß ein ebenso vorgedehnter Stab mit einer durch (3) gegebenen Spannungsverteilung auf Druck beansprucht wird. Wir können annehmen, daß die Stauch- und Streckgrenzen der einzelnen Volumenelemente des Körpers gleich sind. D. h. die Verteilung der Stauchgrenzen wird durch die spiegelbildliche Uebertragung der Kurve $c d e f'' g$ nach der negativen Abszissenachse hin wiedergegeben. Die Gleichung dieser Kurve der Stauchgrenze ist:

$$x = -\varphi(a) \quad \dots \dots \dots (5)$$

Mit Gleichung (7) erhalten wir:

$$x_1 = -2\varphi(a) + \bar{\sigma} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Wenn die Streckgrenze des Materials vorher in spannungslosem Zustande bei $+l$ gelegen hat, so wird die Stauchgrenze jetzt bei $-2l + \bar{\sigma}$ liegen. Nun ist $\bar{\sigma}$ immer größer als l , da das die Voraussetzung für die Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze ist. Folglich ist die Stauchgrenze beim nachfolgenden Stauchversuch immer geringer als l , in Bestätigung der bekannten Ueberlegungen über den Bauschinger-Effekt.

Aus Gleichung (6) sieht man, daß die a - x -Kurve für die Stauchung sich sehr einfach aus der vorangegangenen Dehnungskurve ableiten läßt.

War die Dehnung nur bis zu einem Punkte zwischen d und g (Abb. 3) etwa bis f'' durchgeführt worden, so wird der Verlauf der nachträglich aufgenommenen Stauchkurve nur bis zu einem Werte von a , der f'' entspricht, durch Gleichung (11) bestimmt. Bei geringeren Werten erhält man der Gestalt nach das einfache Spiegelbild der Kurve $f''g$.

Zur experimentellen Prüfung dieses Ergebnisses wurden Messingstäbe nach verschiedener Vorbehandlung erst plastisch gedehnt und dann gestaucht. Die Schwierigkeiten bestehen hierbei einerseits in der Eliminierung der Verfestigung, anderseits aber hauptsächlich in der Eliminierung der von vornherein vorhandenen Eigenspannungen, die die Ergebnisse fälschen können. Auf die Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden. Das Gesamtergebnis der Versuche war, daß die gefundene Stauchkurve in der in Abb. 4 schematisch dargestellten Weise (ausgezogene Linie) wenig, aber sehr charakteristisch von der berechneten (gestrichelte Linie) abweicht und zwar in dem Sinne, daß der Bauschinger-Effekt im Gebiete $b c$ stärker ausgeprägt ist als zu erwarten war. Der stärkere Anstieg der Kurve gegenüber der berechneten im Gebiete $c d$ ist auf eine Verfestigung zurückzuführen.

Man muß also schließen, daß das metallische Material durch die plastische Beanspruchung in einer Richtung einer plastischen Beanspruchung in der entgegengesetzten Richtung gegenüber stärker geschwächt wird, als auf Grund von Eigenspannungen berechnet werden kann. Ueber die Natur und Ursache dieses spezifischen Schwächungseffektes läßt sich zur Zeit noch nichts sagen, und weitere Versuche müssen auch zeigen, ob und wie er bei anderen Metallen auftritt.

Es folgte ein Vortrag von Fillunger, Wien, «Ueber die Knickung von Stäben mit Schneidenlagerung». (Siehe Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1926.)

Versuche über die Fließgrenze des Eisens

Von A. Nádai, Göttingen

(Hiezu Tafel XIV)

1. Mein Mitarbeiter, Herr W. LODE, hat in den letzten Jahren Festigkeitsversuche mit weichem Eisen und mit einigen andern Metallen gemacht, über deren Ergebnisse im folgenden kurz berichtet werden soll¹⁾.

a) *Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze.* Nach den Annahmen von O. MOHR soll die mittlere der Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) auf den Eintritt eines bildsamen Zustandes in den technischen Metallen keinen merklichen Einfluß haben und die größte Hauptspannungsdifferenz $\sigma_1 - \sigma_3$ nur eine Funktion des mittleren Druckes $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ sein. Für die Gültigkeit dieser Annahme sprechen die Versuche von J. GUEST. Wir benutzen in folgenden zur Kennzeichnung des Verhältnisses der mittleren Hauptspannung σ_2 zu den beiden andern eine Zahl

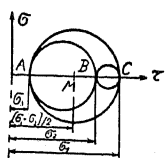


Abb. 1

$$\mu = \frac{\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = 2 \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1.$$

Sie definiert das Verhältnis der Strecken BM und AM im Diagramm (Abb. 1) der MOHRschen Kreise. In dünnwandigen Metallrohren, die durch eine axiale Zugkraft und durch einen inneren Flüssigkeitsdruck angespannt wurden, konnten die Spannungszustände $\mu = -1$ (reiner axialer Zug), $\mu = 0$ (Innendruck allein) und $\mu = 1$ (Innendruck und axialer Zug) nach Belieben erzeugt werden. Die Versuche lassen sich in einem Diagramm darstellen, in dem die Abscissen die Größe μ und die Ordinaten das Verhältnis der größten Hauptspannungsdifferenz $\sigma_1 - \sigma_3$ zur Fließgrenze des reinen Zugversuches σ_z bedeuten. Da in den LODEschen Versuchen σ_3 stets nahezu gleich Null oder gleich Null war, ist dieses Verhältnis gleich σ_1/σ_z gewesen. In dieser Darstellung entspricht der sogenannten «Schubspannungstheorie» mit der Annahme einer an der Plastizitätsgrenze unveränderlichen größten Schubspannung die wagerechte Gerade $\sigma_1/\sigma_z = 1$. Die bei wiederholter oder länger andauernder Dehnung sich störend bemerkbar machende Verfestigung der Metalle wurde durch eine besondere Art der Ausgleichung beim Vergleich der Versuchswerte eliminiert. Mit Ausnahme der Fälle ungleichmäßigen Fließens erfüllten die Versuchspunkte für Eisen, Kupfer und Nickel einen zur Ordinatenachse symmetrischen Linienzug. Nimmt man die von A. T. HUBER, H. HENCKY²⁾ und von R. v. MISES³⁾ postulierte Plastizitätsbedingung der unveränderlichen Gestaltänderungsenergie

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = konst.$$

als maßgebend für den Eintritt bildsamer Zustände in den technischen Metallen an, so drückt sie sich in der obigen Darstellung als die Kurve

¹⁾ Ueber die Versuche ist auszugsweise berichtet worden von mir in «Werkstoffausschussbericht 56» des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute (Verlag von «Stahl und Eisen», Düsseldorf), 1925 und von W. Lode in der Z. f. Physik, 36, S. 913, 1926. Der ausführliche Versuchsbericht von W. LODE erscheint in den Mitt. u. Forschungsarbeiten des V. D. I. — Bezüglich weiterer Einzelheiten und der Literatur darf auf denselben verwiesen werden.

²⁾ Proc. of the First Int. Congress for Applied Mechanics., Delft, 1925, 312, sowie Z. f. ang. Math. und Mechanik, Bd. 4, 1924, S. 323.

³⁾ Göttinger Nachr. 1913, S. 582.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu^2}}$$

aus. Das Maximum dieser Kurve liegt bei $\mu = 0$ und ist gleich $2/\sqrt{3} = 1,156$. Die Versuchspunkte folgten dieser Kurve im Mittel bis auf 2—3 % Abweichung.

b) Wiederholung gleichsinniger Beanspruchung ergibt in der Formänderungskurve (Abb. 2) einen knickartigen (ABC), Wechsel der Beanspruchungsart (oder auch der Richtung der Hauptspannungen) einen gerundeten Uebergang (DEF) zu den neuen bildsamen Formänderungen. Die sogenannte Proportionalitätsgrenze scheint deshalb keine einem gegebenen metallischen Werkstoff eigentümliche Grenzspannung zu sein.

c) Im Hinblick auf die verschiedenen Formen des Ueberganges aus einem elastischen in einen bildsamen Zustand wird man vielleicht unterscheiden 1. den unvollkommenen (Kurvengstück DEF Abb. 2), 2. den voll ausgebildeten bildsamen Zustand (Kurvengstück FG), 3. die Ueberfestigung (Uebergang mit Spitze OHI).

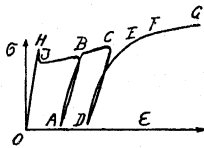


Abb. 2

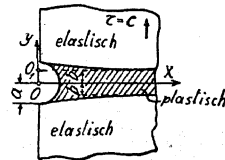


Abb. 3

d) *Die Gestaltänderungsregel.* Die folgenden Feststellungen beziehen sich nur auf einen voll ausgebildeten plastischen Zustand, die Hauptdehnungen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ mögen nur durch ihn entstanden sein. Die meist kleine elastische und bleibende Volumänderung und die Abhängigkeit der Fließspannungen von den Dehnungsgeschwindigkeiten werden vernachlässigt:

1. das Volumen bleibt konstant $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$
2. die Hauptdehnungsrichtungen müssen mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen.

Mit Benutzung einer analog zur Größe μ eingeführten Größe ν , die die mittlere Dehnung bestimmt, wurde aus den Versuchen die Beziehung

$$3. \quad \nu = \mu \quad \left(\nu = 2 \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} - 1, \quad \mu = 2 \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \right)$$

als wahrscheinlich geltend ermittelt. Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß zwei der Hauptdehnungen aus der gemessenen Verlängerung und der Querausdehnung der Rohre berechnet wurden, die dritte Hauptdehnung ergab sich aus der Bedingung 1.

2. Spannungsverteilung in tordierten Eisenstäben. Entstehung der Fließfiguren

Das schichtenweise Fließen des weichen Eisens bildet eine eigentümliche Begleiterscheinung des Ueberganges in den plastischen Zustand, die noch nicht hinreichend aufgeklärt ist. Mein Mitarbeiter, Herr W. BADER, hat die Ausbreitung der Fließschichten in tordierten Eisenstäben genauer untersucht. Wie der Verfasser gezeigt hat, läßt sich die Spannungsverteilung in tordierten Stäben nach einer teilweisen Ueberschreitung der Fließgrenze mit Hilfe einer über der Querschnittsfigur errichteten Böschungsfäche vorausbestimmen⁴⁾. Die Lösung der Torsionsaufgabe in den elastischen Gebieten des Querschnittes verlangt die Konstruktion einer dünnen Haut, die man sich ähnlich der Seifenhaut im PRANDTL'schen Membrangleichnis

⁴⁾ Vergl. Z. f. ang. Math. u. Mech. 1923 und PRANDTL, Spannungsverteilung in plastischen Körpern. Proc. of the first Int. Congr. for Applied Mechanics. Delft. 1924, S. 43.

der elastischen Torsion am Rande des Querschnittes angeheftet und durch einen Seitendruck belastet zu denken hat. Der Unterschied ist nur, daß die Haut jetzt auch noch an die Böschungsfäche sich anlegen muß. Herr E. TREFFTZ⁵⁾ hat in zwei Fällen (Ecke eines Winkels, kreisförmiges Loch) die Grenzen der plastischen Gebiete streng ermittelt. Bei der letzteren Randwertaufgabe handelt es sich darum, eine Funktion ψ zu finden, deren Werte auf der geraden und kreisförmigen Begrenzung des Gebietes der Halbebene (Abb. 3) verschwinden, für $y = \pm \infty$ gleich $-cx$ werden, sich in einem gewissen Gebiet (dem plastisch deformierten Teil des Querschnittes) berührend an den Kreiskegel

$$\psi = k(a - r) \quad \dots \dots \dots (1)$$

anschlüssen und schließlich in der Halbebene außerhalb des plastischen Teiles der Differentialgleichung $\Delta \psi = 0$ genügen. Die Konstante c reguliert die Steilheit der «Membran» — oder da für $y = \infty$ die Schubspannung $\tau = c \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ wird, gibt sie ihren Wert in den unge-

störten Teilen des Querschnittes an. Vom Standpunkt des experimentellen Vergleiches mit der Plastizitätstheorie ist der von TREFFTZ noch nicht erledigte Grenzfall von besonderem Interesse, welche Gestalt das Fließgebiet annimmt, wenn die Schubspannung $\tau = c$ sich dem Wert der Fließgrenze $\tau = k$ nähert.

Wir versuchen seine Form durch eine Näherungsbetrachtung zu finden, die angeregt ist durch die Vermutung von Herrn PRANDTL, daß das Fließgebiet im Unendlichen eine endliche Breite habe. Macht man in der Tat diese Annahme, so gelingt es, seine Breite abzuschätzen und zu zeigen, daß die Grenzbedingungen — wenigstens in größerer Entfernung vom Lochrande — erfüllt werden können. Längs dieser geraden Grenzen $y = \pm b$ muß für große x

$$\psi = k(a - r) = k(a - \sqrt{x^2 + b^2}) = k \left(a - x - \frac{b^2}{2x} \right) \quad \dots \dots \dots (2)$$

sein. Wir setzen nun mit Bezug auf Polarkoordinaten ϱ, α mit dem Pol O_1 (Abb. 3)

$$\psi = k a \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right) - \frac{k b^2 \cos \alpha}{2 \varrho} - k \varrho \cos \alpha \quad \dots \dots \dots (3)$$

Für $\alpha = 0$ wird $\varrho = x$ und $\psi = k \left(a - x - \frac{b^2}{2x} \right)$ wie verlangt wurde, für $y = \infty, \alpha = \frac{\pi}{2}$ $\psi = -kx$ und für $x = 0, \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right)$ in größerer Entfernung vom Loch $\psi = 0$, womit die Potentialfunktion ψ jedenfalls die verlangten Grenzbedingungen mit Ausnahme der noch zu berücksichtigenden erfüllt. Die gesuchte Funktion muß obendrein noch längs der Geraden $y = b$ den Kegel $\psi = k(a - r)$ berühren. Nun ist aus (3)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{2ka}{\pi} + k \sin \alpha \left(\frac{b^2}{2\varrho} + \varrho \right),$$

woraus für $y = b$ ($\alpha = 0, \varrho = \sim x$):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{2ka}{\pi \varrho} = -\frac{2ka}{\pi x} \quad \dots \dots \dots (4)$$

⁵⁾ Ueber die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Ueberschreitung der Fließgrenze, Z. f. ang. Math. u. Mech. 5, S. 64, 1925.

Andererseits ist auf der Grenze $y = b$ auf dem Kegel $\psi = k(a - r)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -k \frac{\partial r}{\partial y} = -k \frac{y}{r} = \sim -k \frac{b}{x} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Beide Ausdrücke für $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ stimmen überein, wenn

$$b = 2a/\pi. \quad \dots \dots \dots (6)$$

In einem auf reinen Schub beanspruchten Stoff, der unter einer unveränderlichen Spannung fließt, entwickelt sich an einer kleinen zylindrischen Bohrung vom Durchmesser d eine dünne plastische Schicht, die, wenn die Schubspannung in großer Entfernung vom Loch den Wert der Fließgrenze erreicht, bis in das Unendliche reicht und die Breite $2d : \pi$ hat.

Wenn diese Folgerungen aus unseren Annahmen richtig sind, muß ferner erwartet werden, daß man die Fließschichten nicht nur im weichen Eisen, sondern auch in andern plastischen Metallen erzeugen kann, sofern diese unter einem unveränderlichen Werte der Spannung zu fließen beginnen. Ein weich ausgeglühtes Kupfer würde diese Bedingung nicht erfüllen, denn in ihm entwickeln sich die bildsamen Formänderungen unter kleinen Spannungen nur unter gleichzeitigem starken Kraftanstieg. Wird jedoch das Kupfer vor dem Versuche erst einer starken Kaltverformung unterworfen, so kann der neuerliche Uebergang in einen plastischen Zustand mit einem starken Knick in der Spannungskurve erfolgen und es lassen sich in der Tat ähnliche Erscheinungen, wie die eben besprochene, in ihm nachweisen. Aus einem Kupferstück, das um 23 % seiner ursprünglichen Höhe gestaucht wurde, wurde ein Körper für einen Druckversuch herausgearbeitet und mit einer kleinen Bohrung senkrecht zur Druckrichtung versehen. Nach seiner neuerlichen Druckbelastung ergaben sich die im Lichtbilde Abb. 4 (Tafel XIV) wiedergegebenen kräftigen Fließstreifen.

Einige weitere Folgerungen aus den auf Grund der obenstehenden Betrachtungen zu erwartenden Zeichnungen für die Fließfiguren in stärker tordierten Eisenstäben haben sich ebenfalls gut bestätigt. So konnten an den von W. BADER geätzten Stabquerschnitten die elastischen Gebiete als schmale Streifen wiedergefunden werden und ihre Linien entsprachen auch in maßstäblicher Beziehung in einer größeren Zahl von Aetzungen verschiedener Querschnittsprofile der Lage der Dachkanten der Böschungsfäche. Einige Beispiele sind in den Abb. 5—10 (Tafel XIV) zu sehen⁶⁾.

Zur Theorie der Nachspannungen

a) *Der lineare Ansatz.* Ein erster Ansatz zur Berechnung der Eigenspannungen, die in einem Körper nach einer bildsamen Formänderung zurückbleiben, wenn man den Fließvorgang durch Entlastung unterbricht, knüpft an folgende Bemerkung an. Nach einer plastischen Formänderung und darauffolgender Entlastung verhält sich ein Metallstück unter kleinen Spannungen in erster Näherung wie ein elastischer Körper. Man erhält ein einigermaßen zutreffendes Bild der in ihm zurückgebliebenen Nachspannungen, wenn man von den Spannungen $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \dots$, bei denen der Fließvorgang unterbrochen wurde, einen ideellen Spannungszustand mit rein elastischen Formänderungen abzieht. Dieser letztere ist so zu bestimmen, daß an den Körperbegrenzungen die durch die Entlastung vorgeschriebenen Werte der resultierenden Kräfte und Momente (Auflagerreaktionen) entstehen. Bei vollkommener Entlastung müssen diese Kräfte und Momente in den Randquerschnitten oder Körperbegrenzungen verschwinden. Diese

⁶⁾ Bezüglich weiterer Einzelheiten sei auf einen unter Druck befindlichen Bericht in der Z. d. V. d. I. Berlin verwiesen.

einfachste Theorie der Eigenspannungen⁷⁾ setzt also voraus, daß der Entlastungsvorgang wesentlich durch das Hookesche Gesetz beherrscht wird. In einem Spannungs-Dehnungsdiagramm müssen die Kurven der Entlastung gerade Linien sein.

b) *Allgemeines Formänderungsgesetz für die Entlastung.* Wenn man beispielsweise eine dünnwandige Metallröhre durch zwei Kräftepaare um ihre Längsachse stärker an der Plastizitätsgrenze verdreht, entlastet und dann in der entgegengesetzten Richtung wieder verdreht, erhält man bekanntlich eine Kurve der Schubspannungen τ in Abhängigkeit der spezifischen Schiebungen γ , wie in der untenstehenden Abbildung. Die Form der Entlastungskurven PQ ist für verschiedene Verformungsgrade jedoch verschieden. Um die unter a) erwähnte erste Theorie der Nachspannungen zu verbessern, wird man in jedem Elemente des Körpers für den Entlastungsvorgang ein Spannungsdehnungsgesetz einführen müssen, wie das für eine der Spannungskomponenten herausgegriffene in Abb. 11. Beim heutigen Stande der experimentellen Erfahrungen ist es noch nicht möglich, für allgemeine Spannungszustände gültige Ansätze anzugeben.

Hingegen sollen hier für einen besonderen Beanspruchungsfall die Nachspannungen angegeben werden. Wir nehmen an, daß man aus Verdrehungsversuchen (z. B. mit dünnwandigen Röhren) 1. das Formänderungsgesetz des Stoffes in der Form $\tau = \varphi(\gamma)$ (τ Schubspannung, γ spez. Schiebung) und 2. die Gestalt der Entlastungskurven $P'Q'$, $P''Q''$, ... für verschiedene Verformungsgrade ermittelt hat (Abb. 12). Als Beispiel wählen wir die Bestimmung der Nachspannungen in einem Rundstab. Wird ein Rundstab stark verdreht, so erhält man bekanntlich das Bild der Verteilung der Schubspannungen in seinem Innern $\tau = f(r)$ durch eine affine Verkürzung der Formänderungskurve $\tau = \varphi(\gamma)$ in der Richtung der γ -Achse. Dabei muß als Randschubspannung τ_a der Wert von τ aus der Kurve $\tau = \varphi(\gamma)$ genommen werden, für den die spez. Schiebung gleich $\gamma_a = a\vartheta$ wird, unter a den Halbmesser und unter ϑ den Verdrehungswinkel des Rundstabes für 1 cm Länge verstanden.

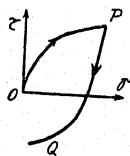


Abb. 11

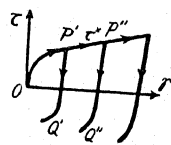


Abb. 12

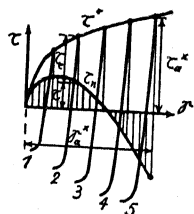


Abb. 13



Abb. 14

In dem Augenblick, in dem der Fließvorgang unterbrochen wird, seien die Schubspannungen, die spez. Schiebung und der Verdrehungswinkel mit einem Stern bezeichnet τ^* , γ^* , ϑ^* . Wird der Stab entlastet, so dreht er sich um einen Winkel ϑ zurück. Die spez. Schiebung längs eines Kreises mit dem Halbmesser r nimmt dabei von ihrem Wert $\gamma^* = r\vartheta^*$ um $\gamma = r\vartheta$ ab. Wenn nun die Gestalt der Entlastungskurven für verschiedene Verformungsgrade graphisch gegeben ist, so kann an den betreffenden Stellen im Kreisquerschnitt auch die Schubspannung τ_a angegeben werden, um die der Stab sich entlastet hat. Ihr Wert kann auf den zugehörigen Kurven $P'Q'$, ... abgegriffen werden. Wir denken uns zu dem Zweck das Intervall $0 - \gamma_a^*$ in eine Anzahl (n) gleicher Teile geteilt (in der Abb. 13 sind es 5) und für diese Verformungsgrade die Entlastungskurven (aus Versuchen) ermittelt. Hierauf zeichnen

⁷⁾ Z. f. Physik, Bd. 30, S. 134, 1924.

wir alle Entlastungskurven mit einem gemeinsamen Anfangspunkt in einer Hilfsfigur Abb. 14 zusammen. Wir teilen die Strecke $AB = \gamma_a$ in ebensoviel gleiche Abschnitte. Unter den Teilpunkten können hierauf die Schubspannungen τ_e abgegriffen werden, um die sich τ^* an den betreffenden Stellen entlastet. Die *Nachspannungen* in den zugehörigen Querschnittspunkten $r = a/n, 2a/n, \dots a$ sind

$$\tau_n = \tau^* - \tau_e$$

Man kann dieselbe Konstruktion zur Ermittlung der Eigenspannungen für verschiedene Entlastungsgrade wiederholen und erhält auf diese Weise das vollständige Bild der Nachspannungen des verdrehten Rundstabes. Soll der Stab auf ein Drehmoment Null entlastet werden, so muß unter den Kurven τ_n die ermittelt werden, für die das Moment der τ_n für den Kreismittelpunkt verschwindet.

Es sei angemerkt, daß man die Betrachtung noch auf den Fall ergänzen könnte, daß mit der vorangegangenen starken bildsamen Verdrehung in den einzelnen Stabelementen auch eine Volumänderung verbunden wäre. Für eine solche sprechen gewisse Beobachtungen, z. B. über die Aenderung der Länge stark verdrehter Stäbe. In diesem Falle addiert sich noch über das eben ermittelte Spannungsfeld ein achsensymmetrischer Spannungszustand. Der Stab müßte dann nach seiner Entlastung innen senkrecht zur Stabachse durch ein System von Nebenspannungen beansprucht sein.

Ergebnisse neuer Versuche über die Druckverteilung im Baugrunde

Von F. Kögler, Freiberg (Sachsen)

Zur Nachprüfung und Ergänzung der bisher vorliegenden Versuche, deren Grundlage teilweise zu bemängeln sind, galt es, Belastungsflächen von Abmessungen zu wählen, die denen der Baupraxis möglichst nahe kommen, und zu sehen, ob die für kleine Belastungsflächen schon gewonnenen Gesetze auch für große gelten; ferner galt es, an allen Stellen gleichzeitig den Druck zu messen, um sicher zu sein, daß die Spannungen aus einem Belastungszustand überall unter wirklich gleichen Bedingungen erfaßt werden.

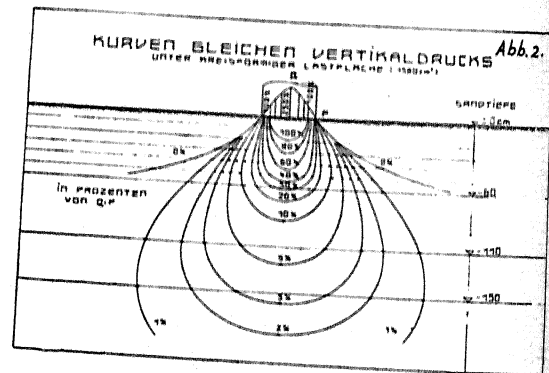
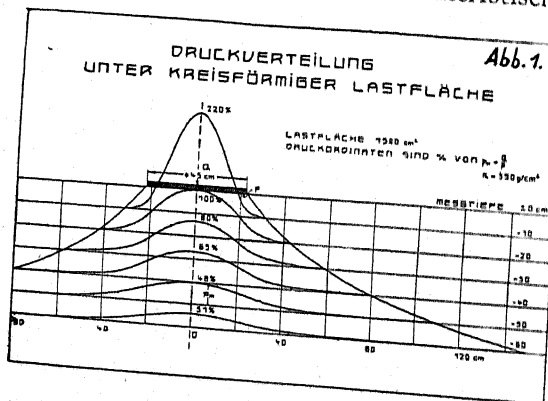
Verwendet wurde ein fast reiner, trockener Quarzsand; sein Porenvolumen ist $n = 42\%$, die Porenziffer $\varepsilon = 0,725$; er wurde nicht besonders festgestampft. Die Belastung $p_0 = Q/F$, Gesamtlast Q , bezogen auf die Belastungsfläche F , betrug zunächst bis zu 0,7 at. Gemessen sind nur die lotrechten Spannungen in der Schüttung.

Die Versuche lassen schon deutlich die Einflüsse erkennen, von denen die Druckverteilung im Baugrund nach Art und Größe abhängt.

A. Versuchsergebnisse für kleinere Belastungsflächen.

Sämtliche Versuche haben grundsätzlich dieselben Ergebnisse geliefert, wie sie für einen Belastungsfall in Abb. 1 sich darstellen. Die Belastungsgrundfläche ist kreisrund und verhältnismäßig klein; der Belastungskörper kann als starr angesehen werden. Die Druckordinaten sind in % von $p_0 = Q/F = 0,35$ at. angegeben.

I. In allen wagrechten Ebenen in verschiedener Tiefe unter der Sohlfläche des Belastungskörpers zeigt sich dasselbe charakteristische Bild der Druckverteilung: die Spannungen im



äußern Bereiche der gedrückten Fläche sind außerordentlich gering gegenüber den Werten in der Mitte der Fläche. Die in der Baupraxis angenommene *gleichmäßige Druckverteilung* ist nirgends vorhanden; der Querschnitt des Spannungshaufens hat eine der Wahrscheinlichkeitskurve ähnliche Gestalt.

Je tiefer der Messungshorizont liegt, um so kleiner werden die größten Drücke p_m unter der Mittelachse des Belastungskörpers, künftig kurz als «Mittendruck» bezeichnet.

II. Da der Rauminhalt des Spannungshaufens gleich der wirkenden Last Q sein muß, so folgt aus der eigenartigen Gestalt der Spannungsverteilungskurve, daß der Mittendruck p_m in geringen Tiefen unter der Sohlfläche des Lastkörpers wesentlich größer als p_0 wird; z. B.

ist p_m in 10 cm Tiefe als 220 % von p_0 gemessen. Diese Ergebnisse sind auch aus den älteren Versuchen bekannt¹⁾, aber bisher wenig beachtet.

III. Aus der Tatsache, daß der Mittendruck p_m mit der Tiefe abnimmt, darf man rückwärts folgern, daß er nach oben hin wächst, daß er also unmittelbar unter der Sohle der Belastungsfläche noch größer sein wird als 200 % im Beispiel der Abb. 1; es ergibt sich eine Druckverteilung, wie in Abb. 2 über der Sohlfläche gezeichnet; sie ist auch durch direkte Messungen bestätigt.

Hiernach steht fest, daß unter der Sohle eines kleinen, starren Belastungskörpers *keineswegs eine gleichmäßige Verteilung* des Bodendruckes herrscht, sondern daß der Mittendruck etwa das 2,5 fache von $p_0 = Q/F$ ausmacht.

IV. Die *Isobaren* der Druckverteilung ergeben ein Bild gemäß Abb. 2. Die Werte unterhalb einer Tiefe von 60 cm sind allerdings nach den Formeln von STROHSCHNEIDER bzw. in größerer Tiefe nach BOUSSINESQ berechnet, die bekanntlich für größere Tiefen genügend genaue Werte liefern.

Die Darstellung der Isobaren findet sich an verschiedenen Stellen der Literatur, aber mehrfach recht ungenau, z. T. unrichtig. Auch aus den Isobaren ergibt sich ganz zwanglos das Druckverteilungsbild unter der Sohle des Lastkörpers.

V. Die lotrechten Komponenten des Druckes an irgend einer Stelle der Schüttung haben sich proportional der aufgebrachten Belastung ergeben, sofern diese nicht so groß ist, daß sie Gleitungen im Sande verursacht.

VI. Die *Grenzfläche der Druckverteilung* verläuft im Meridianschnitt so, wie es Abb. 1 und 2 zeigen. Am Rand des Belastungskörpers hat sie eine Neigung von etwa 35° bis 40° gegen die Lotrechte und wird mit zunehmender Tiefe immer flacher. In einer bestimmten (Grenz-) Tiefe scheint die Meridiankurve sich asymptotisch einer wagrechten Geraden zu nähern. Die Grenzwinkel sind für die bisherigen Belastungen unabhängig von der Belastung p_0 und unabhängig von der Größe der Belastungsfläche gefunden worden.

Dieses Ergebnis geht auch aus den älteren Versuchen von KICK und STEINER und von GOLDBECK²⁾ hervor; es ist von STROHSCHNEIDER vermutungsweise ausgesprochen worden.

Auch in die Schar der Isobaren paßt sich diese Grenzkurve sehr gut ein, während eine gerade Grenzkurve augenscheinlich zu Widersprüchen führen würde.

Die Erklärung für diese eigenartige Form der Grenzkurve liegt nahe: Denkt man sich die Schüttung als einen Kugelhaufen von dichtester Lagerung ohne jegliche innere Reibung, so kann eine Kugel den Druck, den sie von oben her infolge einer örtlichen Belastung erhält, immer nur auf die drei unter ihr liegenden übertragen (von denen im Schnitt der Abb. 3 nur zwei erscheinen). Die Grenzlinie der Druckübertragung wäre also eine Gerade (schraffierte

¹⁾ KICK und STEINER: Hdb. d. Ing.-Wissensch., 1. Aufl., II. Bd., II. Abtlg. (Fahrbahn eiserner Brücken) S. 195, Lpz. 1882.

STROHSCHNEIDER: Sitzungsber. d. k. u. k. Akademie d. Wissensch. in Wien, Math. Naturwiss. Klasse; Bd. 121, Abt. IIa, Febr. 1912.

STAATL. HOCHSCHULE I. PENNSYLVANIEN: Eng. Record 1914, Vol. 69, S. 608 (30. Mai). Eng. Record 1915, Vol. 71, S. 330 (13. März). Bericht darüber: Org. f. Fortschr. d. Eisenbw. 1915, S. 33 u. 376 und Beton und Eisen 1916, S. 204.

ENGER: Eng. Record 1916, S. 106. Railway Age Gazette 1916, S. 321.

GOLDBECK: Proceedings, Am. Soc. Test. Mat. 1916, S. 310 ff. — 1917, S. 641 ff.

BER. D. AM. FOUND. COMM.: Proceedings, Am. Soc. Civ. Eng., Pap. a. Disc. 1920, Heft 6. — 1925, Heft 5.

BER. D. AM. TRACK COMM.: Proceedings, Am. Soc. Civ. Eng., Pap. a. Disc. 1920, Heft 2.

²⁾ Hdb. d. Ing.-Wissensch. a. a. O.

Proceedings Americ. Soc. Testing Materials 1917, Teil II, Seite 650.

Kugeln gegen nichtschraffierte). Da nun in der Schüttung infolge des Eigengewichts (und infolge des Druckes der örtlichen Last) auch wagrechte Spannungen herrschen, so bewirken diese, wenn zwischen den Kugeln Reibung vorhanden ist, daß aus den schraffierten Kugeln nach rechts hin *lotrechte Kräfte* übergehen, die sich um so weiter ausdehnen, je größer der wagrechte Druck in der Schüttung mit zunehmender Tiefe wird.

Damit erklärt sich auch die zunächst auffällige Erscheinung, daß die Grenzkurve sich der Wagrechten nähert:

Die Schüttung verhält sich mehr und mehr ähnlich wie ein fester Körper, wenn die Spannungen aus der örtlichen Belastung nicht zu groß sind.

Die Ergebnisse über die Gestalt der Grenzkurve und über die Grenztiefe bedürfen noch mehrfacher Nachprüfung, da die Meßschwierigkeiten sehr groß sind ³⁾.

B. Druckverteilung unter größeren Lastflächen.

Den Einfluß der Größe der Belastungsfläche auf die Art der Druckverteilung zeigt die Abb. 4. Die Versuche GOLDBECKS (linker Teil) geben die Druckverteilung in 1,37 m Tiefe

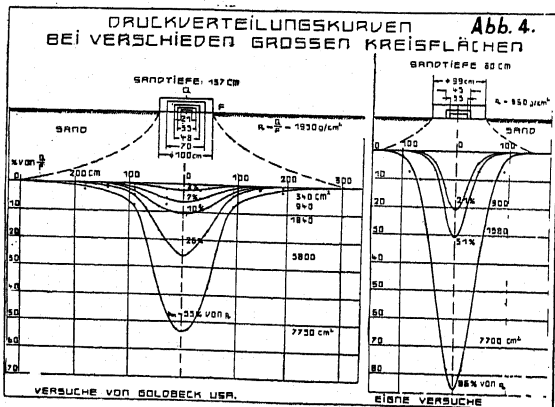


Abb. 3.

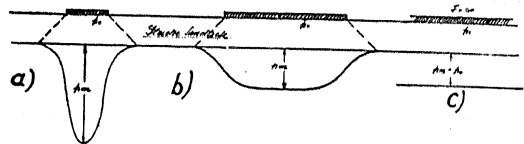


Abb. 5.

unter 5 verschieden großen Belastungskörpern von 340 cm² bis 7700 cm², wobei immer $p_0 = Q/F$ den gleichen Wert von 1,95 at. aufwies. Man sieht deutlich, wie durch die breitere Lastfläche der Mittendruck p_m sich vergrößert, also eine Zusammendrängung der Spannungen stattfindet, obwohl auch die Druckverteilungsbreite mit der Lastfläche zunimmt. Auch die eigenen Versuche (Abb. 4 rechter Teil) ergeben genau dasselbe, nur natürlich mit höheren Prozentzahlen entsprechend der geringeren Tiefe von 60 cm.

Andererseits ist es wahrscheinlich, daß die Druckverteilungskurve bei sehr großen Flächen in geringer Tiefe eine mehr schüsselförmige Form annimmt. Die beiden Grenzfälle sind (vergl. Abb. 5): Einmal ganz kleine Belastungsfläche, in einer gewissen Tiefe Druckverteilung in «Glockenform» nach Abb. 5a und zum andern unendlich weit sich erstreckende Belastung p_0 , die in jeder Tiefe den Druck p_0 zu Folge hat (Abb. 5c). Zwischen beiden muß es nun Uebergänge geben; die Druckverteilung wird bei wirklich großer Ausdehnung der Belastungsfläche in Schüsselform zu vermuten sein, wie sie Abb. 5b zeigt.

³⁾ Von Arbeiten theoretischer Art, die die Spannungsberechnungen in Schüttungen behandeln, seien u. a. genannt:

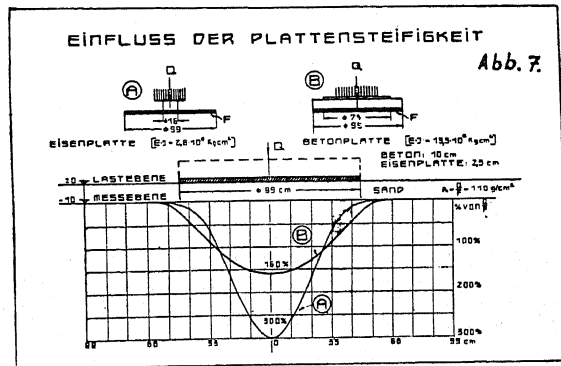
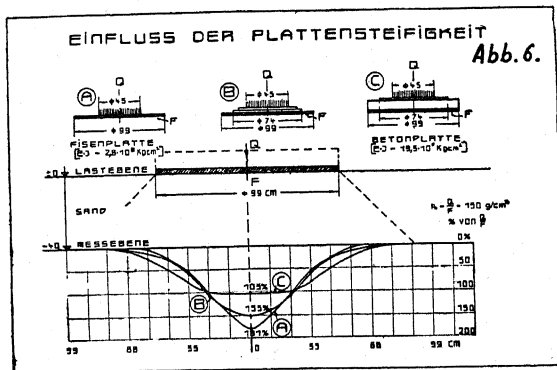
1. BOUSSINESQ: Application des potentiels, Paris 1885, vergl. auch FÖPPL: Vorl. u. tech. Mechanik 1907, Bd. V, Seite 229.
2. STROHSCHNEIDER, a. a. O., Seite 304/06.
3. MELAN, österr. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst 1918, S. 594 u. 461. Beton u. Eisen, 1919, S. 83/85.

Sie gilt für eine im Vergleich zur Ausdehnung der Fläche geringe Tiefe; in größerer Tiefe geht das Bild der Spannungsverteilung mehr und mehr in die Glockenform der Abb. 5a über.

Auch die Rechnung mittels Superposition führt zu der Schüsselform; die Messungen scheinen dies zu bestätigen (Abb. 6c).

C. Steifigkeit der Lastplatte.

Von erheblichem Einfluß auf die Spannungsverteilung ist die Steifigkeit der Platte bzw. des Körpers, der die örtliche Last in den Sand überträgt. Die Abb. 6 und 7 geben den



Vergleich zwischen drei sehr verschieden steifen Platten bei der Messung der Drücke in 40 cm und in 10 cm Tiefe. Für eine vollkommen starre Platte ist es natürlich gleichgültig, ob man die Last P in der Mitte oder nahe am Rand ringsherum verteilt anbringt; die Messungen bestätigen das.

Dagegen ist eine biegsame Platte äußerst empfindlich und erzeugt eine Druckverteilung, die die Art der Belastung sehr genau widerspiegelt (Abb. 8, Randbelastung). In gleicher Weise haben die Amerikaner für die Spannungen unter Eisenbahnschwellen⁴⁾ eine den gewählten drei Lastpunkten genau entsprechende Verteilung gefunden. Interessant ist in Abb. 8 das Ergebnis, daß das Maximum des Druckes nicht unter der Last Q liegt, sondern mehr nach der Mitte zu sich ausprägt.

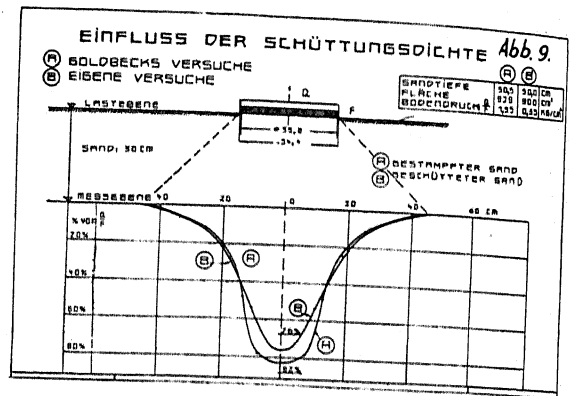
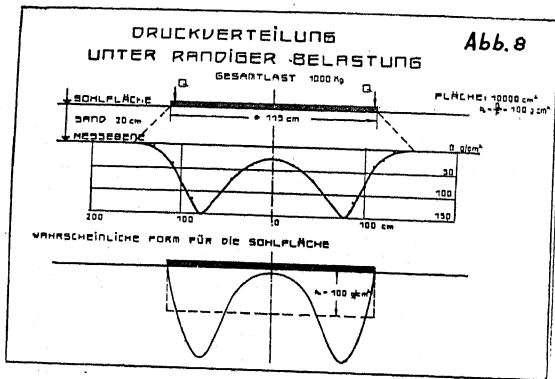
D. Einfluß der Eigenschaften der Schüttung auf die Druckverteilung.

Die amerikanischen Versuche zeigen, daß auch andere Bodenarten grundsätzlich die gleiche Druckverteilung ergeben wie reiner Sand. Jedoch verteilt sich z. B. in einem Boden aus 10 Teilen Sand, 5 Teilen Lehm und 85 Teilen Ton in geringer Tiefe der Druck etwas mehr nach der Breite hin als im Sand. Hierin dürfte schon die Kohäsion des tonigen Bodens zum Ausdruck kommen.

Daß die Art der Herstellung einer Sandschüttung eine große Rolle spielt, ist selbstverständlich. Man vergleiche in Abb. 9 die Ergebnisse Goldbecks und die unsrigen: die Kurve A ist steiler, bei B geht die Druckverteilung etwas mehr in die Breite. Zu den Versuchen A ist die Schüttung aus feuchtem Sand gestampft worden, während die Versuche B nur im geschütteten Sand vorgenommen sind. Bei dem festen Sand findet nur eine geringere Zusammenrückung statt, so daß anscheinend auch die Möglichkeit der Druckübertragung nach der Seite hin durch Reibung, die ja stets eine gewisse Bewegung voraussetzt, geringer ist als bei einem Sande, der eine größere Verdichtung erfahren kann.

⁴⁾ a. a. O.

Der Unterschied zwischen den Ergebnissen Goldbecks und den unsern liegt auch darin begründet, daß ersterer die Meßdosen auf einer starren Unterlage aufsetzte, während unter unseren immer mindestens 20 cm Sandschicht vorhanden war.



Endlich haben alle Versuche gezeigt, daß die mehrfache Verwendung einer und derselben Schüttung zu große Druckanzeigen zu Folge hat, so daß die Gesamtdruckspannungen weit mehr als die aufgebrauchte Last ergeben.

Wenn die Belastung $p_0 = Q/F$ zu groß wird, so tritt bekanntlich ein plötzliches und wiederholtes Einsinken der Last auf, der Sand um die Belastungsfläche herum zeigt Auftriebserscheinungen. In diesem Falle nehmen nach den amerikanischen Versuchen die Mitteldrücke stärker zu, als die mehr nach dem Rand hin liegenden Spannungen.

E. Einsenkung.

Die interessanten Untersuchungen TERZAGHI⁵⁾ über den Zusammenhang zwischen Pressung und Zusammendrückung der Schüttungen werden in einer mehr für die Bedürfnisse der Baupraxis zugeschnittenen Weise durch die Versuche GOLDBECKS ergänzt, die sich auf örtliche Belastungen und größere Flächen beziehen. Die amerikanischen Forscher⁶⁾ haben aus ihren Versuchen mit einiger Annäherung das Ergebnis herausgelesen, daß die *Einsenkung der Quadratwurzel aus der Fläche*, bezw. bei kreisförmiger Last oder quadratischer Fläche, *ihrem Durchmesser proportional* ist. Dieses Ergebnis stimmt mit folgender Näherungsrechnung überein:

Die Tangente des Grenzneigungswinkels der Druckverteilung sei α , der Druck für alle Tiefen sei gleichmäßig verteilt, der «Elastizitätsmodul» E bis zur Tiefe t sei konstant angenommen; dann wird die Zusammendrückung z des Druckkernes, der von der Grenzfläche eingehüllt ist, unter einer Last vom Halbmesser r_0 und mit einem Sohlendruck p_0 :

$$z \cdot E = p_0 \cdot \frac{r_0 \cdot t}{r_0 + \alpha t}$$

Wird t sehr groß gegen r_0 , so ist genau genug

$$z \cdot E \cdot \alpha = p_0 \cdot r_0.$$

⁵⁾ TERZAGHI, Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage, Leipzig 1925, 24. Abschn., S. 231, ff.

⁶⁾ A. T. GOLDBECK and M. J. BUSSARD, Public Roads Vol. 5, No. 11, Jan. 1925.
Ältere Literatur: ENGESSER, Zentralbl. d. Bauverw. 1893, S. 306.

BASTIAN, Das elastische Verhalten der Gleisbettung und ihres Untergrundes. Diss. 1906. München. Darin weitere Literaturangaben.

STÖKNER, Erzielung gleicher Fundamentsenkung durch Wahl des kleineren Einheitsdruckes bei der größeren Fundamentfläche. Diss. 1919. Braunschweig.

Metallerosion durch Wasser und Dampf

Von E. Honegger, Zürich
(Hiezu Tafeln XV und XVI)

Die Metallerosion durch Flüssigkeiten ist wohl zuerst an Schiffsschrauben und Wasserturbinen beobachtet worden; erst in neuerer Zeit trat sie infolge der stark gesteigerten Umfangsgeschwindigkeiten auch in Dampfturbinen gelegentlich auf.

Verschiedene frühere Berichte befassen sich mit der Frage, ob die Erosion eine rein mechanische Erscheinung sei, oder ob sie als eine Kombination von mechanischer Auswaschung mit chemischer Auflösung zu betrachten sei. Wohl die meisten Beobachter kamen dabei zum Schluß, daß, wenn die Erosion nicht als rein mechanische Erscheinung aufgefaßt werden könne, sicher doch die mechanische Wirkung dabei weitaus schwerwiegender als die chemische sei. So soll die Metallzerstörung bei Schiffsschrauben vor allem unter der «Hammerwirkung» des Wassers vor sich gehen: die an der Oberfläche der Schraube in der Flüssigkeit entstehenden Wirbelräume, Hohlräume sollen dann und wann einstürzen, wobei das Wasser mit beträchtlicher Geschwindigkeit gegen das Metall schlage.

Die Frage, wie weit chemische Einflüsse die Erosion unterstützen, soll hier nicht weiter erörtert werden; diese Studie soll sich darauf beschränken, den Zusammenhang verschiedener mechanischer Umstände, unter denen die Erosion entsteht, mit der erzeugten Wirkung auf experimentellem Wege klar zu stellen, ohne sich mit den feinsten Einzelheiten der Erscheinungen näher zu befassen.

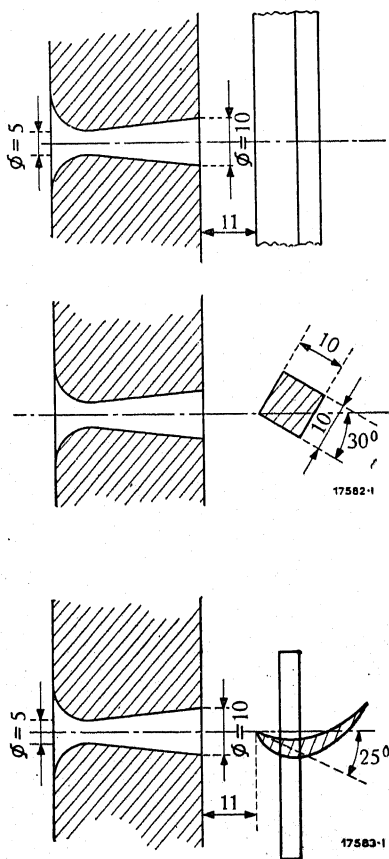


Abb. 1.
Versuchsanordnung.

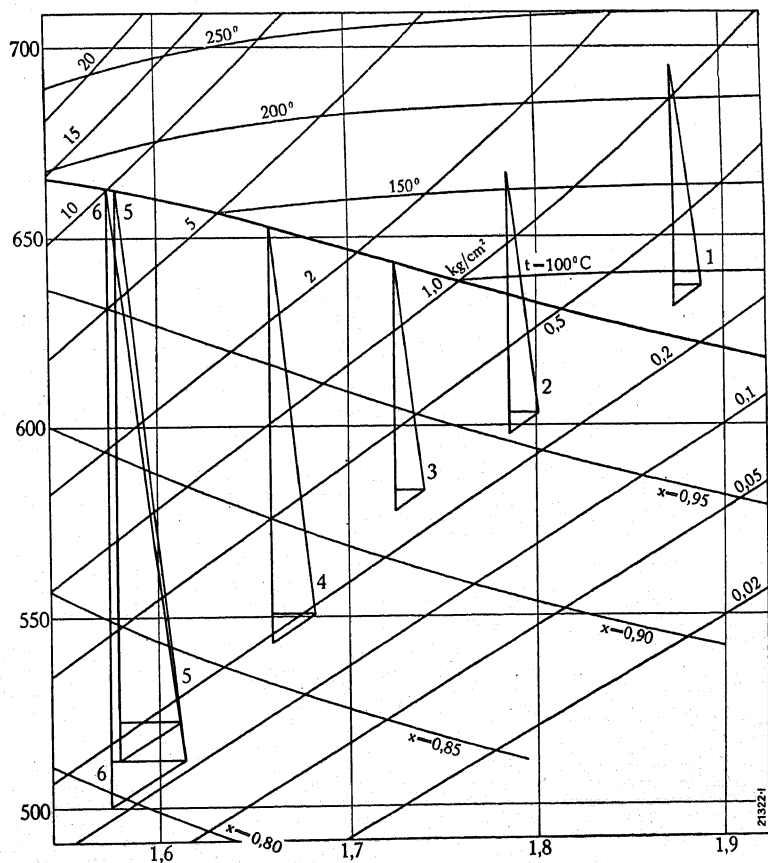


Abb. 2.
Dampfexpansion der verschiedenen Versuche im Entropie-Wärmeinhalt-Diagramm.

Dampfstrahlversuche

Abb. 1 zeigt die gewählte Anordnung der Versuche: Der Dampf expandiert von hohem Druck auf Vakuum und prallt mit großer Geschwindigkeit gegen die vorgesetzte Probe. Die Dampfverhältnisse vor und nach der Düse und die auftretenden Geschwindigkeiten sind in Tabelle 1 zusammengestellt und in Abb. 2 veranschaulicht. Bei den schärfsten gewählten Prüf-

TABELLE 1.

Versuchs-Nr.	Dampf-		Dampfdruck nach den Düsen kg/cm ²	Adiabatisches Gefälle	Dampf- gehalt	Geschwindigkeit	
	Temperatur vor den Düsen	Druck kg/cm ²				ideell m/sec.	effektiv m/sec.
1	113°	1.19	0,294	63 Cal.	1.000	727	699
2	220°	1.58	0,274	65	0.962	738	709
3	160°	1.51	0,271	69	0.962	762	731
4	139°	3.54	0,190	110	0.876	958	921
5	177°	9.68	0,161	151	0.829	1123	1080
6	180°	10.00	0,110	163	0.817	1170	1120

bedingungen wurden in 70 Stunden tiefe Anfressungen in den meisten Proben erzeugt. Einzig einige gehärtete Proben aus Spezialstahl und eine Probe aus hochlegiertem Cr-Ni-Stahl zeigen nach dieser Prüfungsdauer erst Anfänge von Anfressungen. Abb. 3 (Tafel XV) zeigt die in Tabelle 2 zusammengestellten Proben nach Prüfung Nr. 6.

Bei den Versuchen Nr. 1—4 traten an den geprüften Materialien keinerlei Erosionen auf; die vom Dampfstrahl getroffenen Stellen zeigten matte, dunkle Flächen, da und dort wie Anlauffarben schimmernde Verfärbungen; nur nach Versuch Nr. 4 wies oberflächliche Aufrauhung der beiden ersten Metalle auf einsetzende Erosion hin. Eine weitere Geschwindigkeitssteigerung erzeugte dann schon merkliche Anfressungen; immerhin blieben auch die nach Versuch Nr. 5 beobachteten Erosionen quantitativ wesentlich hinter denen von Versuch Nr. 6 zurück.

Es ist sehr beachtenswert, daß die geringe Steigerung der Dampfgeschwindigkeit von 1080 auf 1120 m/s, der eine 7 %ige Zunahme des Wassergehaltes des Dampfes parallel ging, eine Vervielfachung der Erosion zur Folge hatte. Wahrscheinlich würde eine weitere Vergrößerung der Geschwindigkeit noch beträchtlich rascheres Fortschreiten der Anfressungen hervorgerufen. — Es sei daran erinnert, daß auch die kleinsten angewandten Geschwindigkeiten immer noch sehr groß waren, jedenfalls die in der Dampfturbine zu erwartenden Werte der Aufprallgeschwindigkeit von Wassertropfen weit übertrafen.

In Abb. 4 (Tafel XV) sind eine Anzahl den Versuchsbedingungen Nr. 6 unterworfenen ganze Profilstücke, zum Teil mit eingelöteten Bindedrähten, abgebildet. Eine Beeinträchtigung der Widerstandsfähigkeit durch die beim Einlöten der Bindedrähte auftretende Erhitzung des Materials konnte nicht beobachtet werden. Wiederholt sind die aus Stahl mit einem Kupfermantel bestehenden Bindedrähte durch den Dampfstrahl direkt abgeschnitten worden.

TABELLE 2.

Material		Chemische Zusammensetzung													
Bezeichnung	Thermische Behandlung	Cu	Zn	Ni	Mn	Fe	Cr	Si	S	P	Pb	C			
V ₂ rostsicherer Chromstahl	Von 825 ⁰ in Öl abgeschreckt			1,49	0,32		12,7	0,49	0,03	0,04		0,14			
V ₄ Stainless Steel				0,42	0,18		11,3	0,22	0,09	0,03		0,33			
X ₁ " "															
V ₁ Spezial- Nickelstahl				10,2	0,44		0,14	0,25	0,013	0,014		0,15			
X ₂ " "		Von 825 ⁰ in Öl abgeschreckt													
V ₅ Spezial- Chrom- Nickelstahl	Von 825 ⁰ in Öl abgeschreckt			21,88	1,05		2,06	1,47	0,005	0,034		0,72			
U ₂ Nickelstahl				7,01	0,27			0,27	0,028	0,025		0,10			
X ₃ " "				5,04	0,27			0,22	0,034	0,014		0,12			
W ₁ *Messing (gezogen)		72,6	27,06			0,15					0,1	Sn 0,1			
W ₅ *Monelmetall (gezogen)		29,17	0,3	65,3	1,64	2,9		0,1				0,32			
Material		Mechanische Eigenschaften						Auflösungsverlust 120 h in 10%iger				Erosions- verlust nach Versuch Nr. 6			
Bezeichnung	Thermische Behandlung	Streck- grenze	Bruch- grenze	Deh- nung %0	Kon- trakt %0	Kerb- zähig- keit	Brinell- härte	H ₂ SO ₄	HNO ₃	HCl	Summe	Dauer	Ver- lust		
								Gewichtsabnahme in g						h	g
V ₂ rostsicherer Chromstahl	Von 825 ⁰ in Öl abgeschreckt	52,6	74,8	17,3	48	5,48	232	14,73	0,12	18,10	32,96	69	0,22		
V ₄ Stainless Steel			66,8	84,8	12,5	52	3,67	229	20,0	0,93	19,66	40,59	69	0,17	
X ₁ " "		Nach dem Härten nicht bestimmt.						408		Nicht bestimmt.				68	0,04
V ₁ Spezial- Nickelstahl			76	85	19,5	64	13,3	229	0,68	12,45	0,90	14,03	69	0,48	
X ₂ " "		Von 825 ⁰ in Öl abgeschreckt						338		Nicht bestimmt.				68	0,12
V ₅ Spezial- Chrom- Nickelstahl	Von 825 ⁰ in Öl abgeschreckt	38,2	88,8	39,00	41	13,3	197	0,06	10,85	0,06	10,97	69	0,02		
U ₂ Nickelstahl			49,4	60,2	25	72	13,3	163	0,41	12,41	0,46	13,28	67 1/2	1,04	
X ₃ " "		Nicht bestimmt.								Nicht bestimmt.					
W ₁ *Messing (gezogen)			28,2	37,6	26,2			80	3,04	10,51	0,17	13,72	71	2,42	
W ₅ *Monelmetall (gezogen)			32,9	58,5	31,9			122	0,08	0,15	0,22	0,45	71	0,48	

* Da die vorhandenen Profile nicht erlaubten, Proben von 10x10 Querschnitt in einem Stück herzustellen, wurden mehrere Stücke dieser Metalle aufeinander gelegt. (Man vergleiche Abb. 4.) Die Ergebnisse sind daher nicht streng vergleichbar.

Versuche mit aufschlagendem Wasser

Die Versuche mit Dampfstrahl erlauben nicht, die Erscheinungen weitgehend zu analysieren, da die Verhältnisse im Dampfstrahl uns nur sehr mangelhaft bekannt sind.

Günstiger ist eine neuerdings getroffene Versuchsanordnung. Die zu prüfenden Materialien werden in Form zylindrischer oder prismatischer Stäbchen radial in den Umfang eines Rades geschraubt, welches durch einen Elektromotor mit einstellbarer Tourenzahl angetrieben wird; bei der größten erreichbaren Tourenzahl bewegen sich die Proben mit 225 m/s Geschwindigkeit. Ein feiner, zur Radachse paralleler Wasserstrahl durchquert die Bahn der Probestäbe

und wird von diesen bei jeder Umdrehung des Rades einmal getroffen (Abb. 5). Die Proben sind am Radumfang soweit voneinander entfernt, daß jede sicher auf ein ungestörtes Stück Wasserstrahl stößt.

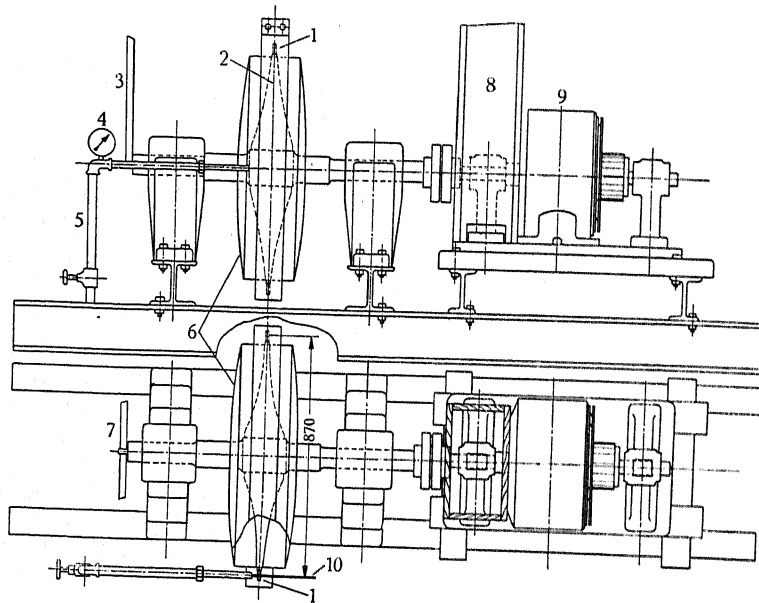
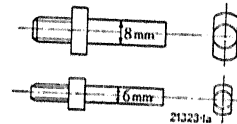


Abb. 5.

Anordnung der Wasserstrahlversuche.

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| 1. Probestück. | 6. Schutzgehäuse aus Blech. |
| 2. Radscheibe. | 7. Riemen z. Tachometer. |
| 3. Riemen z. Tachomet. | 8. Kühlluftschaft f. Motor. |
| 4. Wasserzuleitung. | 9. Motor. |
| 5. Wasserzuleitung. | 10. Wasserstrahl. |



Die bei den Versuchen aufgetretenen Erosionen wurden sowohl aus dem Aussehen der Proben, als aus den gemessenen Gewichtsabnahmen beurteilt. Dieser Mitteilung sind eine Reihe von photographischen Aufnahmen von Proben beigelegt, welche eine klare Vorstellung von der Gestalt und dem Umfang der erzeugten Anfressungen geben.

Die Untersuchungen im aufschlagenden Wasserstrahl sind besonders dazu geeignet, den Einfluß der Geschwindigkeit — welche hier genau bekannt ist — auf das Fortschreiten der Erosion zu zeigen. Nach einer Reihe von orientierenden Vorversuchen wurden daher mehrere

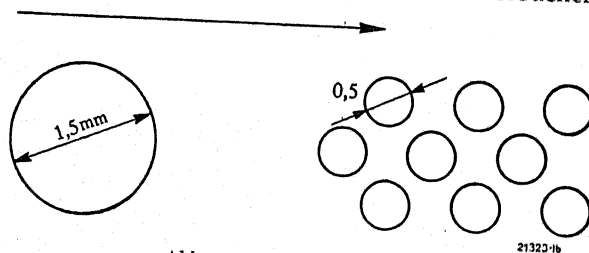


Abb. 5a. Düsenanordnung.

Der Pfeil gibt die Bewegungsrichtung der Proben an.

Versuchsserien bei verschiedenen Geschwindigkeiten ausgeführt. Dem Wasserdruck von 4 Atmosphären entsprechend strömt das Wasser mit etwa 28 m/s aus der Düse; neben der mindestens fünf mal größeren Umfangsgeschwindigkeit des Rades ist diese Geschwindigkeitskomponente vernachlässigt worden. — Durch Veränderung des Wasserstrahles sollte ferner ein Urteil über den Einfluß der Wasserverteilung, Tropfengröße, gewonnen werden. Bei den Grundversuchen wurde ein Strahl von 1,5 mm Durchmesser gewählt, durch welchen bei den vor-

handenen Wasserverhältnissen stündlich 176 l Wasser ausströmten. Zu Vergleichsversuchen kamen daneben 9 Strahlen von je 0,5 mm Durchmesser — also zusammen gleichem Querschnitt — zur Anwendung; die neun Strahlen waren so angeordnet, daß ein gleich großes Stück der Probe vom Wasser getroffen wurde: Abb. 5 a. Auch die ausströmende Wassermenge war gleich der früheren *).

Versuchsergebnisse

Die rein qualitativ durchgeführten Vorproben zeigten, daß die Erosion mit der Geschwindigkeit rasch zunimmt; Materialien, die bei 130 m/s noch gar nicht angefressen worden waren, wiesen in gleicher Zeit nach der Prüfung bei 200 und 225 m/s tiefe Löcher auf.

Zur Klärung dieser Zusammenhänge wurden die nächsten Versuche mit drei verschiedenen Geschwindigkeiten: 175, 200 und 225 m/s, bei ansteigender Versuchsdauer: $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$ und

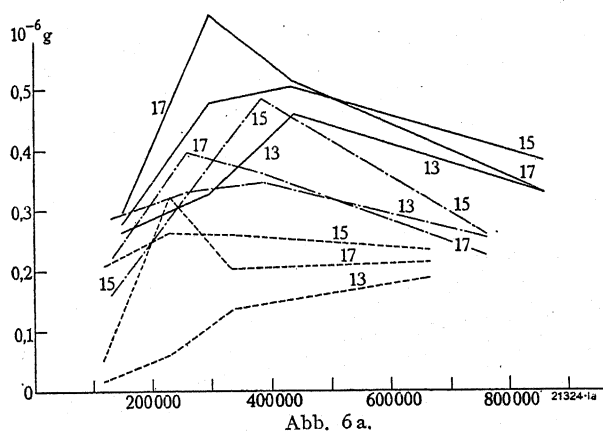


Abb. 6 a.
Ausgezogen: bei 225 m/sec.

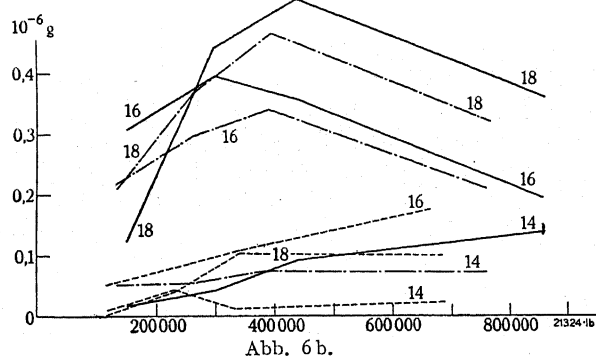


Abb. 6 b.
Strichpunktirt: bei 200 m/sec.

Gestrichelt: bei 175 m/sec.

TABELLE 3.

Probekörper Nr.	Metall	Wichtigste Legierungsbestandteile			Bruch- grenze kg/mm ²	Dehnung %	Härte Brinell
		Ni.	Cr.	C.			
13	Rostsicherer Cr. Stahl	1,5	12—14	0,15—0,20	90,7 (153)	12,2	481
14	wie oben, gehärtet						
15	„Stainless“ Stahl		14	0,3	84,4 (166)	14,4	522
16	wie oben, gehärtet						
17	Rostsicherer Cr. Stahl		16,0	0,1	75,0 (94,0)	19,2	295
18	wie oben, gehärtet						
19	25% Ni. Stahl	23	2	0,7	81,0	40,0	
20	Chrom-Nickel-Stahl	22	4	0,4	81,0	30	
21	Austenitischer Chrom Nickel Stahl	ca. 6	ca. 20	ca. 0,3	85,0	50	
22	Antimagnetischer Ni.-Stahl				93,0	14	
23	5% Ni.-Stahl	4,5—5		0,15	55—65	20	

*) Diese Versuchsanordnung habe ich in Zusammenarbeit mit DR. VON FREUDENREICH entwickelt, der mir auch bei der Durchführung der Versuche stets mit Rat und Tat beistand.

3 Stunden, durchgeführt. Der Untersuchung wurden die in Tabelle 3 angegebenen legierten Stähle unterworfen; Abb. 6 zeigt die Anfressungen, welche bei 175 m/s Geschwindigkeit in den oben angegebenen Zeiten erzeugt worden sind; die bei größeren Geschwindigkeiten geprüften Stäbchen sehen ganz ähnlich aus, weisen aber noch entsprechend größere Anfressungen auf. Die Abb. 6a und 6b stellen die Gewichtsverminderung auf einen Schlag berechnet in Funktion der

TABELLE 4.

Probekörper-Nr.	Metall	Wichtigste Legierungsbestandteile			Streckgrenze kg/mm ²	Bruchgrenze kg/mm ²	Dehnung %
		Ni	Cr	C			
24	Rapid Drehstahl				74	83	7
25	Weicher rostsischerer Cr. Stahl				37	58	25
26	Rostsischerer Cr.-Stahl	0,40	14	0,45	60	77	18
27	Rostsischerer Cr.-Stahl		13—16	0,09—0,15	44	62	14
28	Monelmetall gezogen.	66,4		28 Cu	42	66	25
29	10% Ni.-Stahl	10	0,1	0,15	72	94	18
30	Cr.-Ni.-Stahl	22	4	0,4	56	83	30
31	Cr.-Ni.-Stahl	38	11	0,4	50	70	18
32	„ „				50	70	18
33	Cr.-Stahl		20—24	0,24	55	78	17

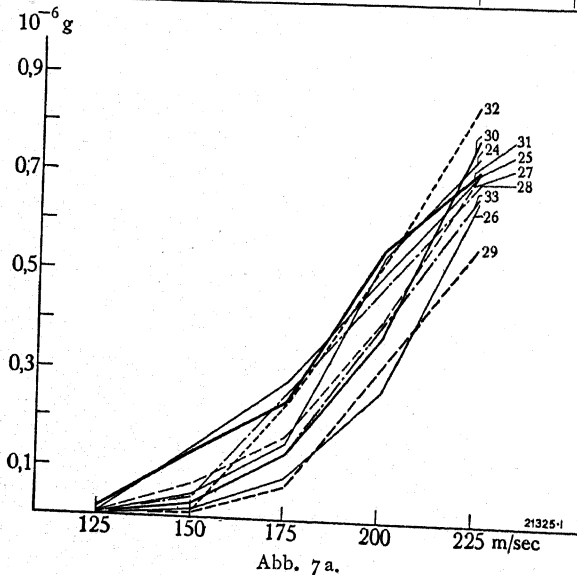


Abb. 7 a.
Gewichtsverluste durch Erosion bei zunehmender Geschwindigkeit. (Tabelle 4.)

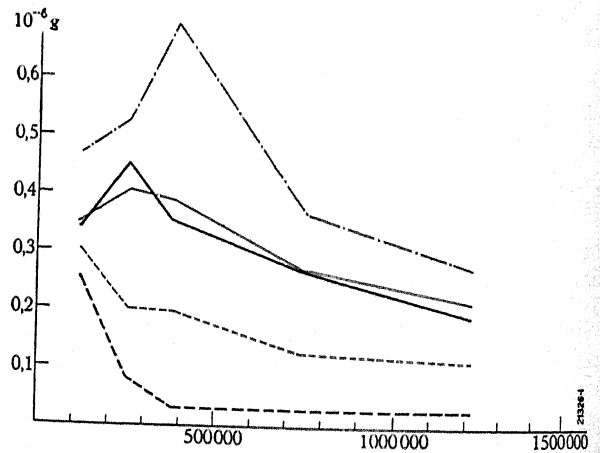


Abb. 8. Erosionsverluste bei 200 m/sec.
Dick: Stainless Steel; ausgezogen: Anlieferungszustand;
dünn: rostsischerer Cr Stahl; gestrichelt: luftgehärtet;
strichpunktirt: 5% Ni Stahl. (Tabelle 5.)

Anzahl der erlittenen Schläge dar. Beachtenswert ist der bei den drei verschiedenen Geschwindigkeiten übereinstimmend festgestellte Verlauf der meisten dieser Kurven: nach einem ziemlich steilen Anstieg bis zu einem Maximalwert fällt die spezifische Erosion langsam wieder auf kleinere Werte. — Mit wachsender Geschwindigkeit steigt die Erosion im allgemeinen rasch; einige dieser Regel widersprechende Messungen müssen als Ausnahmen betrachtet werden.

Die Wirkung der Schlaggeschwindigkeit kam beim nächsten Versuch besonders deutlich zum Ausdruck, bei welchem die in Tabelle 4 zusammengestellten Metalle 215,000 Schlägen ausgesetzt wurden bei Geschwindigkeiten, die von 125 bis 225 m/s anstiegen. Uebereinstimmend zeigten alle Proben bei 125 m/s noch sozusagen keine Erosion, während bei 225 m/s beträchtliche Anfressungen aufgetreten waren. Zwischen diesen beiden Grenzwerten zeigen alle Erosionskurven wohl ununterbrochen ansteigenden Verlauf, aber keine allgemein gültige Gesetzmäßigkeit: Abb. 7 a. Abb. 7 (Tafel XVI) zeigt die Proben.

Eine weitere Versuchsserie sollte den Zusammenhang zwischen der Erosionsfestigkeit von rost sicheren Stählen und deren thermischer Behandlung erläutern; zum Vergleich wurde 5 %iger Ni-Stahl der gleichen Prüfung unterzogen. Die Schlaggeschwindigkeit wurde mit 200 m/s konstant gehalten, die Dauer bis auf 5 Stunden entsprechend 1,220,000 Schlägen ausgedehnt. Abb. 8 gibt die spezifischen Erosionsverluste in Abhängigkeit der Schlagzahl an. Die Proben im Anlieferungszustand zeigen wieder den von früher her bekannten Kurvenverlauf, während die gehärteten Stähle ununterbrochen fallende Erosionsverluste erlitten; die großen Erosionsverluste des gehärteten «Stainless»-Stahls bei kurzen Versuchsdauern stehen aber mit den übrigen Werten in Widerspruch und müssen ungleichmäßiger Härtung der Proben zugeschrieben werden. Die mechanischen Eigenschaften der Stähle im Anlieferungs- und im gehärteten Zustand sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Abb. 8a und 8b (Tafel XVI) zeigen

TABELLE 5.

Probekörper Nr.	Metall	Wichtigste Legierungsbestandteile			Bruch- grenze kg/mm ²	Dehnung %	Härte
		Ni.	Cr.	C.			
34, 35 36, 37	Rostsicherer Stahl wie oben gehärtet (Luft)	1,5	12—14	0,15—0,20	60	22	440
38, 39 40, 41	„Stainless“-Stahl wie oben gehärtet (Luft)				78	20	
42, 43	5% Ni-Stahl	4,5—5		0,15	55—65	20	560

die Proben nach dem Versuch. — Die durch die Härtung erzeugte Steigerung der Erosionsfestigkeit ist bei «Stainless-Stahl» entsprechend der größeren Härtezunahme bedeutend größer. Weitere, mit anderen ähnlichen Stählen vorgenommene Untersuchungen haben gezeigt, daß da, wo eine Härtezunahme durch Luftabkühlung nicht eintritt, auch die Erosionsfestigkeit nicht erhöht wird.

Tabelle 6 veranschaulicht in sprechender Weise den Einfluß der Tropfengröße: durch alleinige Verfeinerung der Wasserverteilung, unter Beibehaltung aller anderen Versuchsbedingungen, wurde der Erosionsverlust auf einen Bruchteil des früheren Wertes reduziert. Diese Beobachtung ist an den verschiedensten Materialien gemacht worden. Es darf aber nicht übersehen werden, daß das Verhältnis der Erosionsverminderung durch feinere Wasserverteilung mit wachsender Geschwindigkeit kleiner wird.

Besprechung der Resultate

1. *Zeitlicher Verlauf der Erosion.* Die spezifische Erosion steigt in den meisten geprüften Fällen vorerst mit der Anzahl der Schläge an, um später wieder zu fallen; in den weniger zahlreichen Beispielen, wo die Kurven nur steigen, muß angenommen werden, daß die Versuchs-

dauer zu kurz war und der absteigende Ast noch nicht erreicht wurde; fällt hingegen die Kurve von Anfang an, so ist wahrscheinlich der erste Kurventeil so steil, daß er von der Prüfung nicht mehr erfaßt wurde, indem die erste Messung, die frühestens nach einer $\frac{1}{2}$ Stunde erfolgte, offenbar erst vorgenommen wurde, nachdem der Maximalwert schon überschritten war.

Dieses Verhalten der Erosion kann etwa in folgender Weise erklärt werden: solange die Oberfläche absolut blank ist, bietet sie den aufprallenden Wassertropfen keine günstigen Angriffsmöglichkeiten, das Wasser gleitet allseitig ab; die Erosion setzt daher länger nicht ein. Ist aber einmal eine gewisse Aufrauhung eingetreten, so schreitet die Erosion zunehmend rascher fort, weil das durch die Schlagwirkung mit großem Druck in die Unebenheiten eindringende Wasser sprengend wirkt. Haben die Anfressungen schließlich eine größere Tiefe erreicht, so bleibt eine Wasserschicht auf der nunmehr ganz rauhen Oberfläche haften; beim Aufschlagen des nächsten Tropfens wirkt diese dämpfend, so daß die frühere Härte des Schlages vermieden wird: folglich nimmt die spezielle Erosion mit über ein bestimmtes Maß wachsender Tiefe der Anfressung wieder ab.

2. *Zusammenhang von Erosion und Geschwindigkeit.* Fast ohne Ausnahme zeigen alle vorgenommenen Proben eine ausgesprochene Zunahme der Erosion mit wachsender Geschwindigkeit — was ja übrigens zu erwarten war —, jedoch ist es nicht möglich, aus den verschiedenen Beispielen einen gemeinsamen zahlenmäßigen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Erosionsverlust herauszulesen. Am deutlichsten kommt der Einfluß der Aufprallgeschwindigkeit in Abb. 7a zum Ausdruck: bei allen geprüften Materialien vermögen 215,000 Schläge bei 125 m/s Geschwindigkeit noch sozusagen keinen Angriff zu erzeugen. Bei 150 und 175 m/s treten schon recht deutliche Anfressungen auf, aber erst bei weiterer Geschwindigkeitssteigerung setzt besonders rasches Fortschreiten der Erosion ein.

Dem nähern Verlauf der einzelnen Kurven in Abb. 7 darf keine allzugroße Bedeutung beigemessen werden, da auch zwischen mehreren Proben des gleichen Materials beträchtliche

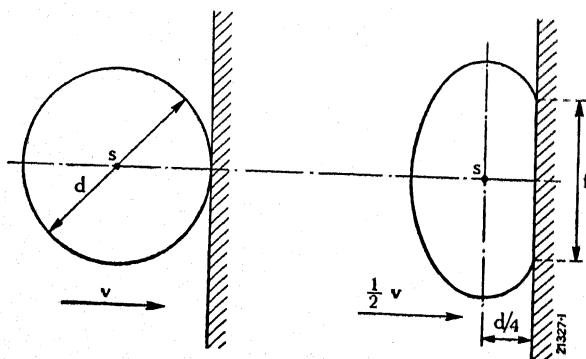


Abb. 9.

Annahmen zur Berechnung des mittleren Drucks
zwischen Tropfen und Wand.

Unterschiede auftreten können, wie ein Vergleich der beiden Linienzüge 31 und 32 zeigt. — Generell zeigt die Abbildung, daß das Erosionsgewicht der geprüften Metalle bei den gewählten Versuchsverhältnissen etwa gleich gesetzt werden kann:

$$\text{Konstante } (v - 125)^2,$$

wo die Geschwindigkeit v in m/s einzusetzen ist.

Beachtenswert sind, in Anbetracht der Verschiedenheit der geprüften Metalle, die geringen Unterschiede der Erosionsverluste bei großen Geschwindigkeiten. Vermutlich würden

die relativen Abweichungen zwischen den einzelnen Metallen bei weiterer Geschwindigkeitssteigerung noch mehr abnehmen.

3. *Der Einfluß der Tropfengröße* wird durch die letzten Versuche bemessen, deren Ergebnisse in der Tabelle 6 zusammengestellt sind. Die Unterteilung des Strahles ist mit einer

TABELLE 6.

Material	Geschwindigkeit m/sec.	Dauer Stunden	Spez. Erosionsverlust in 10^{-6} g bei	
			1. Düse 1,5 mm \varnothing	9 Düsen 0,5 mm \varnothing
Rostsicherer Cr.-Stahl gezogen	200	1/2	0,298	0,0311
5% Ni. Stahl, gewalzt	200	9	0,207	
	200	18		0,0273
„Stainless“ Stahl, gewalzt	150	18	0,103	0,0057
	150	6	0,068	0,006
	150	12	0,099	
	200	2	0,116	0,021
	200	6	0,165	

beträchtlichen Abnahme der Erosion verbunden, das numerische Verhältnis dieser Reduktion ist aber in hohem Maße von der Geschwindigkeit abhängig und schwankt für die vorliegenden Versuchsbedingungen zwischen 1 : 5 für große Geschwindigkeiten und 1 : 10 für kleinere Geschwindigkeiten.

Ein Versuch, die mittlere Pressung zwischen Wand und Tropfen mit Hilfe des Satzes vom Antrieb zu berechnen, führt unter den in Abb. 9 veranschaulichten Annahmen, der Schwerpunkt lege während der Zeit Δt den Weg $1/4 \cdot d$ zurück und während dieser Zeit sei die mittlere

Berührungsfläche $\frac{\pi}{4} (d/2)^2$ zu dem Werte $p = 4 \cdot 10^{-6} \cdot v^2$ kg/cm², wo v in cm/s einzusetzen ist.

Danach wäre also die mittlere Pressung von der Tropfengröße unabhängig; die raschere Erosion bei größeren Tropfen müßte somit der größeren Druckfläche und möglicherweise einer verschiedenen Druckverteilung zugeschrieben werden, sowie Einflüssen, die von der vereinfachten Annahme nicht berücksichtigt werden. Die nach dieser Annahme berechnete mittlere Pressung von 2000 kg/cm² bei 225 m/s Geschwindigkeit liegt so hoch, daß die beobachtete rasche Erosion dadurch um so leichter verständlich wird, als ja der Druckhöchstwert den zeitlichen und räumlichen Mittelwert p noch wesentlich überschreiten kann.

Eine genauere Berechnung des Druckes und der Druckverteilung zwischen Wand und Tropfen, unter Berücksichtigung der Viskosität und der Oberflächenspannung des Wassers, war mit derartigen rechnerischen Schwierigkeiten verbunden, daß von ihrer Durchführung abgesehen werden mußte.

4. *Erosion und mechanische Festigkeit.* Ein Versuch, die Erosionsfestigkeit mit der aus der Zerreißprobe bestimmten Bruchfestigkeit des Materials in Zusammenhang zu bringen, hat

zur Abb. 10 geführt. Darin stellt die Ordinate jeweils den Mittelwert aus einer Reihe von Messungen über verschiedene Zeiten oder bei verschiedenen Geschwindigkeiten dar, ist also nicht einfach definiert; jeder Linienzug verbindet Punkte, die nach einem bestimmten, unveränder-

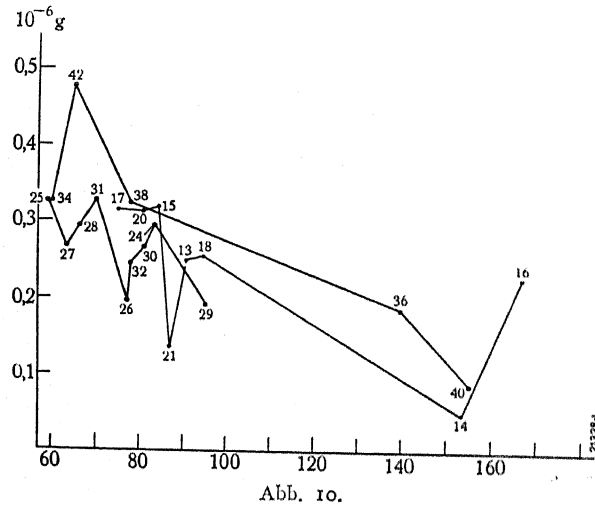


Abb. 10.
Zusammenhang zwischen Erosionsverlust und
Zerreissfestigkeit.

lichen Versuchsprogramm verschiedenen Materialien entsprechen. — Ein Anstieg der Erosionsfestigkeit mit der Zerreissfestigkeit — mit welcher ja die Brinellhärte im wesentlichen parallel verläuft — ist unverkennbar, jedoch sind die drei Linienzüge so unregelmäßig, daß keine Gesetzmäßigkeit daraus gefolgert werden kann. Trotz gleicher Brinellhärte besitzen drei geprüfte Gußeisensorten eine viel geringere Erosionsfestigkeit als die untersuchten zähen Metalle; ein Zusammenhang zwischen der Erosionsfestigkeit und der Härte besteht somit nur für Materialien, die ähnlichen Aufbau aufweisen. Beachtenswert sind dann ferner die großen Unterschiede zwischen den drei geprüften Gußeisen ihrerseits, obwohl deren Härtegrade ganz ähnlich sind: zwei perlitische, im BBC-Elektroofen erzeugte Eisen sind viel widerstandsfähiger als gewöhnlicher Kuppelofen-Grauguß; bei letzterem setzt der Angriff viel früher ein und der Erosionsverlust ist auch nach längerer Prüfdauer noch drei mal größer als beim Elektrogußeisen.

Neuere experimentelle Beiträge zur Frage der Knickfestigkeit.

Von K. Memmler, Berlin-Dahlem

Das Studium der Frage der Knickfestigkeit und im besonderen die bei Knickversuchen anzuwendende Prüfungstechnik hat seit langem auch das Materialprüfungsamt zu Berlin-Dahlem (St.M.P.A.) beschäftigt. Im Deutschen Eisenbau-Verband ist zu diesem Zwecke ein Versuchsausschuß gebildet worden, dem Männer, wie ZIMMERMANN, MÜLLER-BRESLAU, v. BACH u. a. angehörten, und der im Laufe der Jahre verschiedene Versuchsprogramme aufgestellt hat, die zum überwiegenden Teile im St.M.P.A. in der mir unterstehenden Abteilung für Maschinen- und Eisenbau durchgeführt wurden, und nunmehr zu einem gewissen Abschluß gebracht werden konnten. Die einzelnen Phasen der Versuchsarbeit des Ausschusses und den allmählichen Fortschritt der Erkenntnisse besonders auf experimentellem Gebiete hierbei, Ihnen zu schildern, ist im Rahmen dieses kurzen Vortrages nicht möglich.

Man wurde mehr und mehr dazu gedrängt, als Versuchsobjekt einen Stab möglichst einfachen Querschnitts, der walztechnisch in weitgehender Genauigkeit und Geradheit herstellbar ist, zu verwenden und damit zu sogenannten Modellstäben zu kommen, wie sie ja auch schon v. KÁRMÁN in seiner klassischen Forschungsarbeit zum gleichen Thema verwendet hat. Auch dann blieben jedoch eine Reihe versuchstechnischer Probleme noch zu lösen, selbst wenn man sich entschloß, die kugelige Lagerung der Probenenden und auch die Spitzenlagerung zu verlassen, und zu einer schneidenförmigen Lagerung überzugehen, bei der also von vornherein der Probe die Ausbiegungsrichtung in der Ebene senkrecht zur Schneidenachse aufgezwungen wird.

Schneidenlagerungen in der bisher gebräuchlichen Konstruktionsform, bei der in der Regel der Schneide bzw. Pfanne zunächst eine Druckplatte ausreichender Dicke aufgelagert

wird, gegen die sich die Probenenden stützen, erwiesen sich insofern nicht als zulänglich, weil die Druckplatten als verhältnismäßig starre Gebilde die Bestimmung der wirklichen Knicklänge der Proben unsicher gestalten. Zwar hat v. KÁRMÁN in seiner Forschungsarbeit eine Näherungsformel zur Berichtigung der Knicklänge angegeben. Es erschien uns aber zweckmäßiger, zu versuchen, ob nicht durch entsprechende konstruktive Gestaltung der Schneidenlagerung dieser Unsicherheit begegnet werden könne. Dies ist dadurch gelungen, daß nach Konstruktionsangaben meines Mitarbeiters PANZERBIETER eine Schneidenlagerung besonderer Bauart für diese Versuche von der Maschinenfabrik Mohr & Federhaff in Mannheim hergestellt wurde.

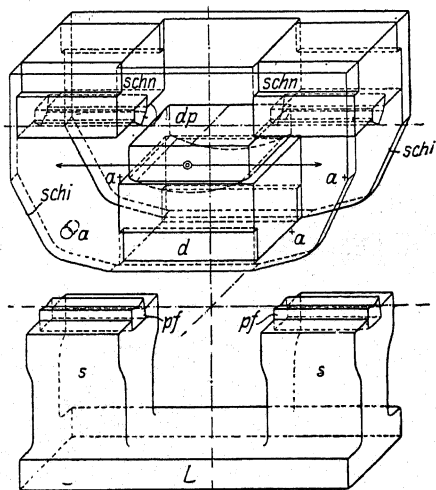


Abb. 1.

Schneide in zwei Hälften die beiderseitigen Endflächen der Proben in die Ebene der Schneiden zu liegen kommen und damit also die Knicklänge = Stablänge wird. Zum besseren Verständnis der Konstruktion ist in der Abb. 1 der die Schneiden enthaltende Oberteil, aus dem die Pfannen enthaltenden Unterteil herausgehoben dargestellt. Man muß sich also vorstellen, daß bei der Benutzung die beiderseitigen Schneiden *schn* unmittelbar auf den zugehörigen Pfannen *pf* aufliegen, und daß ferner je ein solches Schneidenlager oben und unten an

den Druckübertragungsorganen der Prüfungsmaschine befestigt ist. Der untere Lagerkörper ist mittels der Platte *L* am Druckübertragungsorgan der Maschine angeschraubt und trägt auf zwei kurzen Säulen *s* die geteilten Pfannen *pf*. Zwischen diesen Säulen befindet sich das Druckstück *d* mit Druckplatte *dp*. Durch zwei Schilde *sch* ist dieser Druckkörper mit den beiden Schneidenstücken *schn* fest verbunden. Die Befestigungsschrauben sind in Abb. 1 nicht mit eingezeichnet. Die Druckplatte *dp* ist auf ihrer Unterseite als Zylinderfläche ausgebildet und somit in einer entsprechenden Ausrundung der Unterlagsplatte drehbar gelagert. Durch eine Spindel mit Handrad, die durch die Pfeillinie angedeutet ist, kann das Druckstück in Richtung der Schneidenachsen verstellt werden. An den 4 durch *a* angedeuteten Stellen der Schilde sind Gewinde für Schraubenbolzen eingeschnitten, durch die das Kippen des Schneidenkörpers gegen den Pfannenkörper verhindert werden kann, sofern dies für Zwecke der Ausrichtung der Stäbe in der Maschine erforderlich wird. Alle Teile der Konstruktion sind fast reibungslos gegeneinander beweglich.

Diese Schneidenlager sind nun in eine 50 t-Prüfungsmaschine eingebaut worden. Die Maschine ist eine stehend angeordnete und mit hydraulischem Preßzylinder — oberer Teil der Maschine — als Kraftherzeuger ausgerüstete Maschine, die Kraftleistungen bis zu 50 t hergibt. Als Kraftmeßvorrichtung dient die im Untergestell der Maschine eingebaute Martenssche Meßdose. Die beiden seitlichen mit Gewinde versehenen Säulenspindeln ermöglichen Verstellung des oberen Zylinderquerhauptes jeweils nach der Länge der einzubauenden Prüfstäbe.

Geprüft wurden bisher Probestäbe aus Flußstahl der Qualitäten St. 37 (Baustahl) und St. 48 (Hochwertiger Baustahl). Die Versuchsstäbe selbst waren Vollstäbe rechteckigen Querschnitts in den Abmessungen 25×40 mm, $i_{min} = 7,22$ mm, die bei dem Material St. 37 allseitig bearbeitet wurden und nach dem Glühen eine Streckgrenze von etwa 2400 kg/qcm aufwiesen. Bei späteren Versuchen wurde auf die Bearbeitung der Stabflächen und auf das Glühen verzichtet. Das Versuchsmaterial aus St. 48 hatte eine ungefähre Streckgrenze von 3200 kg/qcm. Die Endflächen der Probestäbe waren sehr sorgfältig auf die Druckplattenflächen aufgeschliffen und standen genau senkrecht zur Längsachse. Die Versuchslängen der Stäbe waren so gewählt, daß in Abstufungen von 5 zu 5 für die Schlankheitsgrade $\lambda = \frac{l}{z} = 120-75$ und außerdem mit $\lambda = 60$ und $\lambda = 40$ gearbeitet wurde. Die Stäbe stammten bei jeder Stahlqualität aus einer einzigen Gußcharge und zwar standen von jeder Länge 3 Parallelproben zur Verfügung. Insgesamt sind bislang 130 Stäbe geprüft worden.

Die Messung der Durchbiegungen erfolgte nach beiden Trägheitsachsen, mit Hilfe von Feinmeßgeräten, sogenannten *Leuner*-Apparaten, die eine Meßgenauigkeit bis zu $1/1000$ mm ermöglichen; die Zeigergehäuse des Apparates sind an seitlich neben der Maschine aufgestellten Hilfestellen befestigt und das Triebwerk durch eine Uebertragungsstange unter Federdruck mit den eigentlichen Meßpunkten unmittelbar am Stabe in Verbindung gebracht.

Die Anwendung besonders empfindlicher Feinmeßgeräte zur Messung der Durchbiegungen und die Anordnung einer größeren Zahl solcher Geräte war notwendig, weil die Erfahrung bei den Versuchen zeigte, daß trotz Benutzung eines zweckentsprechend konstruierten Schneidenlagers und trotz der Auswahl möglichst gerader, im Querschnitt einfach gestalteter Probestäbe mit genau gearbeiteten Endflächen entscheidendes Gewicht bei der Versuchsdurchführung auf eine möglichst exakte Einrichtung des Probestabes in die Maschinenachse zu legen ist.

PRANDTL in seiner Doktordissertation über Kipp-Erscheinungen ist wohl der erste gewesen, der versucht hat, durch sorgfältige Einstellung seiner Prüfstäbe der theoretischen Forderung für den einwandfreien Knickversuch, nämlich kaum merkliche Ausbiegung bis nahe an

die Knicklast heran, sehr nahe zu kommen. Nach ihm hat dann auch v. KÁRMÁN bei seinen Knickversuchen auf die richtige Zentrierung der Stäbe allergrößtes Gewicht gelegt. Allerdings haben beide sich damit begnügt, die Durchbiegungen in der Mitte des Stabes möglichst klein zu halten und überdies die Durchbiegung in Richtung des größten Trägheitsradius nicht bestimmt. Unsere Versuche haben jedoch ergeben, daß Durchbiegungsmessung in der Mitte allein noch nicht ausreicht, um wirklich exaktes Einrichten des Probestabes in der Maschinenachse zu erzielen; in der Nähe der Probenenden können unter Umständen sehr große entgegengesetzt gerichtete Fehlerhebel noch bei verhältnismäßig hoher Last wirksam werden, obwohl die Durchbiegungen in der Mitte der Probenlänge sehr klein ausfallen.

Das bei unseren Versuchen angewendete Einrichtungsverfahren war folgendes: Die Stäbe mit rechteckigem Querschnitt von 40×25 mm wurden mit der langen Kante parallel zur Schneidenrichtung eingebaut, so daß dem Stabe das Knicken in der Richtung des kleinsten Trägheitsmomentes, also nach y , aufgezwungen wurde. Die Durchbiegung senkrecht zur Achse des größten Trägheitsmomentes, also nach x , soll bis zur Höchstlast möglichst = 0 bleiben, damit ein möglichst lineares Problem für den Knickfall vorliegt. Die Zentrierung in Richtung der x -Achse wurde vorgenommen durch Verschiebung der Schraubenspindel in Richtung der Schneidenachse mit Hilfe der durch Handrad betätigten Druckplatten. Das Maß der Verschiebung wurde mit besonderen Feinmeßgeräten — Zeißuhren — festgestellt. Bei den Stäben mit größerer Schlankheit gelang es immer leicht, durch diese Art der Zentrierung die Ausbiegung in Richtung der x -Achse bis nahe an die Knicklast heran sehr klein, — nicht $> 20 \cdot 1/1000$ mm — zu halten, Stäbe kleinerer Schlankheit verursachten allerdings etwas mehr Mühe.

Die Durchbiegungen in Richtung des kleinsten Trägheitsradius, d. h. in der Richtung der *kurzen* Querschnittskante, in Richtung der y -Achse, sind abhängig von den sogenannten Fehlerhebeln, mit denen die Kraft in beiden Enddruckflächen auf den Stab wirkt. Um aus den gemessenen Stabdurchbiegungen die Größe dieser Fehlerhebel jeweils nach einzelnen auf den Stab aufgebrachten Belastungsstufen leicht rechnerisch ermitteln und für die weitere Einrichtung benutzen zu können, ist von ZIMMERMANN ein einfaches Rechnungsverfahren angegeben worden. Es sei hierüber nur das folgende mitgeteilt:

Die elastische Linie eines in Richtung der Stabachse durch eine Last beanspruchten Stabes ist eine Sinuslinie, sie liegt in allen Punkten fest, sobald die Fehlerhebel des Kraftangriffes bekannt sind. Die Durchbiegung in jedem Punkt dieser Linie ist gegeben durch die Gleichung $\delta = a \cdot f_1 + b \cdot f_2$, wenn f_1 und f_2 die Fehlerhebel und a und b Konstante sind. Hieraus kann man umgekehrt durch Feststellung der Durchbiegungen jeweils die wirkenden Fehlerhebel ermitteln, welche bei symmetrischer Lage der Meßpunkte 1 und 2 zur Stabmitte m sich ausdrücken lassen durch die Beziehung:

$$\text{oberer Fehlerhebel } f_1 = g \cdot \delta_1 - k \cdot \delta_2$$

$$\text{unterer „ } f_2 = g \cdot \delta_2 - k \cdot \delta_1$$

Die Werte g und k sind Konstanten, deren Größe von den Stababmessungen, der Materialkonstanten E , der Stabkraft und dem Abstand der Meßpunkte von den Stabenden abhängt. Obwohl durch Ermittlung der Durchbiegungen in den beiden symmetrisch liegenden Meßpunkten 1 und 2 die elastische Linie theoretisch in allen Punkten bekannt ist, wird man nicht darauf verzichten, auch die Durchbiegung in der Stabmitte δ_m noch zu messen, und damit eine Kontrollmessung zu erhalten. Die Beziehung zwischen δ_m und den Fehlerhebeln lautet am einfachsten:

$$m \cdot \delta_m = 1/2 \cdot (f_1 + f_2),$$

worin m eine den Werten g und k entsprechende Konstante für die Stabmitte ist.

Es erwies sich als zweckmäßig, die Meßpunkte 1 und 2 in größerem Abstände voneinander, aber auch nicht zu nahe an den Stabenden anzuordnen, da andernfalls der Einfluß kleiner Meßfehler bei der Bestimmung von f_1 und f_2 zu sehr ins Gewicht gefallen wäre. Im allgemeinen wurden die Meßpunkte in die Stabviertelpunkte, bei kürzeren Stäben in die Drittpunkte gelegt. Die Bestimmung von f_1 und f_2 blieb dieselbe, nur die Werte g und k waren entsprechend der Lage der Meßpunkte neu zu bestimmen. Bei sehr kurzen Stäben, bei denen wegen der Bauart des Schneidenlagers auch die Drittpunktbewegungen mittels der Leunerapparate nicht mehr gemessen werden konnten, wurden elastische Linie und damit die Fehlerhebel aus der Durchbiegung in Stabmitte und dem Neigungswinkel der elastischen Linie in Stabmitte bestimmt.

Die Verschiebung der Stabendflächen gegen die Druckplatte in Richtung der y -Achse erfolgte durch kleine Druckschrauben, die gegen die Mantelfläche des Stabes wirkten. Das Maß der jeweiligen Verschiebung wurde hierbei durch die Leunerapparate an den beiderseitigen Endflächen kontrolliert. Im Verlaufe der Versuche ergab sich jedoch als zweckmäßigste Praxis, daß nach einer Belastung nur der jeweils größere Fehlerhebel entsprechend verkleinert, dann erneut belastet und die Fehlerhebel neu berechnet wurden, da bei gleichzeitiger Verschiebung an beiden Probenenden eine gegenseitige Beeinflussung der Fehlerhebel oben und unten nicht zu vermeiden war. Während des Verschiebens an einem Ende wurde das Kippen des Schneidenlagers an diesem Ende durch Anziehen der Feststellschrauben verhindert, während das Schneidenlager am anderen Ende freibeweglich blieb und so der Drehung des Stabes, die durch die Verschiebung hervorgerufen wurde, folgen konnte. Es war ferner darauf zu achten, daß der Stab nicht auf Torsion beansprucht wurde und daß die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes in ihrer Lage parallel zur Schneide blieb.

Es ist aus dieser kurzen Schilderung des bei unseren Versuchen angewendeten Einrichtungsverfahrens schon zu erkennen, daß es einer längeren und mühevollen Arbeit bedurfte, ehe man alle notwendigen Handgriffe so beherrschte, daß ein Versuch glatt durchführbar wurde. Meine Mitarbeiter Prof. PANZERBIETER und die Dipl.-Ingenieure BIERETT und BÖTTGER haben sich um diese Arbeit besonders verdient gemacht.

Von den Ergebnissen unserer bisherigen Versuche beschränke ich mich darauf, Ihnen an einigen Abbildungen die wichtigsten grundsätzlichen darzustellen *).

Abb. 2 zeigt zunächst, ob und inwieweit es uns gelungen ist, hinsichtlich Erfüllung der theoretischen Anforderungen für den Knickversuch noch über den von unseren Vorgängern erreichten Grad hinauszukommen. Nach dem Vorgange v. KÄRMÄNS in seiner Forschungsarbeit stellt die Abb. 2 die relative Ausbiegung der Knickstäbe als Funktion der prozentuellen theoretischen Eulerknicklast dar und vergleicht in dieser Hinsicht die Ergebnisse unserer Knickversuche mit denen unserer Vorgänger KIRSCH, v. TETMAYER und v. KÄRMÁN.

Die obere horizontale Abschnittslinie des Schaubildes stellt die theoretische Eulerknicklast dar und setzt diese = 100. Man sieht, daß wir bezüglich der erreichten Knicklasten fast durchweg näher an diese theoretische Eulerlast herankommen, als wie die übrigen Forscher, wenn die Stäbe im sog. elastischen Bereich ausknicken.

Bei Stäben, die wegen ihres geringen Schlankheitsgrades im plastischen Bereich knicken, haben unsere Versuche, wie Abb. 3 zeigt, ergeben, daß die Knicklasten gleichfalls fast 100 % ige an die Streck- bzw. Quetschgrenze des betreffenden Materials herankommen.

Bei einer Anzahl der Versuche wurde die auffällige Erscheinung bemerkt, daß Stäbe, die schon verhältnismäßig stark nach einer Seite ausgebogen hatten, bei zunehmender Belastung

*) Ausführliche Veröffentlichung zahlenmäßiger Ergebnisse durch den Versuchsausschuß des Deutsch. Eisenbauverbandes steht zu erwarten.

wieder zurückgingen und schließlich plötzlich kurz vor oder an der Höchstlast nach der anderen Seite ausknickten, ein Vorgang, wie er durch Abb. 4 veranschaulicht ist. Manchmal fand die Umkehrung erst ganz nahe an der Knickgrenze statt, so daß die Ausbiegungen nach der anderen Seite nicht mehr gemessen werden konnten und nur der verbogene Stab Zeugnis von dem eigen-

Knickversuche mit Stäben, die im elastischen Bereich knicken

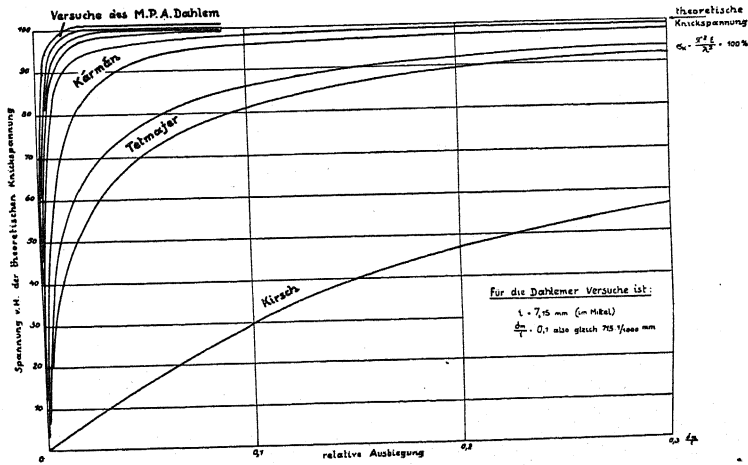


Abb. 2.

artigen Vorgänge ablegt. In einer Abhandlung von ZIMMERMANN (Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften Heft XXV, Jahrg. 1923) hat dieser den Vorgang näher beleuchtet und darauf hingewiesen, daß durch dieses Versuchsergebnis die bisherige Annahme, daß die Eulersche Theorie nur für gerade Stäbe Geltung habe, gekrümmte Stäbe die Eulerlast

Knickversuche mit Stäben, die im plastischen Bereich knicken

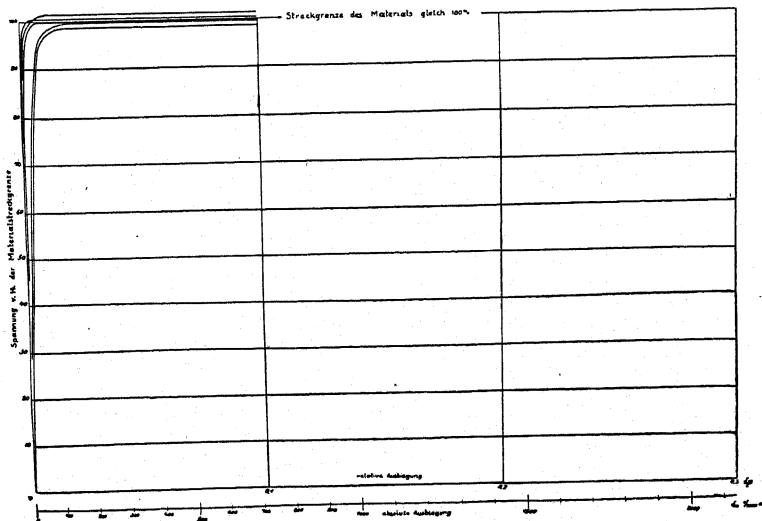


Abb. 3.

also nicht erreichen könnten, ein Irrtum war. Diese Behauptung haben wir experimentell auch noch weiter dadurch bestätigt, daß wir eine Reihe von Stäben mit absichtlicher Anfangskrümmung — in Abb. 4 mit den Nummern 2—5 bezeichnet — nach unserem Versuchsverfahren prüften und hierbei, wie Sie aus den Linienzügen sehen, gleichfalls die theoretische Eulerlast mit großer Annäherung erreichten.

Schließlich bringt Abb. 5 für eine der geprüften Stahlsorten St. 48 die Lage der verschiedenen Einzelwerte unserer Versuche zur theoretischen Eulerhyperbel bzw. zur Streck-

Knickstäbe mit Anfangskrümmung

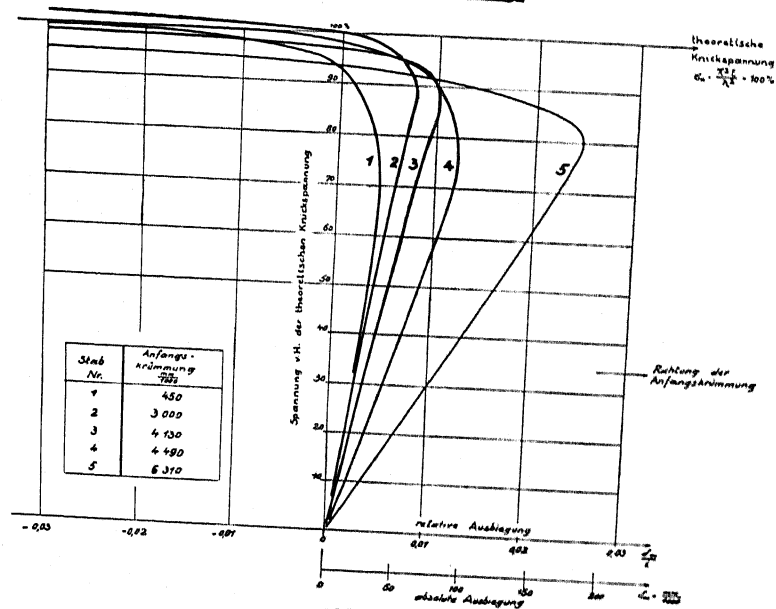


Abb. 4.

grenze des betreffenden Materials zur Anschauung. Sie sehen aus diesem Lichtbilde, daß im elastischen Bereich etwa bis zum Schlankheitsgrade $\lambda = 80$ die gefundenen Knicklasten sich

Verlauf der Knickspannungslinie

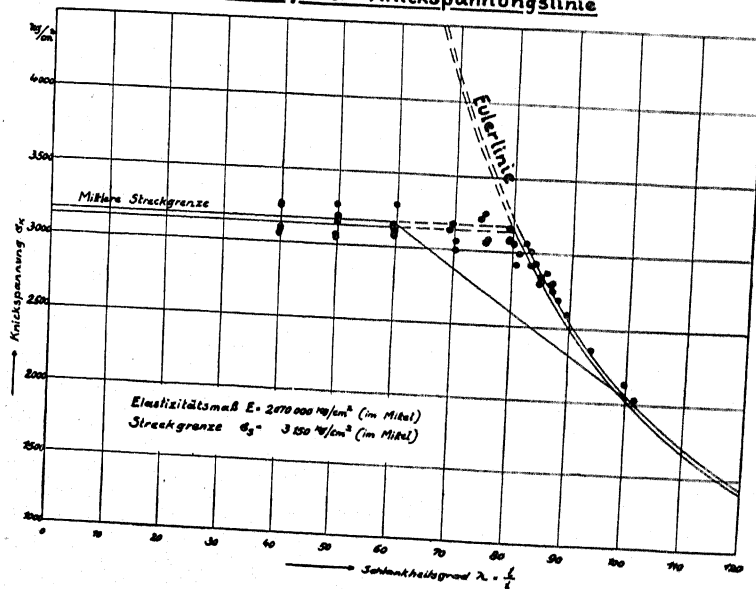


Abb. 5.

vorzüglich mit der Eulerlinie decken, daß hingegen unterhalb dieses Schlankheitsgrades die Beobachtungswerte einmünden in die Linie der Streckgrenze des Materials.

Wir glauben somit, unsere Ergebnisse für die geprüften Stahlsorten hinsichtlich der Knickfestigkeit wie folgt zusammenfassen zu können:

a) Die Eulerkurve gilt für den Bereich, in dem die Spannung, die dem Eulerwert entspricht, rein elastische oder vorwiegend elastische Verformungen hervorruft.

b) Die Knickspannung für den Fall des reinen Knickens bis zu etwa $\lambda \gtrsim$ als 30—40 ist nicht größer als die Quetschgrenze bzw. Streckgrenze des Materials.

c) Die Uebergangskurve von der Eulerlinie in die Gerade der Quetschgrenze hängt ab von den Formänderungseigenschaften des Materials zwischen Proportionalitäts- und Quetschgrenze. Sie nähert sich um so mehr dem Schnittpunkt der beiden Hauptkurven, je geringer die plastischen Verformungen im Material bei Spannungen kurz unterhalb der Quetschgrenze sind, um im günstigsten Falle, d. h. bei rein elastischer Verformung bis zur Quetschgrenze in den Schnittpunkt überzugehen.

d) Auch Stäbe mit Anfangskrümmungen können wie ein sonst gleicher gerader Stab im elastischen Bereich die Eulerlast erreichen, wenn man die Drucklast am richtigen Hebel wirken läßt.

In Abb. 5 ist noch eine Verbindungsgerade von der Streckgrenzenhorizontalen beim Schlankheitsgrade 60 zur Eulerkurve beim Schlankheitsgrade 105 gezogen. Es ist das die Knickspannungslinie, wie sie nach den Vorschriften der Deutschen Reichsbahn für den kritischen Uebergangsbereich zwischen den Schlankheiten 60 und 105 Geltung haben soll. Unsere Versuche haben bestätigt, daß die Knickspannungsberechnung nach dieser Vorschrift einen großen Sicherheitsgrad aufweist.

Die Spannungs-Dehnungslinie im plastischen Druckbereich und die Knickspannungslinie

Von W. Gehler, Dresden

(Hiezu Abb. 2 auf Tafel XII)

Die rechnerischen Grundlagen des Knickproblems verdanken wir bekanntlich EULER, ENGESSER und v. KÁRMÁN. Die versuchsmäßigen Erkenntnisse mit Körpern bauwerksmäßiger Abmessung waren seit TETMAJERS grundlegender Arbeit jahrzehntelang nicht nennenswert gefördert worden. Das planmäßige Schaffen unserer neuzeitlichen Versuchsanstalten im Verein mit den großen technischen Verbänden hat nun in den letzten beiden Jahren zu einem gewissen vorläufigen Abschluß geführt. Dabei handelte es sich um folgende drei Teil-Aufgaben:

I. Die unmittelbare Bestimmung der Knicklast, also der $\sigma_k - \lambda$ -Linie bei zentrischer Belastung

Wie wir soeben von Herrn MEMMLER gehört haben, darf diese Aufgabe dank der verdienstvollen Arbeiten des *Deutschen Eisenbau-Verbandes* (Herr REIN), des *Materialprüfungsamtes Berlin-Dahlem* (Herr MEMMLER und Herr PANZERBIETER) und des Herrn H. ZIMMERMANN als grundsätzlich gelöst angesehen werden.

II. Die gleiche Aufgabe bei exzentrischer Belastung

Hierzu wird uns Herr ROŠ anschließend einen wertvollen Beitrag liefern.

III. Die genaue versuchsmäßige Bestimmung der Spannungsdehnungslinie im plastischen Druckbereich als Grundlage der rechnerisch zu ermittelnden Knickspannungslinie nach Engesser-Kármán

Hierüber sollte ich u. a. in der kommenden Woche gelegentlich des *Internationalen Kongresses der Brückenbauer* hier in Zürich sprechen und zwar im Rahmen der «Ausbildung der neuen Brückenbaustähle». Um Ihnen jedoch heute ein möglichst geschlossenes Bild zu geben, sei über diese Arbeiten des *Dresdner Versuchs- und Materialprüfungsamtes* unter meiner Leitung und unter Mitwirkung von Dr. Ing. FINDEISEN und Dipl. Ing. GOLDAMMER hier ganz kurz berichtet. Sie sind ein kleiner Teilausschnitt aus unseren vierjährigen Versuchen zur Ausbildung des neuen deutschen Baustahles St. 48.

Die Aufgabe erscheint zunächst allerdings außerordentlich einfach. Ihre Lösung ist aber meines Wissens wohl hier zum ersten Male voll gelungen.

Die Spannungsdehnungslinien beider Baustoffe St. 37 und St. 48 unterscheiden sich bekanntlich hauptsächlich durch die verschiedene Höhenlage der Streckgrenze (Abb. 1). Unsere

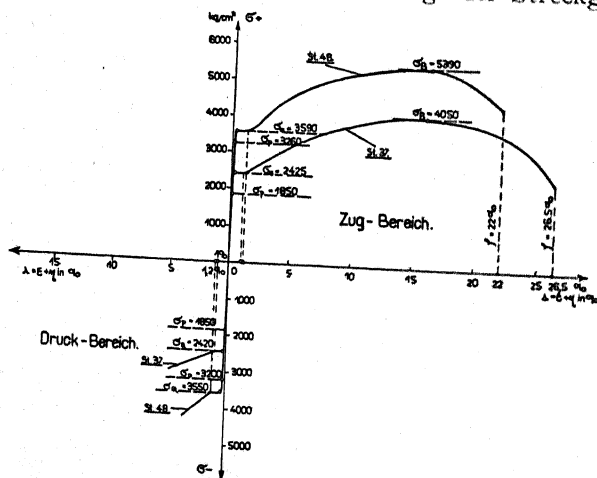


Abb. 1: Spannungsdehnungslinie für St. 37 und St. 48.

Aufgabe besteht nun in der genauen Ermittlung des verhältnismäßig kleinen Linienstückes zwischen der Proportionalitäts- und Quetschgrenze im Druckbereich.

Die Dehnungen wurden jeweils mit 4 MARTENS'schen Spiegeln verschiedener Meßlänge bestimmt (Abb. 2, Tafel XII). Als Grundgedanke wurde festgehalten, daß bei jeder Laststufe so lange gewartet wurde, bis sich ein Gleichgewichtszustand zwischen den äußeren Kräften und den inneren Spannungen selbsttätig eingestellt hatte. Die Schwierigkeit liegt hauptsächlich darin, daß man sich sehr vorsichtig mit äußerst kleiner Laststeigerung der Fließgrenze nähern muß. Die Dauer eines Versuches beträgt etwa 14 Stunden.

Die Ergebnisse mögen an der Hand unseres Bildes (Abb. 3) kurz folgendermaßen zusammengefaßt werden.

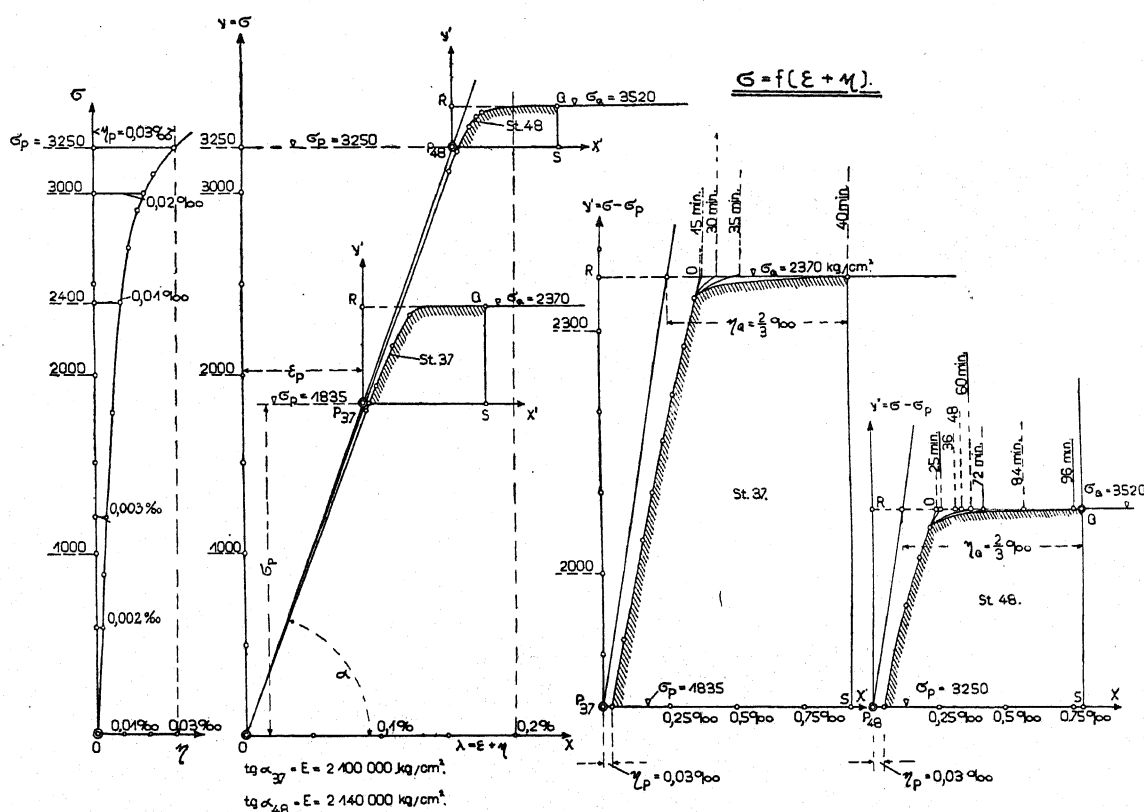


Abb. 3: Die Spannungsdehnungslinie für St. 37 und St. 48 im Druckbereich.

1. Die Proportionalgrenze, kurz P-Grenze genannt, ist durch die bleibende Dehnung von $0,03\%$, also rd. $\frac{1}{30}\%$ gekennzeichnet. Von Anfang des Versuches an ist eine gewisse, wenn auch sehr kleine bleibende Dehnung vorhanden, so daß die Hooke'sche Gerade genau genommen eine «Krumme» ist. Sobald aber die bleibende Dehnung η , wie ich sie bezeichne, diesen Wert $0,03\%$ erreicht hat, nimmt sie auffallend stark zu. Dieser Wert η ist der gleiche, bei der P-Grenze sowohl für St. 37 wie für St. 48. Er empfiehlt sich daher für die Begriffsfestsetzung der P-Grenze.

2. Im Gegensatz hierzu sind die elastischen Dehnungen ϵ an der P-Grenze beider Baustoffe naturgemäß sehr verschieden, nämlich $0,90$ und $1,52\%$. Der Grund hierfür liegt darin,

daß das Elastizitätsmaß für beide Baustoffe nahezu gleich groß ist, nämlich $E = 2,100,000$ kg/cm² bei St. 37 und $2,140,000$ kg/cm² bei St. 48. Die gesamten Dehnungen sind folglich:

$$\text{bei St. 37: } (\varepsilon + \eta) = 0,90 + 0,03 = 0,93 \text{ ‰}$$

$$\text{bei St. 48: } (\varepsilon + \eta) = 1,52 + 0,03 = 1,55 \text{ ‰}$$

(wofür vielfach $1,0 \text{ ‰}$ angenommen wird).

3. Dasselbe Spiel wiederholt sich nun merkwürdigerweise bei der *Quetschgrenze*, für die sich folgende Werte ergeben:

$$\text{bei St. 37: } (\varepsilon + \eta) = 1,15 + 0,67 = 1,82 \text{ ‰}$$

$$\text{bei St. 48: } (\varepsilon + \eta) = 1,66 + 0,67 = 2,33 \text{ ‰}$$

während vielfach $2,0$ oder $2,5 \text{ ‰}$ angenommen wird. Sowohl für St. 37 wie für St. 48 wurde durch diese äußerst genaue Messung als bleibende Dehnung an der Quetschgrenze genau der gleiche Wert, nämlich $0,67 = \frac{2}{3} \text{ ‰}$ gefunden.

4. Durch genaue Zeitbestimmungen ergaben sich auch die *Fließgeschwindigkeiten* während des Fließvorganges, deren Beachtung bei weiteren Versuchen neue Aufschlüsse erhoffen läßt.

Ist diese Spannungsdehnungslinie für irgend eine Eisensorte einmal gefunden, so ist der erste, nämlich der versuchstechnische Teil der Aufgabe erledigt. Als zweiter Teil bleibt nur noch die rechnerische Ermittlung der $\sigma_k - \lambda$ -Linie nach ENGESSER-KÄRMÄN. Hierbei entsteht aber noch eine kleine Schwierigkeit dadurch, daß der sogen. Knickmodul $T = E \cdot K$ bekanntlich von der Querschnittsform abhängt. Herr v. KÄRMÄN hat bereits 1910 darauf hingewiesen, daß diese Abhängigkeit von untergeordneter Bedeutung ist. Genaue Berechnungen von verschiedenen Walzprofilen führten nun zu folgendem Ergebnis (Abb. 4):

Darstellung der Knickbeiwerte κ der natürlichen

$$\text{Knickformel } P_k = \pi^2 \cdot \frac{J \cdot E \cdot \kappa}{l^2}$$

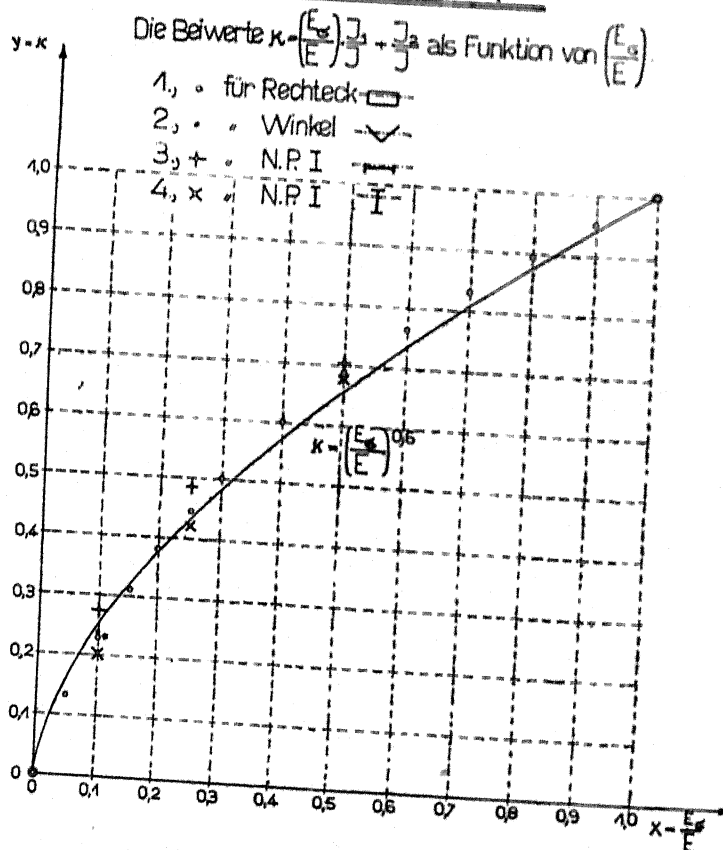


Abb. 4: Darstellung der Knickbeiwerte K der natürlichen Knickformel.

Trägt man als Ordinaten die Werte K auf und als Abscissen $(E_\sigma : E)$, wobei E_σ die erste Abgeleitete der Spannungsdehnungslinie ist, so kann man für die im Eisenbau vorkommenden Profile den Beiwert

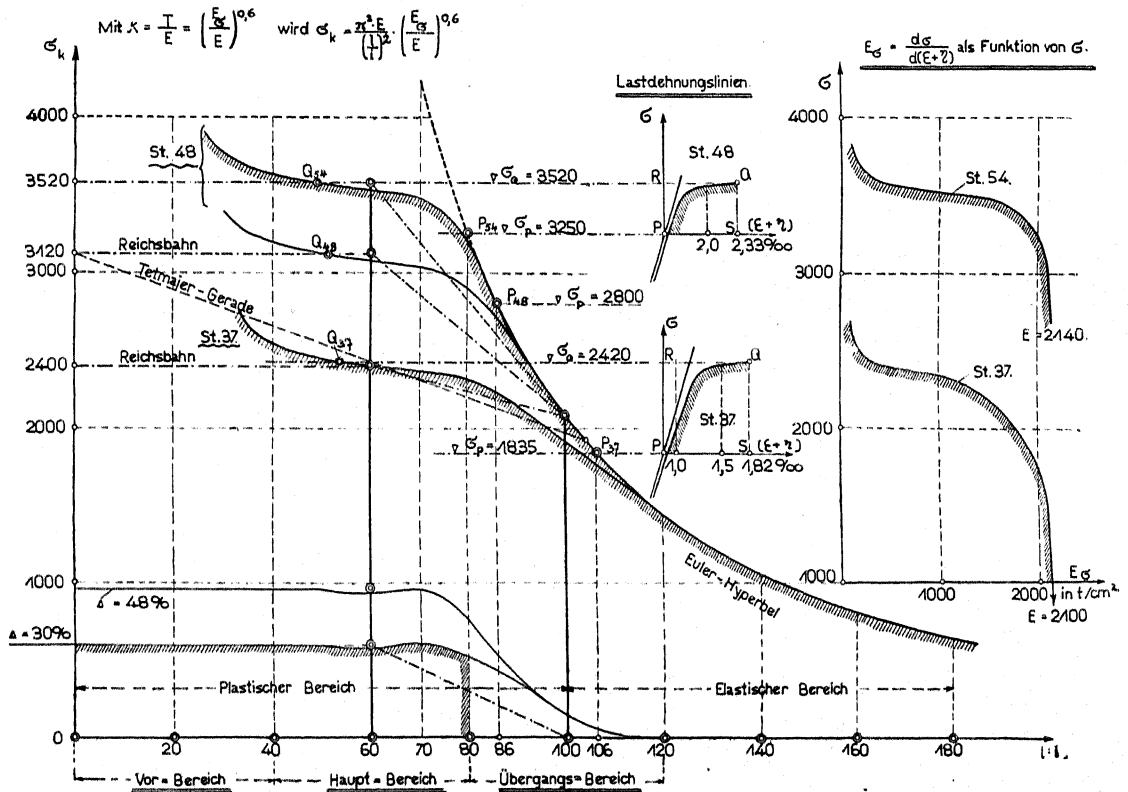
$$K = \left(\frac{E_\sigma}{E} \right)^{0,6}$$

setzen.

Dann ergibt sich die sogen. natürliche Knickformel als der einfache geschlossene Ausdruck:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E \mathcal{F}}{l^2} \cdot \left(\frac{E_\sigma}{E} \right)^{0,6}$$

Die Frucht unserer Arbeit sehen wir dann in der $\sigma_k - \lambda$ -Linie (Abb. 5). Aufgetragen sind zunächst die Euler-Hyperbel und die Tetmajer-Gerade, sodann drei Linien nach den



Reichsbahnvorschriften und zwar für St. 37, St. 48 und für den hier untersuchten Stahl mit 3520 kg/cm² Streckgrenze und endlich die von uns aus den gemessenen Spannungsdehnungslinien errechneten drei $\sigma_k - \lambda$ -Linien. Zu bemerken ist noch, daß die zur P -Grenze gehörenden Punkte jeweils auf der Euler-Hyperbel liegen, während die Punkte der Quetschgrenze mit Q bezeichnet sind.

Die Tetmajer-Gerade fällt hiernach ungefähr mit der von uns gefundenen $\sigma_k - \lambda$ -Linie für St. 37 zusammen, nicht aber etwa mit der für hochwertige Stähle. Die Erhöhung Δ der Werte σ_k bei St. 48 ist etwa 30 %/ gegenüber St. 37. Dies gilt aber nur für $0 < \lambda < 80$. Im Eulerbereich ist diese Erhöhung naturgemäß gleich Null, weil das Elastizitätsmaß für alle Eisensorten gleich groß ist.

Der praktische Wert dieses Verfahrens besteht darin, daß es für neue Baustähle genügt, die Lastdehnungslinie im plastischen Druckbereich genau zu bestimmen und daraus die $\sigma_k - \lambda$ -Linie rechnerisch zu finden.

Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl

Von M. Roš, Zürich
(Hiezu Abb. 11 auf Tafel XVII)

Die mangelnde Knicksicherheit von gedrückten Stäben aus Konstruktionsstählen ist für das Ingenieurwesen am verhängnisvollsten gewesen. Drei Viertel aller Einstürze im Eisenbrücken- und Eisenhochbau sind auf ungenügende Knicksicherheit zurückzuführen. Gedrückten Konstruktionsgliedern ist daher die allergrößte Sorgfalt bei deren Berechnung und konstruktiven Durchbildung zuzuwenden.

Insbesondere wird in der Praxis dem die Knicksicherheit vermindernden Einflusse des exzentrischen Kraftangriffes nicht immer die gebührende Beachtung zuteil.

In dieser Erkenntnis hat die T.K.V.S.B.¹⁾ an der Eidg. Materialprüfungsanstalt in Zürich, Versuche mit zentrisch und exzentrisch gedrückten flüßeisernen Stäben durchführen lassen. Die Ergebnisse der Versuche wurden denjenigen der Theorie gegenübergestellt. Die theoretischen Ableitungen für das Knicken bei zentrischem Kraftangriff lehnen sich auf das engste an die Untersuchungen von ENGESSER & KÁRMÁN²⁾ an, während diejenigen für die Knickvorgänge bei exzentrischem Kraftangriff nach dem T.K.V.S.B.-Verfahren von M. Roš und J. BRUNNER¹⁾ herrühren.

I. Theoretische Grundlagen

1. Knicken bei zentrischem Kraftangriff.

Dem Gedanken von ENGESSER-KÁRMÁN folgend, wurde die *Eulersche Knickformel* für zentrisch gedrückte Stäbe rechteckigen Querschnittes

$$P_k = \frac{\pi^2}{l^2} E \cdot \mathcal{I} \quad \dots \dots \dots (1)$$

in der verallgemeinerten Form

$$P_k = \frac{\pi^2}{l^2} T_k \cdot \mathcal{I} \quad \dots \dots \dots (2)$$

den vorliegenden Untersuchungen zugrunde gelegt. Der Elastizitätsmodul E wurde durch den Knickmodul T_k , welcher ganz vom σ - λ -Diagramm abhängig ist, ersetzt. (Abb. 1.)

$$\text{Der Knickmodul } T_k = \frac{4 \cdot T \cdot E}{(\sqrt{T} + \sqrt{E})^2}$$

ist ein Mittelwert zwischen den jeweiligen T -Werten und dem Elastizitätsmodul E . (Abb. 2.)

Die Abhängigkeit zwischen σ_k und T_k geht aus der Abb. 3 hervor.

Die Schwerpunkt-Knickspannung σ_k beträgt

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot T_k \cdot \frac{\mathcal{I}}{F} = \pi^2 \frac{T_k}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

¹⁾ M. Roš und J. BRUNNER, «Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl.» Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H. Zürich. Bericht der Gruppe VI der T. K. V. S. B. (Techn. Kommission des Verbandes Schweiz. Brücken- und Eisenhochbaufabriken) August 1926.

²⁾ TH. VON KÁRMÁN, «Untersuchungen über Knickfestigkeit». Mitteilungen über Forschungsarbeiten des Vereins Deutscher Ingenieure, Heft 81, Berlin 1910.

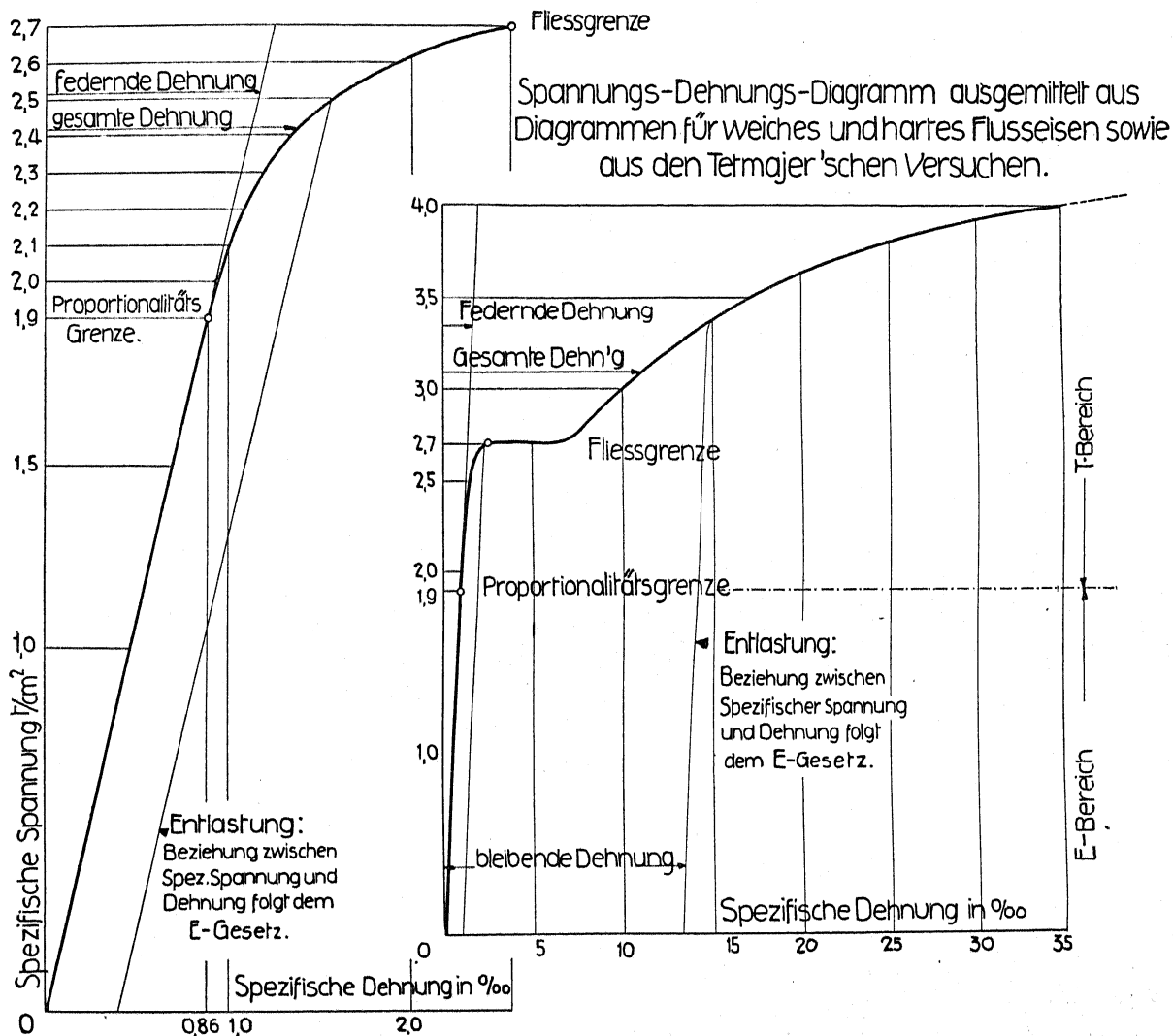


Abb. 1. Ideelles Druck-Stauchungs-Diagramm.

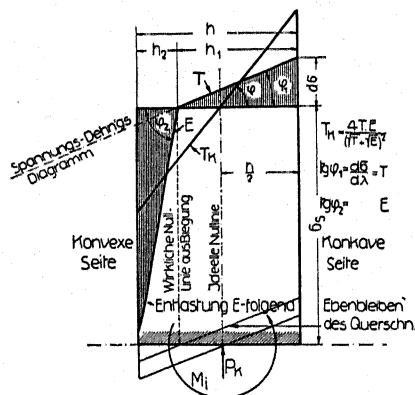


Abb. 2. Bestimmung des Moduls T_k für unendlich kleine Ausbiegungen.

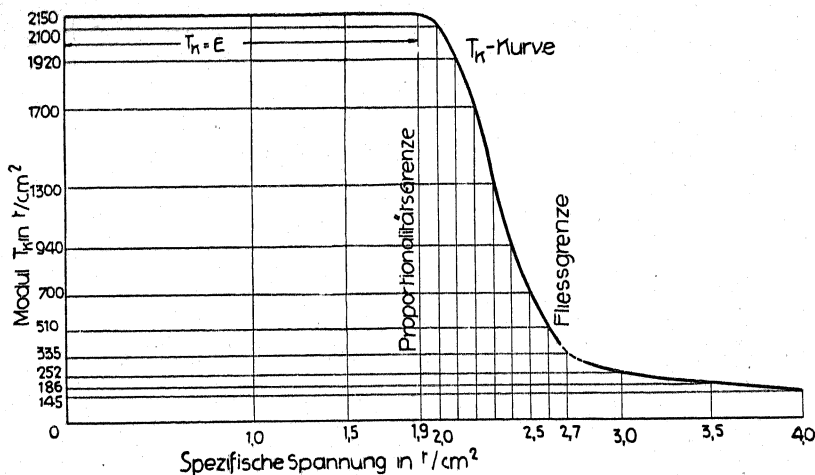


Abb. 3. Knickmodul T_k als Funktion der Spannung.

Die Beziehung (3) ermöglicht es, σ_k und T_k als Funktionen des Schlankheitsgrades $\frac{l}{i}$ darzustellen. (Abb. 4.)

Der Einfluß der Querschnittsform des Stabes für Rechteck-, I- und T-Querschnitt, auf die Knickspannung σ_k , geht aus der Abb. 5 hervor.

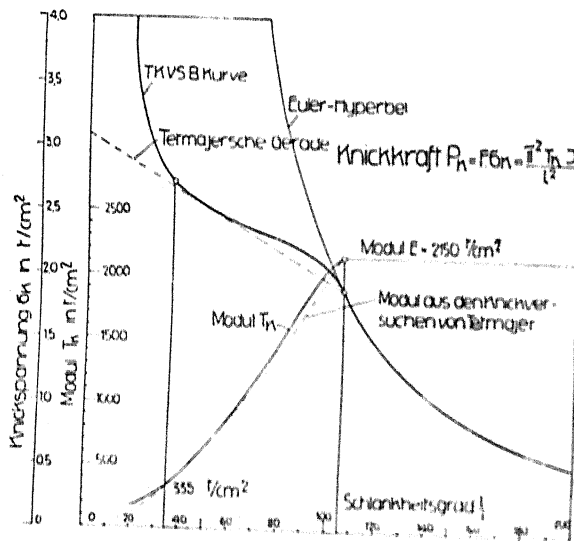


Abb. 4. Knickmodul T_k als Funktion des Schlankheitsgrades $\frac{l}{i}$

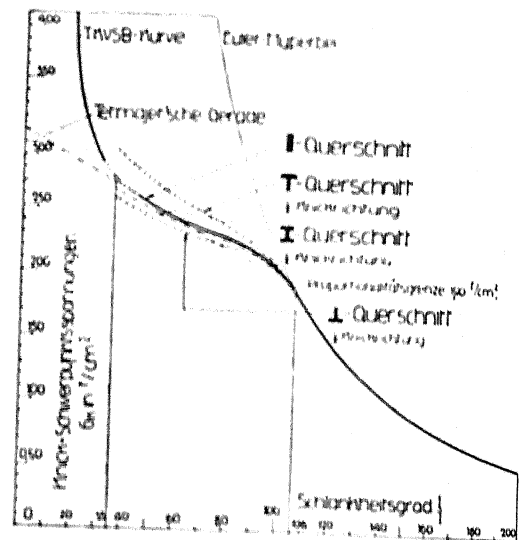


Abb. 5. Einfluss der Querschnittsform auf die Schwerpunkt-Knickspannung.

2. Knicken bei exzentrischem Kraftangriff.

Die Prüfung des Gleichgewichts zwischen dem Angriffsmoment der äußeren Kraft P und dem Moment der inneren, aufrichtenden Kräfte M_i im Knickquerschnitt erstreckt sich nicht mehr, wie beim zentrischen Knicken, auf den Zustand sehr kleiner, sondern bestimmter, endlicher Ausbiegungen des gedrückten Stabes.

Für eine bestimmte Grundspannung $\sigma_k = \frac{P_k}{F}$ wurde für verschiedene willkürlich ange-

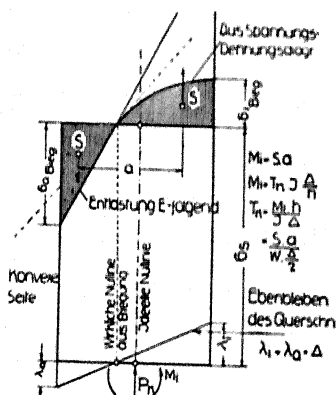


Abb. 6. Ableitung des Moduls T_k für endliche Ausbiegungen.

nommene endliche Werte der Summe der Randfaserdehnungen Δ an Hand des Druck-Stauchungs-Diagrammes das Moment M_i graphisch bestimmt und der T_k -Modul aus der Beziehung

$$T_k = \frac{M_i}{f} \cdot \frac{h}{\Delta}$$

berechnet. (Abb. 6.)

Die willkürliche Wahl von h beeinflusst die Größe der T_k -Werte nicht.

Auf Grundlage dieses Verfahrens wurden die Moduli T_k für verschiedene Grundspannungen σ_k als Funktionen der Summe der spezifischen Randfaserdehnungen Δ in ‰ berechnet.

Die so erhaltenen T_k -Werte sind auf der Abb. 7 graphisch zur Darstellung gebracht, woselbst auch die zugeordneten größten Randspannungen eingetragen sind.

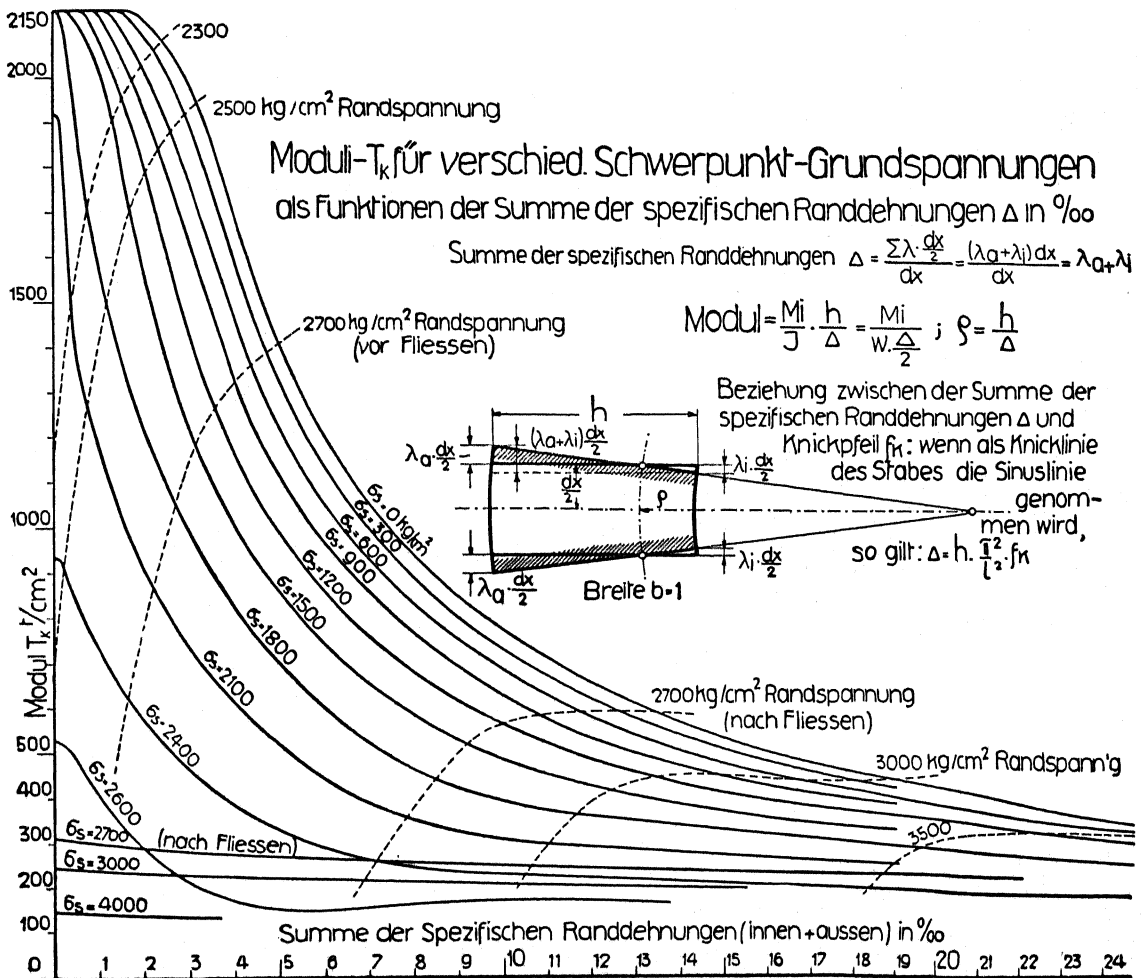


Abb. 7.

Der Krümmungsradius besitzt in Stabmitte (Zweig einer Sinuslinie durch eine ganze Sinuslinie ersetzt) den Wert

$$\rho = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{f} \quad (\text{Abb. 8})$$

und da

$$\rho = \frac{h}{\Delta} \text{ ist,}$$

folgt

$$f = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{\Delta}{h}$$

womit der Biegepfel f in Stabmitte mit der Summe der spezifischen Randfaserdehnungen in Beziehung gebracht ist.

Unter Zuhilfenahme der T_k -Moduli für eine bestimmte Grundspannung σ_x und entsprechend verschiedenen Werten der Summe der spezifischen Randfaserdehnungen Δ läßt sich

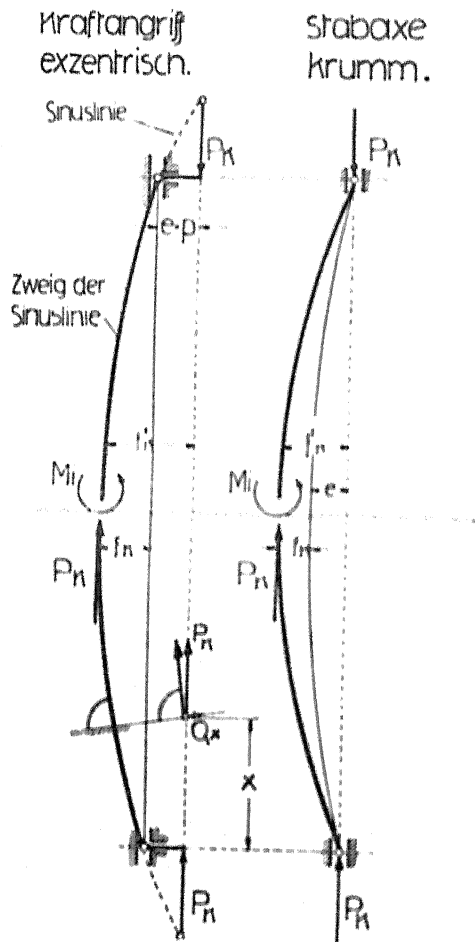


Abb. 8.

Exzentrisches Knicken und ursprünglich krummer Stab.

für eine willkürlich vorausgesetzte Höhe des rechteckigen Stabquerschnittes $F = h \cdot 1$ die Kurve der M_i -Werte aus der Beziehung

$$M_i = T_k \cdot \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta}{h}$$

aufzeichnen. (Abb. 9.)

Bestimmt man nun die Strahlen des Strahlenbüschels der Momente $M_a = P_k \cdot f = \sigma_k \cdot h \cdot 1 \cdot f$ für verschiedene Schlankheitsgrade $\frac{l}{i}$, wobei f durch die Summe der Randfaserdehnungen Δ aus der Beziehung $f = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{\Delta}{h}$ ausgedrückt wird, und zieht entsprechend dem

Strahlenbüschel an die M_i -Kurve Tangenten, so geben die so bestimmten Berührungspunkte die Gleichheit der Momente der äußeren exzentrisch wirkenden Kraft $P_k = \sigma_k \cdot h \cdot 1$

$$M_a = P_k \cdot (f + p)$$

und des *inneren aufrichtenden Momentes*

$$M_i = T_k \cdot \mathcal{F} \frac{\Delta}{h}$$

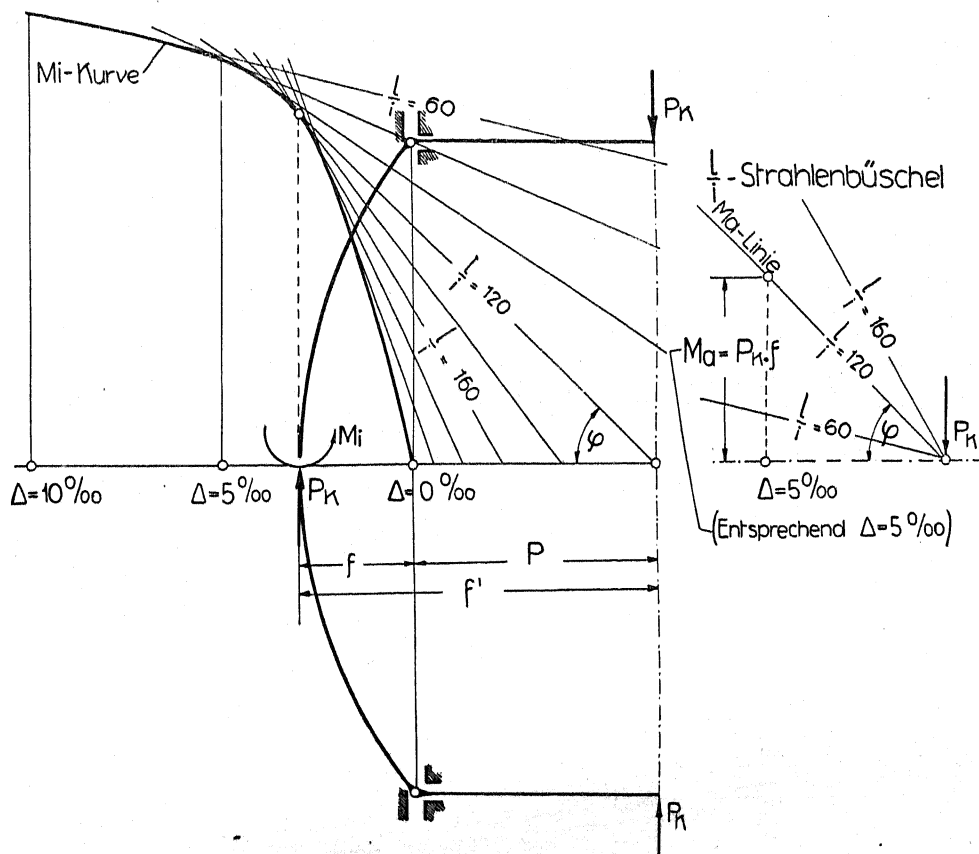
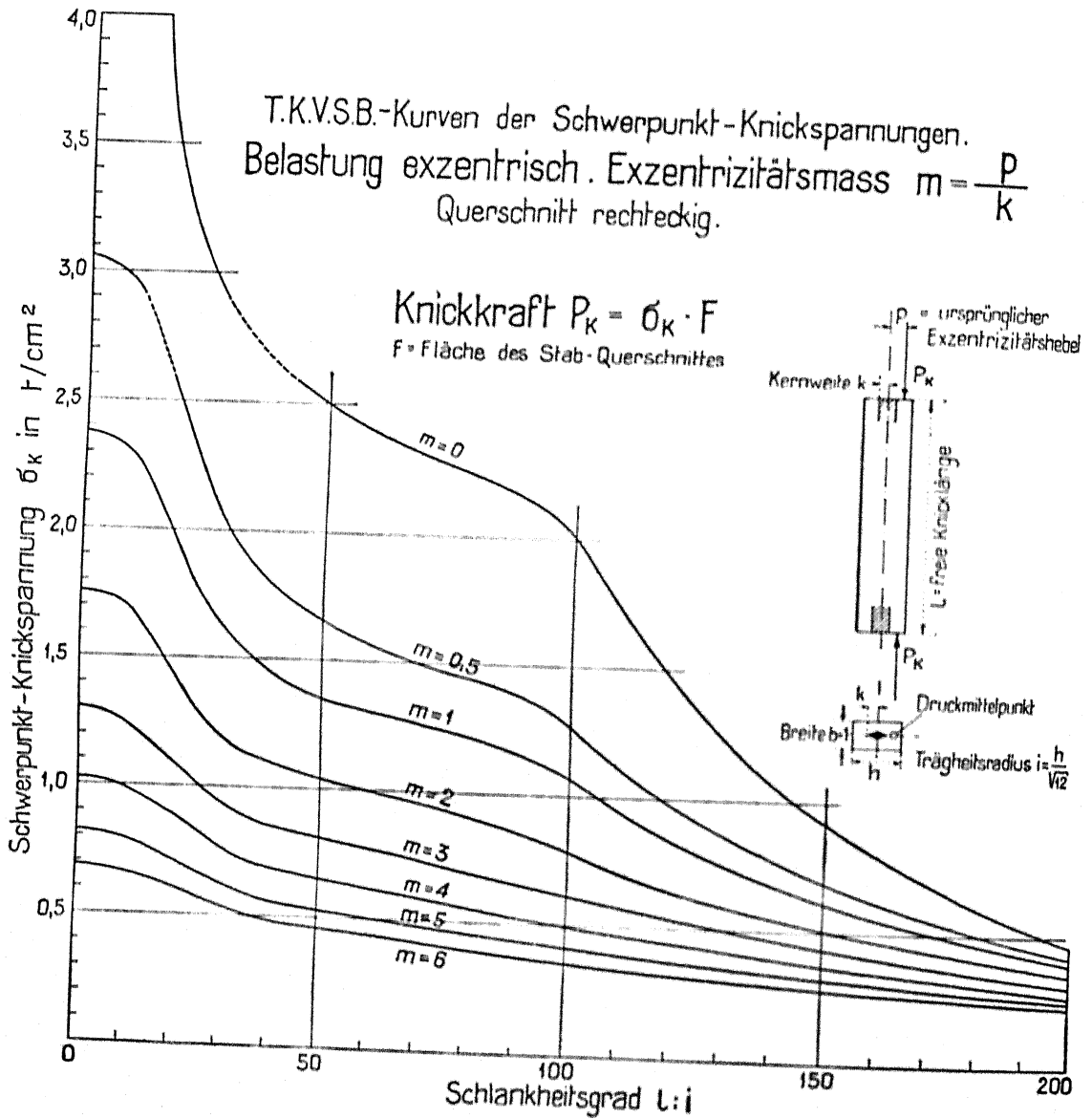


Abb. 9. Exzentrisches Knicken. M_a -Tangenten an die M_i -Kurve.

Die Kraft P_k entspricht somit der Knickkraft, welche am Hebelarm $f' = (p + f)$ des verbogenen Stabes wirkt. Die Exzentrizität des Kraftangriffes wird durch das Exzentrizitätsmaß $m = \frac{p}{k}$ ausgedrückt, worin p = ursprünglicher Exzentrizitätshebel am unverbogenen Stab und k = Kernweite des rechteckigen Stabquerschnittes ist.

Trägt man für verschiedene ins Auge gefaßte Grundspannungen σ_k und für die verschiedenen angenommenen Schlankheitsverhältnisse $\frac{l}{i}$ die entsprechenden Exzentrizitätsmaße m als Punkte in das Koordinatensystem $\frac{l}{i}$ (Abszisse) und σ_k (Ordinate) ein, so erhält man durch Verbindung der gleich großen m -Werte die jeweiligen m -Kurven, z. B. für $m = 0,5, 1, 2, 3, 4, 5$ und 6. So sind die T.K.V.S.B.-Kurven der Schwerpunkt-Knickspannungen für verschiedene

exzentrische Knickbelastungen als Funktion des Schlankheitsverhältnisses l/i entstanden. (Abb. 10.)



II. Versuche und Versuchsergebnisse

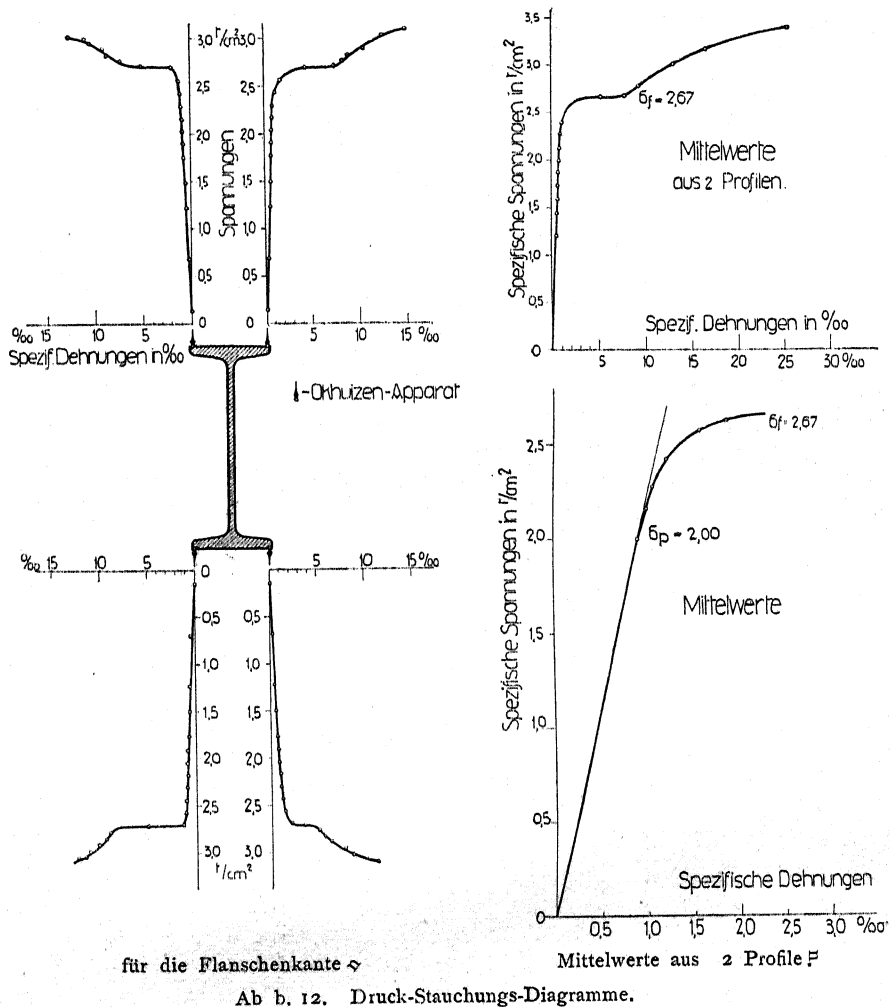
In der Amslerschen 500 Tonnen - Druckmaschine wurden 28 Knickversuche mit I NP 32 und I NP 22 durchgeführt. (Abb. 11, Tafel XVII.)

Das Material der untersuchten Knickstäbe war Thomasstahl von üblicher Handelsqualität, welches eingehend untersucht wurde.

Bei sämtlichen Knickversuchen wurden gemessen:
die örtlichen Dehnungen im Knickquerschnitt (Stabmitte) an den vier äußeren Kanten der Flansche, sowie an zwei Stellen im Steg,
die seitlichen Ausbiegungen in Stabmitte,

die Auflagerverschiebungen und die Neigungsänderung der Auflagerplatten.

Die festgestellte mittlere Proportionalitätsgrenze $\sigma_p = 2,00 \text{ t/cm}^2$ und die Quetschgrenze $\sigma_f = 2,67$, sowie der ganze Charakter des Druck-Stauchungs-Diagrammes (Abb. 12) stimmt



praktisch sehr gut mit dem den theoretischen Untersuchungen zugrunde gelegten σ - λ -Verlauf der Abb. 1 überein.

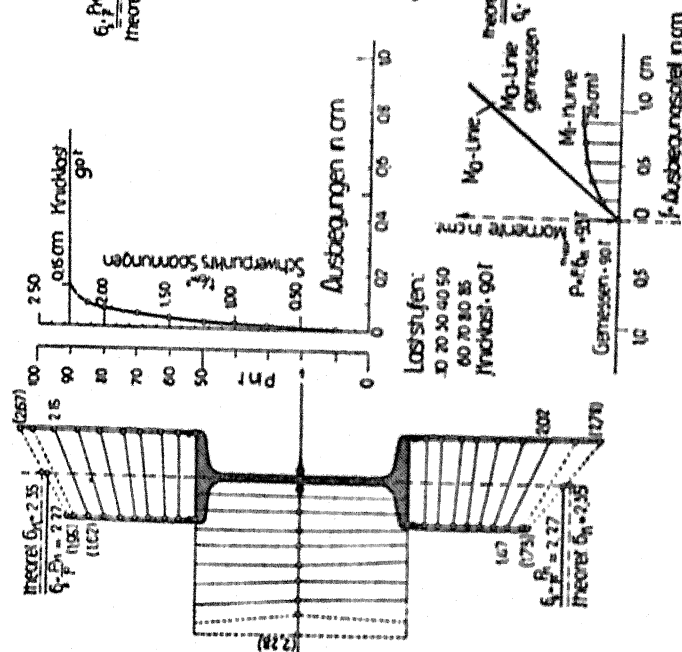
Die Ergebnisse der Versuche vom Schlankheitsgrad $\frac{l}{z} = 65$ und Exzentrizitätsmasse $m = 0, 1$ und 3 , sind in der Abb. 13 zusammengestellt.

Das Endergebnis der Knickversuche ist in Abb. 14 zur Darstellung gebracht.

III. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

1. Das Knickproblem wird, als *Gleichgewichtsproblem*, das sich nicht auf das Erreichen einer bestimmten Randfaserspannung zurückführen läßt, von einem einheitlichen Gedanken beherrscht.

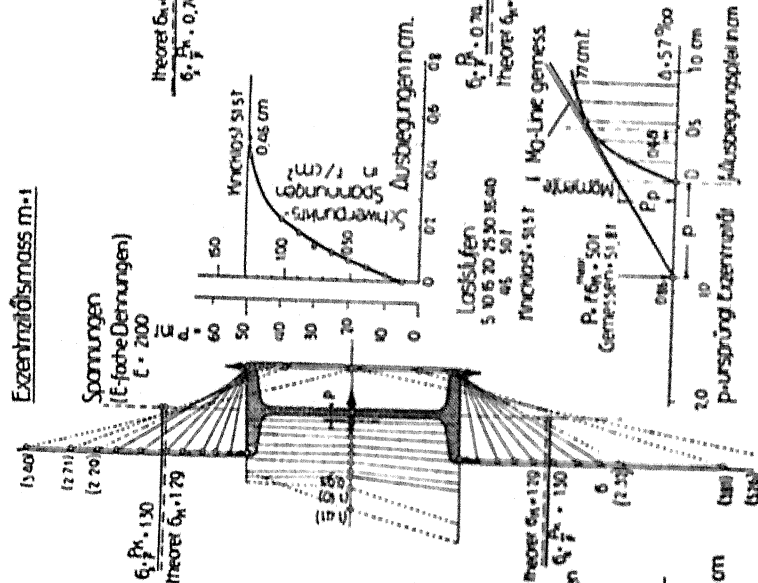
Exzentrizitätsmass $m=0$



Graphische Darstellung der Momente

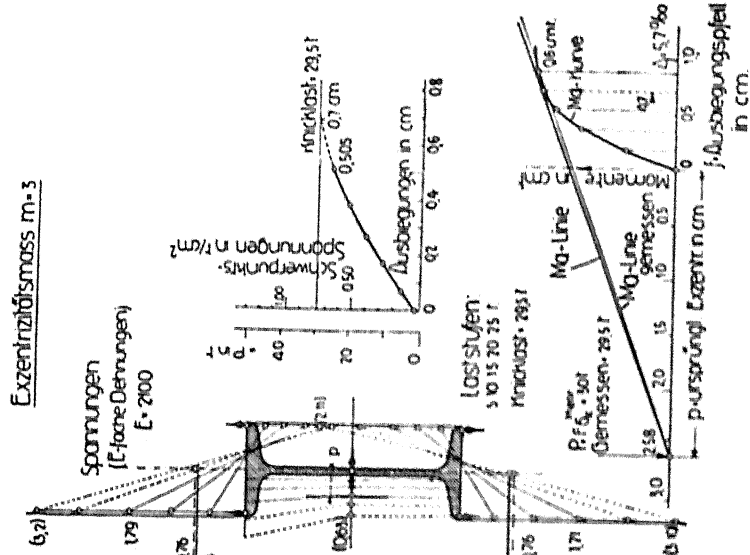
Abb. 1

Graphische Darstellung der Gleichgewichtsmomente



Graphische Darstellung der Momente

zung der gemessenen Spannungen (E-fachen Dehnungen) und der Ausbiegungen.



Graphische Darstellung der Momente

Graphische Darstellung der Gleichgewichtsmomente

2. Das T.K.V.S.B.-Verfahren für die Bestimmung der Tragkraft zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe besitzt allgemeine Gültigkeit und läßt sich auf Materialien verschiedenster Spannungs-Dehnungs-Diagramme ausdehnen.

3. Die Uebereinstimmung der Theorie und der Versuche ist, vom Standpunkte der Praxis aus, eine sehr gute. Die Abweichungen von $\pm 12\%$ liegen innerhalb des Streuungsgebietes der Festigkeitsqualität des Stahlmaterials selbst.

4. Die Exzentrizität des Kraftangriffes vermindert die Knicktragkraft bei gedrunenen und mittleren Stäben, $\frac{l}{z} < 100$, viel stärker als bei schlanken Stäben.

Der verhängnisvolle Einfluß des exzentrischen Kraftangriffes auf das Tragvermögen der Stäbe gelangt in deutlicher Weise zum Ausdruck. Im Kernrand gedrückte Stäbe ($m = 1$) tragen für Schlankheitsgrade von $\frac{l}{z}$ bis 100 rund die Hälfte (55 %) von zentrisch auf Druck beanspruchten Stäben ($m = 0$).

5. Mit wachsender Exzentrizität nimmt das Tragvermögen in vergleichsweise geringerem Maße ab als das Exzentrizitätsmaß selbst zunimmt.

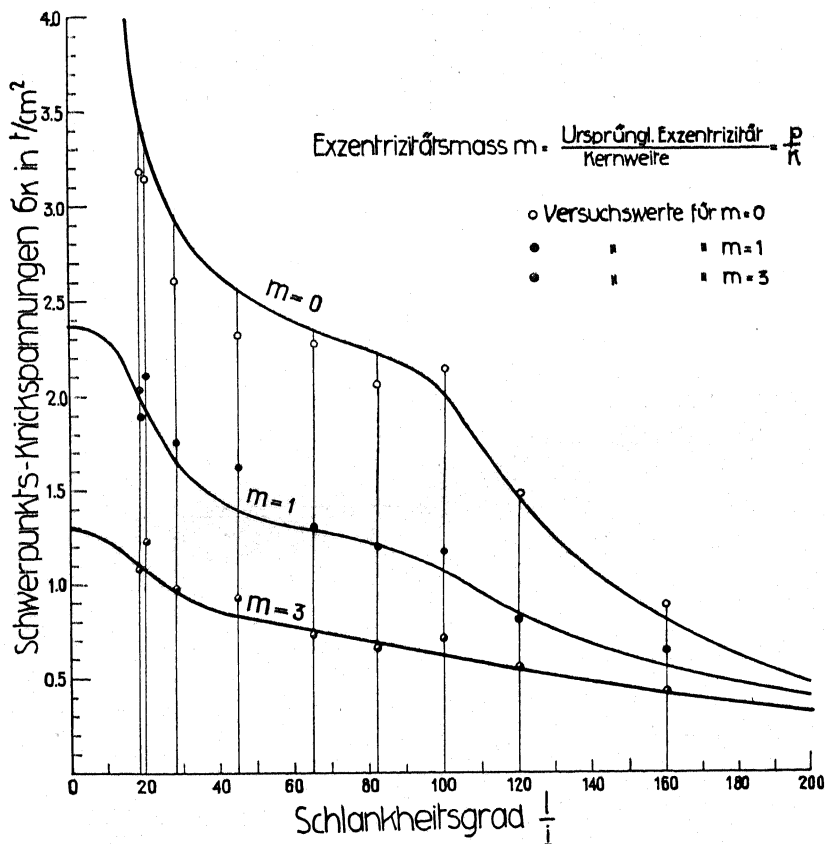


Abb. 14. T. K. V. S. B.-Kurven für exzentrische Belastungen, $m = 0, 1$ und 3 . Versuchsergebnisse E. M. P. A. 1926.

6. Da Exzentrizitäten des Kraftangriffes infolge geometrisch nicht absolut gerader Stabachsen (Richten), nicht ganz gleichmäßiger Gefügebesehaffenheit (Unhomogenität), praktisch unmöglicher, genauer Zentrierung des Kraftangriffes (Reibungen, Einspannungen) und bei Fach-

werkstäben infolge von *Nebenspannungen vernieteter Knotenpunktverbindungen*³⁾ nicht zu vermeiden sind, ist es gerechtfertigt, insbesondere mit Rücksicht auf die mögliche Größe der Nebenspannungen von 20 % der Grundspannungen, bei der Beurteilung der wirklichen Knicksicherheit mit einem *Exzentrizitätsmaße* $m = 0,25$, entsprechend dem Kraftangriff im Viertel der Kernweite, zu rechnen.

7. Bei mittelschlanken Stäben $\frac{l}{i} = 40$ bis 100 wird, im Gegensatz zu den andern Schlankheitsgraden, durch die Einspannungen der Stabenden die Knickfestigkeit nur wenig erhöht.

Geringe Nachgiebigkeiten der eingespannten Stabenden genügen bei wenig schlanken Stäben, um die Erhöhung der Tragkraft infolge der Einspannung zu verwirken. Da die Knotenbleche eiserner Fachwerke nachgewiesenermaßen sich verformen³⁾ ⁴⁾ und bei Ueberschreitung der Proportionalitäts- bzw. Fließgrenze die Nebenspannungen infolge steifer Knotenverbindungen rasch abnehmen und nicht mehr mit den Hauptspannungen proportional wachsen, ist es logisch, für nicht S-förmig verbogene, auf Druck beanspruchte Fachwerkstäbe (in der Regel Gurtungen) bei der Berechnung der Knicksicherheit die ganze theoretische Stablänge und nicht die 0,8-fache als Knicklänge zugrunde zu legen.

8. Für Konstruktionsstähle, deren Druck-Stauchungs-Diagramme höhere oder niedrigere Quetschgrenzen aufweisen als das ideale, der theoretischen Untersuchung zugrunde gelegte Diagramm, sind die σ_k -Werte der T.K.V.S.B.-Kurven sinngemäß im Verhältnis der entsprechenden Werte der Quetschgrenzen zu erhöhen oder zu erniedrigen (Annäherungsverfahren).

9. Der einheitliche, sich auf die wirklichen Festigkeitseigenschaften des jeweiligen Konstruktionsmaterials aufbauende Gedanke, welcher dem T.K.V.S.B.-Verfahren zugrunde liegt, ermöglicht, das Verfahren auszudehnen auf:

- a) die Beurteilung der Gefahr des Ausknickens in der zur Kräftebene winkelrechten Richtung, wenn der Kraftangriff in einer der Hauptachsen exzentrisch erfolgt,
- b) die Bestimmung der Tragkraft bei nach beiden Achsen exzentrisch gedrückten Stäben,
- c) die Ermittlung der Knick-Querkraft $Q_{max} = P_k \cdot f_k \cdot \frac{\pi}{l}$ und damit die Bemessung der Verbindungen von gegliederten Knickstäben (Vergitterungen, Bindebleche),
- d) die Beurteilung des Einflusses einer unveränderlichen Querbelastrung auf die Knicksicherheit eines gedrückten Stabes,
- e) die uneingeschränkte Anwendung des Verfahrens von VIANELLO,
- f) die Ermittlung von Durchbiegungen von auf Biegung beanspruchten Balken ohne und mit Achsialdruck bei Beanspruchungen über die Proportionalitätsgrenze.

³⁾ M. Roš, «Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunkte eiserner Fachwerkbrücken». Bericht der Gruppe V der T. K. V. S. B. Juni 1922 und «Schweizerische Ingenieurbauten in Theorie und Praxis», September 1926.

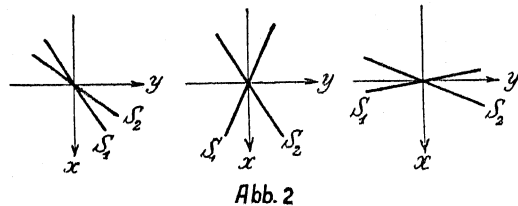
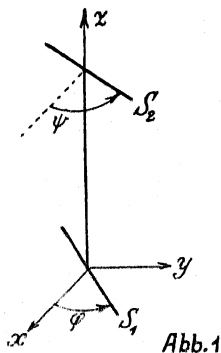
⁴⁾ Th. Wyss, «Beitrag zur Spannungsuntersuchung an Knotenblechen eiserner Fachwerke». Mitteilg. über Forschungsarbeiten des Vereins deutscher Ingenieure, Heft No. 262, 1923.

Ueber die Knickung von Stäben mit Schneidenlagerung*)

Von P. Fillunger, Wien

Man pflegt in sehr anschaulicher Weise von «Spitzenlagerung» oder «Einspannung» zu sprechen, wenn man gewisse Randbedingungen eines auf Knickung beanspruchten Stabes bezeichnen will. Sie führen zu den geläufigen einfachen Knickformeln, erschöpfen jedoch die ganze Mannigfaltigkeit der möglichen *unelastischen* Stabbefestigungen nicht. Ist zum Beispiel ein Fachwerksstab durch ein Knotenblech festgehalten, so kann sich das betreffende Stabende parallel zur Ebene des Knotenbleches nicht, senkrecht zu dieser Ebene aber sehr leicht drehen. Ähnliche Verhältnisse können auftreten, wenn ein Stab an einen andern mit sehr großer Biegesteifigkeit und geringer Verdrehungssteifigkeit angeschlossen ist. Eine solche Befestigung möge im Grenzfall, wenn das Stabende in einer Ebene sich ohne Widerstand, in einer hiezu senkrechten Ebene hingegen gar nicht drehen kann, als «Schneidenlagerung» bezeichnet werden.

Zunächst sei vorausgesetzt, daß beide Enden des Stabes in Schneiden gelagert seien, welche senkrecht zur unverzerrten Stabachse stehen mögen. Ihre Lage ist ferner bestimmt



durch die Winkel φ und ψ (Abb. 1), wobei x die Richtung des größten, y die des kleinsten Trägheitshalbmessers, z die Richtung der Stabachse vor der Ausbiegung angibt. Es genügt

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi, \psi \leq +\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \psi > \varphi$$

anzunehmen, letzteres deshalb, weil bei isotropem Material Spiegelbilder gleichwertig sind. Dann sind noch drei verschiedene Lagen der beiden Schneiden S_1 und S_2 möglich, je nachdem beide Schneiden in den gleichen Quadranten oder in verschiedenen liegen und zwar so, daß entweder die x -Achse oder die y -Achse im kleineren Winkel zwischen den Schneiden zu liegen kommt (Abb. 2).

Die Gestalt der elastischen Linie wird durch jene zu S_1 beziehungsweise S_2 senkrechten Ebenen E_1 beziehungsweise E_2 bestimmt, in welchen die Drehung der betreffenden Stabenden bei der Ausbiegung erfolgen muß. Abb. 3 zeigt dies für die erste der oben genannten Schneidenlagen im Grundriß. Die elastische Linie kann sowohl eine rechtsgewundene als auch eine linksgewundene Raumkurve sein (I und II).

Um die statischen Gleichgewichtsbedingungen des ausknickenden Stabes zu erkennen, betrachte man die Gestalt der elastischen Linie etwa in einer zu E_1 parallelen, zur z -Achse

*) Siehe auch Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 6^{ter} 1926, S. 294 u. ff

geneigten Richtung, wie Abb. 4 dies andeutet. An der Schneide S_1 muß ein Einspannmoment $\pm D_1$ auftreten, je nachdem I oder II entsteht. Dieses erfordert aber ein Kräftepaar $\pm K_1 l = D_1$ zur Erhaltung des Gleichgewichts in der Einspannebene der Schneide S_1 . Aus gleichen Gründen muß in der durch S_2 und die z -Achse gelegten Ebene ein Einspannmoment D_2 und ein Kräftepaar $K_2 l = D_2$ vorhanden sein. Auf jeden Querschnitt des gebogenen Stabes wirken daher von oben und zwar mit dem Angriffspunkt im oberen Stabende $z = l$ folgende Kräfte

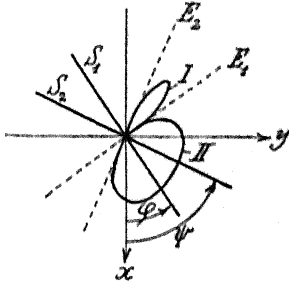


Abb. 3

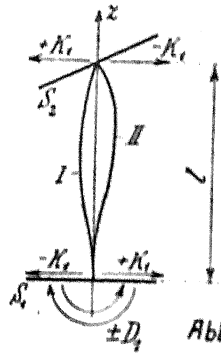


Abb. 4

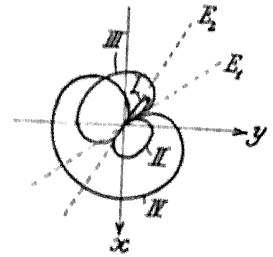


Abb. 5

und Momente: die Last P nach abwärts; ein Verdrehungsmoment M als unbekannte Auflagerreaktion, denn eine Schneide kann ein solches Moment übertragen; ferner in den beiden durch die Schnitten und die z -Achse gelegten Ebenen die Auflagerreaktionen $\pm K_1$, $D_2 = K_2 l$ und K_2 .

Um die Komponenten des Momentes in einem Querschnitt z angeben zu können, braucht man die Richtungskosinus eines «beweglichen» Dreikantes a, b, t gegen den gleichsinnigen «festen» Dreikant x, y, z . Beschränkt man sich auf unendlich kleine Formänderungen und bedeuten x, y die Ausbiegung, f den Verdrehungswinkel, x', y', f', x'', y'' Ableitungen nach z , so sind jene Richtungskosinus durch das Schema

	x	y	z
a	1	f	$-x'$
b	$-f$	1	$-y'$
t	x'	y'	1

gegeben und man erhält die Komponenten des Momentes nach den Richtungen a, b, t mit Unterdrückung aller Produkte von x, y, f, x', y' in der Form

$$G = \pm K_1 (1 - z) (\sin \varphi - f \cos \varphi) - K_2 z (\sin \psi - f \cos \psi) - Mx' + Py$$

$$G' = \pm K_1 (1 - z) (-\cos \varphi - f \sin \varphi) + K_2 z (\cos \psi + f \sin \psi) - My' - Px$$

$$H = \pm K_1 [(1 - z) (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi) + x \sin \varphi - y \cos \varphi]$$

$$+ K_2 [-z (x' \sin \psi - y' \cos \psi) + x \sin \psi - y \cos \psi] + M.$$

K_1, K_2 und M müssen sehr klein sein. Wären sie es nicht, so könnte man nämlich gewisse Glieder streichen und es wären G, G', H und auch die Querkraft von der Last P unabhängig und daher gleich Null, wenn der Stab für $P = 0$ spannungslos war. Sind jedoch K_1, K_2 und M sehr klein, so kann man die obigen Ausdrücke vereinfachen und man erhält aus

$$G = \pm K_1 (1 - z) \sin \varphi - K_2 z \sin \psi + Py$$

$$G' = \mp K_1 (1 - z) \cos \varphi + K_2 z \cos \psi - Px$$

$$H = M$$

und den üblichen Näherungs-Beziehungen der Biegetheorie

$$-y'' = G/B, \quad x'' = G'/A, \quad f' = H/C,$$

worin A und $B \leq A$ die Biegesteifigkeiten, C die Verdrehungssteifigkeit des Stabes bedeuten, die einfachen Differentialgleichungen des Problems.

Man erkennt zunächst leicht, daß der Verdrehungswinkel f eine lineare Funktion von z sein muß. Folglich tritt überhaupt keine Verdrehung ein, denn f muß sowohl für $z = 0$ als auch für $z = l$ verschwinden. Die Randbedingungen für x und y lauten:

$$x = y = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und } z = l;$$

überdies muß wegen der Schneiden

$$\begin{array}{ll} \text{in } z = 0 & x' \cos \varphi + y' \sin \varphi = 0 \\ \text{und in } z = l & x' \cos \psi + y' \sin \psi = 0 \end{array}$$

sein. Diesen sechs homogenen Randbedingungen stehen als Unbekannte vier Integrationskonstante und die beiden Kräfte K_1 und K_2 gegenüber. Daher wird die Knickbedingung durch eine verschwindende Determinante 6. Grades gebildet, welche sich leicht nach einem der beiden Winkel φ oder ψ auflösen läßt. Durch Interpolation kann dann für jeden beliebigen Querschnitt und beliebige Lage der Schneiden die Knicklast gefunden werden.

Aus den Ergebnissen seien nur die folgenden hervorgehoben:

Die in Abb. 3 dargestellten Kurven I und II entsprechen der *ersten* und *zweiten* Knicklast. Die höheren Knicklasten führen abwechselnd zu rechts- und linksgewundenen Kurven, wobei der Winkel, mit welchem sie die z -Achse umgeben, jedesmal um 180° steigt (Abb. 5).

Für besondere Werte von φ und ψ und von $A : B$ wird die Ausbiegung in der Richtung x *unabhängig* von der Ausbiegung in der Richtung y . Das heißt mit anderen Worten: Das Zusammentreffen von zwei gleich großen Knickgefahren in den Hauptrichtungen erhöht die Gesamtknickgefahr nicht. Bei Stäben, deren Querschnitts-Trägheitsellipse ein Kreis ist und deren Schneiden zu einander senkrecht stehen, lautet die kleinste Knicklast

$$P = 20.19 \frac{A}{l^2}$$

und gilt als *erste* und *zweite* Knicklast. Sind die beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnittes von einander nicht allzu sehr verschieden, so wird die Knicklast am größten, wenn die Schneiden zu einander senkrecht stehen und unter 45° zu den Hauptträgheitsachsen. Im Falle der Ausartung $\lim (B : A) = 0$ wirkt eine Schneide wie eine volle Einspannung, wenn sie nicht mit der großen Achse der Zentralellipse zusammenfällt. Praktisches Interesse kann der Fall eines *gleichschenkeligen* Winkelleisens beanspruchen, wenn beide Schneiden zu einander parallel und auch parallel zu einem der Schenkel des Winkelleisens sind. Die Knicklast kann dann geschrieben werden

$$P = 0.87 \pi^2 \frac{EI_{45}}{l^2}$$

wenn I_{45} das Querschnittsträgheitsmoment bezüglich einer Achse bedeutet, welche unter 45° gegen die Hauptträgheitsachsen liegt.

Ist nur ein Stabende statt beiden in Schneidenlagerung, das andere in Spitzenlagerung, so ändert sich an den allgemeinen Betrachtungen nur wenig. Es entfällt dann eine Auflagerreaktion und eine Randbedingung, z. B. K_2 und $x' \cos \psi + y' \sin \psi = 0$, so daß die Knickbedingung durch das Verschwinden einer Determinante 5. Grades gegeben ist. Ist aber ein

Stabende in Schneidenlagerung, das andere vollkommen eingespannt, so tritt zu den Auflagerreaktionen K_1 und K_2 noch ein *zusätzliches* Einspannmoment P in der durch die Schneide und z gelegten Ebene hinzu und an die Stelle einer Schneidenbedingung, z. B. $x' \cos \psi + y' \sin \psi = 0$, tritt $x' = 0$ und $y' = 0$ am vollkommen eingespannten Stabende. Demnach ist die Knickbedingung durch eine Determinante 7. Grades dargestellt. Auch in diesen beiden Fällen kommt es beim Ausknicken nicht zu einer Drillung des Stabes.

Wenn schließlich auch noch Schneiden betrachtet werden, welche mit der Stabachse einen *beliebigen* Winkel einschließen, so muß das anschließende Stabende sich auf der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels bewegen, dessen Achse die Schneide ist. Nun kommt es aber bei der Frage nach der Knicklast nur auf unendlich kleine Ausbiegungen an. Für diese kann der Kegelmantel durch eine seiner Tangentialebenen vertreten werden, welche dann dieselbe Rolle spielt wie die Bewegungsebene E_1 beziehungsweise E_2 im Falle einer zur Stabachse *senkrechten* Schneide. *Daher bleiben alle vorangehenden Untersuchungen und Formeln vollkommen gültig, wenn unter φ und ψ die Winkel verstanden werden, welche die Projektion der Schneiden in die x - y -Ebene mit der x -Achse einschließen.*

Man kann auch zeigen, daß die Knickbedingung für solche geneigte Schneiden, wie es sein muß, *stetig* in die Knickbedingung für vollkommene Einspannung übergeführt werden kann, wenn der Winkel zwischen Schneide und Stabachse, er sei mit χ bezeichnet, gegen Null konvergiert.

Wenn man nämlich die Randbedingung für geneigte Schneiden mit Berücksichtigung aller Glieder bis zur *zweiten* Kleinheitsordnung anschreibt, so lautet sie

$$x' \cos \varphi + x' \sin \varphi = 1/2 \epsilon g \chi (x'^2 + y'^2).$$

Man erkennt, daß hierfür $x' \cos \varphi + y' \sin \varphi = 0$ geschrieben werden darf, wenn χ endlich ist. Ist aber χ von gleicher Größenordnung wie x'^2 , beziehungsweise y'^2 , so kann sie, weil die linke Seite jedenfalls sehr klein sein muß, durch $x'^2 + y'^2 = 0$, das heißt durch $x' = 0$ und $y' = 0$ ersetzt werden. Man kann daraus schließen, daß der Einfluß der Schneideneigung erst bei sehr kleinen Winkeln χ , welche praktisch kaum in Frage kommen dürften, fühlbar werden kann.

Au sujet des pulsations critiques de torsion et de flexion

Par Ch. Platrier, Paris

Dans un travail paru dans le Journal de l'Ecole Polytechnique (1925, page 93) j'ai étudié le problème suivant qui est une généralisation du problème fondamental de CAUCHY sur l'existence des solutions des équations différentielles, savoir:

Trouver dans un domaine donné une solution d'une équation intégrodifférentielle linéaire telle qu'il existe entre cette solution et ses dérivés en *divers points* du domaine des relations linéaires distinctes.

Après avoir introduit, suivant une méthode bien connue, un paramètre λ dans l'équation de FREDHOLM à laquelle j'ai ramené la question, on peut conclure immédiatement que, sous certaines conditions de continuité des fonctions entrant dans l'équation intégrodifférentielle, il est en général possible de trouver une solution et une seule; qu'au contraire si une déterminante $D(\lambda)$ de FREDHOLM est nulle les valeurs de λ sont critiques, la solution devenant infiniment grande ou autrement dit cessant en général d'exister.

Je me propose d'indiquer ici quelques conséquences physiques des résultats précédents appliqués aux problèmes de tension et de flexion des tiges.

Dans ces problèmes le paramètre λ s'introduit naturellement et a une signification physique $\lambda = \frac{1}{T^2}$ carré des pulsations de torsion et de flexion quand les efforts de torsion et de flexion, considérés comme fonction du temps t sont sinusoïdaux, elliptiques ou hyperboliques.

Dans cette communication brève nous nous limiterons à des cas très simples en renvoyant pour plus de détails aux travaux suivants:

VAN DEN DUNGEN { Cours de Technique des Vibrations, Université libre de Bruxelles, Fascicule I (1926).
Compte-rendus de l'Académie des sciences de Paris, Tome 178 page 1685 (1924)

CHARLES PLATRIER { Journal de l'Ecole Polytechnique. Sur une application industrielle de la théorie des Equations intégrales linéaires (1925).
Comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris, Tome 178, page 1685 (1926).

I. — Pulsations critiques de torsion des arbres de transmission

Considérons un arbre de transmission de longueur L admettant un axe de symétrie Ox et appelons tranche infiniment petite de cet arbre la portion comprise entre deux sections normales à Ox et infiniment voisines.

Sur chaque tranche infiniment petite nous supposons que s'exercent des forces extérieures réductibles à un couple infiniment petit d'axe Ox et servant uniquement à tordre l'arbre.

Tous ces couples sont sinusoïdaux, de pulsation commune $\frac{1}{T}$, de même phase qu'il est loisible de choisir nulle, mais d'amplitude variable avec la tranche considérée.

Soit $c(x, t) dx$ le couple extérieur qui s'exerce à l'instant t sur la tranche comprise entre les sections x et $x + dx$ et soit $\theta(x, t)$ l'angle dont tourne la section d'abscisse x autour de Ox à l'instant t par rapport à des axes fixes.

Dans l'arbre soumis à l'action des couples extérieures se développent des tensions intérieures. Nous les supposons telles que, pour la section choisie x les éléments situés du côté choisi pour origine $x = 0$ de l'arbre exercent sur les éléments situés du côté de l'extrémité $x = L$ un ensemble de tensions réductibles à un couple d'axe Ox

$$\gamma(x, t) = -K(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}$$

dit couple de torsion en x à l'instant t ; $K(x)$ est un coefficient de torsion qui dépend de la nature du métal composant la section et de la forme de cette section.

Appliquons à la tranche $x, x + dx$, le théorème des moments cinétiques par rapport à Ox après avoir convenu de désigner par $I(x) dx$ son inertie par rapport à Ox et avoir posé:

$$c(x, t) = g(x) \sin \frac{t}{T}, \quad \theta(x, t) = \alpha(x) \sin \frac{t}{T}$$

nous obtenons la relation différentielle:

$$\frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{d\alpha}{dx} \right) + \frac{I(x)}{T^2} \alpha + g(x) = 0$$

Mais $\alpha(x)$ doit être tel qu'aux extrémités de l'arbre $x = 0, x = L$, une condition, dite condition à l'extrémité, soit satisfaite. On dira:

1. Qu'à une extrémité la torsion est libre, si cette condition est que le couple $\gamma(x, t)$ soit constamment nul en cette extrémité, c'est-à-dire $\frac{d\alpha}{dx} = 0$ en cette extrémité.

2. Qu'il existe un encastrement parfait à la torsion en une extrémité si $\theta(x, t)$ est constamment nul en cette extrémité, c'est-à-dire $\alpha = 0$ en cette extrémité.

Trois cas pourront donc se présenter:

Premier cas. — Aux deux extrémités, la torsion est libre; c'est le cas le plus fréquent dans la pratique,

$$\alpha'(0) = \alpha'(L) = 0$$

Deuxième cas. — Aux deux extrémités, il existe un encastrement parfait de torsion

$$\alpha(0) = \alpha(L) = 0$$

Troisième cas. — A une extrémité, il existe un encastrement parfait de torsion et à l'autre la torsion est libre,

$$\alpha(0) = \alpha'(L) = 0 \text{ ou } \alpha'(0) = \alpha(L) = 0$$

Dans ces hypothèses j'ai conclu, en appliquant les résultats du problème généralisé de CAUCHY qu'il existe toujours une valeur critique du carré $\lambda = \frac{1}{T^2}$ de la pulsation de torsion, c'est-à-dire des pulsations correspondantes dites — pulsations critiques elliptiques ou résonances de torsion et les valeurs critiques de $\frac{1}{T^2}$ sont les zéros d'une fonction entière en $\frac{1}{T^2}$ à zéros tous réels, simples et positifs.

Dans l'hypothèse tout à fait particulière où l'arbre est homogène (K, i constants) ces valeurs critiques sont par exemple: dans les premier et deuxième cas:

$$\lambda = \frac{1}{T^2} = \frac{K}{i} n^2 \pi^2 \quad (n \text{ entier})$$

dans le troisième cas:

$$\lambda = \frac{1}{T^2} = \frac{K}{i} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \quad (n \text{ entier})$$

J'ai d'ailleurs établi des tableaux de calcul qui permettent de déterminer les $\lambda = \frac{1}{T^2}$ critiques avec une approximation aussi grande que désirée dans les cas plus complexes (Journal de l'Ecole Polytechnique 1925).

Il est remarquable que si dans tous les calculs précédents on remplace les sinus elliptiques par des sinus hyperboliques on ne trouve plus aucune valeur réelle critique de $\frac{1}{T}$ car la transformation revient à remplacer T^2 par $(-T^2)$. Nous traduirons ce fait en disant qu'il n'existe pas de pulsations critiques hyperboliques de torsion.

II. — Pulsations critiques de flexion d'un pylône comprimé

Soit un pylône de grande hauteur L tel un pylône de télégraphie sans fil assimilable à une tige mince comprimée. Supposons-le en état d'équilibre élastique sous l'action des haubans par exemple; supposons en outre qu'un vent exerce sur lui une pression unitaire horizontale $W = V(z) \sin \frac{t}{T}$ vent sinusoïdal elliptique ou $W = V(z) \operatorname{sh} \frac{t}{T}$ rafale sinusoïdale hyperbolique (T constante, t variable temps). Proposons-nous de déterminer la déformation horizontale supplémentaire $x(z, t)$ qui en résulte pour la tige dans les hypothèses habituelles de la résistance des matériaux, notamment en négligeant les termes en $\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2$. Soient $\Theta(z)$ la compression de la fibre, E le module d'élasticité, ρ la masse linéaire unitaire du pylône, I le moment d'inertie de flexion de sa section. L'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Theta \frac{\partial x}{\partial z} \right) + \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = W \quad \dots \dots \dots (1)$$

exprime le théorème du mouvement du centre de gravité suivant l'horizontale Ox de l'élément dz de cote z . Il en faut trouver une solution $x(z, t)$ telle que (quel que soit t)

$$x(0, t) = 0 \quad \frac{\partial^2 x(0, t)}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 x(L, t)}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 x(L, t)}{\partial z^3} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

si on suppose par exemple qu'à la base origine le pylône peut osciller autour d'une horizontale, cas fréquent.

Cherchons à satisfaire à (1) par

$$x(z, t) = \alpha(z) \sin \frac{t}{T} \quad \text{ou} \quad x(z, t) = \alpha(z) \operatorname{sh} \frac{t}{T} \quad \dots \dots \dots (3)$$

d'où

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(EI \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\Theta \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) + \alpha \frac{\rho}{I^2} = V \quad \dots \dots \dots (4)$$

limitons-nous à l'exemple suffisant pour nombre d'applications industrielles où E , I , Θ , ρ sont des constantes et $V = vx + v_0$ (v et v_0 constants).

Dans le cas de la rafale sinusoidale hyperbolique,

$$\alpha(s) = Ae^{\theta s} + Be^{-\theta s} + C \cos \varphi s + D \sin \varphi s - \frac{V^2}{\rho} (v s + v_0) \quad \dots \dots (5)$$

($\pm \theta$) et ($\pm i \varphi$) étant les quatre racines de l'équation en s .

$$EI s^4 + \Theta s^2 - \frac{\rho}{I^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

Dans le cas de la rafale sinusoidal hyperbolique,

$$\alpha(s) = Ae^{\theta s} \cos \varphi s + Be^{\theta s} \sin \varphi s + Ce^{-\theta s} \cos \varphi s + De^{-\theta s} \sin \varphi s - \frac{V^2}{\rho} (v s + v_0) \quad (5a)$$

($\pm \theta \pm i \varphi$) étant les quatre racines de l'équation en s

$$EI s^4 + \Theta s^2 - \frac{\rho}{I^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (6a)$$

Dans les deux cas $ABCD$ sont des constantes à déterminer par les conditions (2) où l'on remplace x par α . Quand le déterminant $D(I)$ des coefficients de ces constantes est nul, celles-ci deviennent infinies, donc $x(s, t)$, c'est-à-dire qu'il n'est plus loisible de supposer infiniment petite la déformation du pylône dont la charge de travail devient considérable. Le vent sinusoidal elliptique ou la rafale sinusoidale hyperbolique sont alors dits critiques pour la flexion du pylône.

Or dans les hypothèses (2), les $D(I)$ peuvent s'écrire:

$$\left. \begin{aligned} \frac{th \theta L}{\theta} - \frac{tang \varphi L}{\varphi} & \quad (\text{vent sinusoidal elliptique}). \\ \frac{sh 2 \theta L}{\theta} - \frac{\sin 2 \varphi L}{\varphi} & \quad (\text{rafale sinusoidale hyperbolique}). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Il en résulte d'après (6) que u et v designant deux variables réelles, les valeurs critiques $\lambda = \frac{1}{T^2}$ des pulsations de flexion sont définies par les relations:

Vent sinusoidal elliptique	Rafale sinusoidale hyperbolique
$\frac{th u}{u} = \frac{tang v}{v}$	$\frac{\sin u}{u} = \frac{\sin v}{v}$
$v^2 - u^2 = \frac{\Theta L^2}{EI}$	$u^2 + v^2 = \frac{2 \Theta L^2}{EI}$
$\lambda = \frac{EI}{\rho L^4} u^2 v^2$	$\lambda = \frac{EI}{\rho L^4} (u^2 - v^2)^2$

Nous concluons alors que pour un pylône de longueur donnée à section et compression constante du type étudié ci-dessus, il existe toujours des vents critiques sinusoidaux elliptiques

en nombre infini et des rafales critiques sinusoïdales hyperboliques en nombre fini si la compression est suffisante.

Ce dernier phénomène est particulièrement intéressant à signaler; il met en évidence un nouveau genre de résonance à la flexion; une rafale $V(z) \operatorname{sh} \frac{t}{T}$ dont l'amplitude $V(z)$ est faible, mais de pulsation critique, peut en agissant un temps très court produire une déformation considérable du pylône suffisamment comprimé.

Signalons en terminant que des conséquences de même nature que les résonances elliptiques de torsion et les résonances elliptiques et hyperboliques de flexion doivent se rencontrer analytiquement dans l'étude de tous les phénomènes vibratoires elliptiques et hyperboliques en particulier dans l'étude des circuits électriques oscillants.

Il serait en particulier intéressant de procéder à des expériences d'électricité de nature à mettre en évidence la résonance hyperbolique qui constitue un phénomène sur lequel l'attention des physiciens n'a peut-être pas été encore appelée.

Ueber die Berechnung der Einbeulung des gleichmäßig gedrückten Kreisringes

Von K. Federhofer, Graz

Bedeutet p die Außenpressung auf die Längeneinheit eines Ringes, dessen Halbmesser im gedrückten Zustande a ist, B die Biegesteifigkeit für die zur Ringebene senkrechte Querschnittsschwerachse, dann tritt die Verbiegung (Einbeulung) des Ringes in seiner Ebene ein, wenn die Pressung den kritischen Wert

$$p_k = \frac{3B}{a^3}$$

überschreitet und es ist die Krümmung K der ebenen Kurve, in die sich der Ring verbiegt, nach M. LÉVY¹⁾ gegeben durch

$$K = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2} pr^2 + \text{Konst.} \right) \dots \dots \dots (1)$$

wenn r die Entfernung eines beliebigen Punktes P des Ringes vom Kreismittelpunkte O ist. Die strenge Integration von (1), die sehr weitläufige Rechnungen erfordert, wurde von G. HALPHEN²⁾ mit Hilfe von elliptischen Funktionen geleistet.

Für praktische Zwecke verlangt man in erster Linie die Größe jener Einbeulung zu kennen, die sich bei *kleiner* Überschreitung des ersten kritischen Druckes einstellt. Wenn es sich nur um die Berechnung der *Größe* des kritischen Druckes handelt, genügt es bekanntlich, die elastischen Grundgleichungen in jener vereinfachten Form anzusetzen, die bei Beschränkung auf die kleinen Glieder 1. Ordnung in den Deformationsgrößen entsteht³⁾. Da diese Grundgleichungen homogen sind, so bleibt dabei die beim Knicken des Ringes auftretende Formänderung unbestimmt. Unter der Voraussetzung einer kleinen Überschreitung des 1. kritischen Druckes läßt sich aber eine verhältnismäßig einfache Näherungsrechnung angeben, die zu einer bequemen Formel für die bei der Verbiegung entstehenden Verschiebungen führt und hier mitgeteilt werden soll.

1. Gleichungen des Gleichgewichtes

Wird der Ring als «dünn» im Sinne der mathematischen Elastizitätstheorie betrachtet, so gelten für ein Bogenelement ds der deformierten Ringachse, da als äußere Kräfte nur die Normaldrucke p des Ringes in Betracht kommen, folgende Gleichgewichtsgleichungen⁴⁾:

$$\frac{dN}{ds} + Tk + p = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{dT}{ds} - Nk = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{dG'}{ds} + N = 0 \dots \dots \dots (4)$$

¹⁾ Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1884) t. 10, p. 5—43.

²⁾ Comptes rendus Ac. Sc. (1884) t. 98, p. 422—425.

³⁾ J. BOUSSINESQ, Comptes rendus Ac. Sc. (1883) t. 97, p. 843—844.

⁴⁾ A. E. H. LOVE, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe, Verlag Teubner, 1907; p. 456.

Hierin ist G' das Spannungsmoment, für welches gilt:

$$G' = B \left(K - \frac{1}{a} \right) \dots \dots \dots (5)$$

N , T bedeuten die Schub- und Längskraft an der Stelle S des Ringes. Aus den Gleichungen (2) und (3) wird durch Entfernung von T die Beziehung gewonnen

$$\frac{d^2 N}{ds^2} + K^2 N - \frac{1}{K} \frac{dK}{ds} \left(p + \frac{dN}{ds} \right) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Da zufolge (4) und (5): $N = -B \frac{dK}{ds}$, so muß gemäß (6) die Krümmung K der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d^3 K}{ds^3} + \left(K^2 + \frac{p}{BK} \right) \frac{dK}{ds} = \frac{1}{K} \frac{dK}{ds} \cdot \frac{d^2 K}{ds^2} {}^5) \dots \dots \dots (I)$$

⁵⁾ Aus (I) läßt sich durch eine einfache Umformung die natürliche Gleichung der elastischen Linie in differentieller Form darstellen.

Führt man anstatt des Bogens s den Winkel ϑ (Abb. 1) als unabhängig Veränderliche gemäß $K ds = d\vartheta$ ein, so geht (I) über in

$$\left(\frac{d^3}{d\vartheta^3} + \frac{d}{d\vartheta} \right) (K^2) - \frac{2p}{B} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{K} \right) = 0$$

woraus durch einmalige Integration mit a_1 als Integrationskonstante folgt

$$\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2} + 1 \right) (K^2) - \frac{2p}{B} \left(\frac{1}{K} \right) = a_1 {}^6) \dots \dots \dots (a)$$

Setzen wir nun $\frac{d}{d\vartheta} (K^2) = z$, so entsteht aus (a):

$$z \frac{dz}{dK} + 2 K^3 - \frac{4p}{B} = 2 a_1 K$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt mit einer neuen Integrationskonstanten a_2 :

$$z = 2 K \frac{dK}{d\vartheta} = \pm \sqrt{2 \left(a_2 + a_1 K^2 + \frac{4p}{B} K - \frac{K^4}{2} \right)}$$

oder wegen $K ds = d\vartheta$:

$$ds = \pm \frac{\sqrt{2} \cdot dK}{\sqrt{a_2 + a_1 K^2 + \frac{4p}{B} K - \frac{K^4}{2}}} \dots \dots \dots (b)$$

Dies ist die natürliche Gleichung der elastischen Linie in Differentialform. Mit Benutzung der elliptischen Funktionen in der Bezeichnung von WEIERSTRASS lautet daher die endliche Gleichung

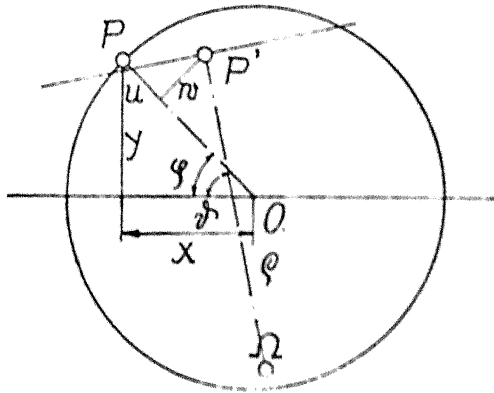
$$K = \frac{\wp' \left(\frac{sz}{2} \right) - \wp' v}{\wp \left(\frac{sz}{2} \right) - \wp v} \dots \dots \dots (c)$$

worin $\wp v = \frac{a_1}{3}$, $\wp' v = -\frac{2p}{B}$ und z die imaginäre Einheit ist.

Die Gleichung (c) kann nun als Grundlage für die strenge Untersuchung der möglichen Einbeulungsformen dienen. Die Integrationskonstanten sind festgelegt durch die Bedingungen, daß der Ring geschlossen bleibe und seine Länge nicht ändere.

⁶⁾ Diese Gleichung findet sich bereits als Sonderfall der allgemeinen Differentialgleichung für die Krümmung K bei beliebiger tangentialer und radialer Belastung in meiner Arbeit: „Zur strengen Theorie der Bogenträger.“ Österr. Wochenschrift f. öff. Baudienst, 1911, Heft 33 u. 34.

Diese Grundgleichung für die Krümmung des deformierten Ringes ist nun in eine Gleichung für die Verschiebungen überzuführen.



2. Es bezeichne u die radiale, zum Kreismittelpunkte positive Verschiebung, w die in der Kreistangente im Sinne wachsender Bogenlänge s positive Verschiebung, dann haben wir die Krümmung K durch diese wegen der Kleinheit von u, w ebenfalls kleinen Werte u, w einschließlich der Glieder höherer als 1. Ordnung auszudrücken, wobei noch u, w der Bedingung der Dehnungslosigkeit genügen müssen. Der Punkt P (Abb. 1) gelangt infolge der Einbeulung nach P' mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= (a - u) \cos \varphi - w \sin \varphi \\ y &= (a - u) \sin \varphi + w \cos \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Hiemit wird

$$\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = (a - u + w')^2 + (w + u')^2$$

Die strenge Bedingung der Dehnungslosigkeit lautet daher, da $ds = a d\varphi$ sein soll:

$$0 = (w' - u) + \frac{1}{2a} \left[(w + u')^2 + (w' - u)^2 \right] \quad (8)$$

Aus der Formel

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{x' y'' - x'' y'}{a^3}$$

errechnet sich mit Benutzung der Gleichungen (7) und deren Ableitungen

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} + \frac{w' + u''}{a^2} + \frac{1}{a^3} \left[(w' - u)(w' + u'') - (w + u')(w'' - u') \right] \quad (9)$$

oder

$$K = \frac{1}{a} + \theta(\varphi) \quad (10)$$

womit die Krümmung der elastischen Linie streng durch die Verschiebungen u, w und ihre Ableitungen ausgedrückt ist. Da die elastische Linie des Ringes bei kleiner Ueberschreitung des 1. kritischen Druckes eine angenähert elliptische Gestalt hat, also jedenfalls $K \neq 0$ wird, so kann die Grundgleichung (1) mit Hilfe von (10) in die folgende für θ übergeführt werden:

⁷⁾ Dieser Ausdruck könnte auf umständlicherem Wege auch aus den Formeln in den §§ 289, 290 und 253 des umstehend genannten Lehrbuches v. Love gewonnen werden.

$$\theta^{\text{III}} + \left(1 + \frac{p a^3}{B}\right) \theta^{\text{I}} = a (\theta^{\text{I}} \theta^{\text{II}} - \theta \theta^{\text{III}}) - a \theta \theta^{\text{I}} (3 + 3 a \theta + a^2 \theta^2) = \Omega(\varphi) \quad \dots \quad (11)$$

Vernachlässigt man die kleinen Glieder höherer als I. Ordnung, d. h. wird $\Omega(\varphi) = 0$ gesetzt, und beobachtet man, daß dann gemäß (8) und (9):

$$u = w^{\text{I}} \\ \theta = \frac{w^{\text{I}} + w^{\text{III}}}{a^2}$$

wird, so lautet die vereinfachte Gleichung (11) mit $n^2 = 1 + \frac{p a^3}{B}$:

$$w^{\text{VI}} + (1 + n^2) w^{\text{IV}} + n^2 w^{\text{II}} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (12)$$

Da der Ring geschlossen bleiben soll, so muß w eine periodische Funktion von φ mit der Periode 2π sein; daraus folgt, daß n eine ganze Zahl ist. Das kleinste n ergibt sich mit $n = 2$ ($n = 1$ führt zur deformationslosen Verschiebung des Ringes), der zugehörige kritische Druck

beträgt also $p_k = \frac{3B}{a^3}$. Bei Beachtung der Grenzbedingungen

$$w(0) = w\left(\frac{\pi}{2}\right) = w^{\text{II}}(0) = w^{\text{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ergibt sich für die Verschiebung:

$$w = c \sin 2\varphi \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (12)$$

Der Wert von C bleibt, da Gl. (12) homogen ist, unbestimmt.

3. Näherungsverfahren zur Bestimmung von C

In 1. Näherung ist $u = w^{\text{I}} = 2c \cos 2\varphi$, womit man aus (8) den verbesserten Wert

$$u = w^{\text{I}} + \frac{9c^2}{2a} \sin^2 2\varphi \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (13)$$

gewinnt. Mit Hilfe der Näherungswerte (12) und (13) können nun die in (9) vorkommenden kleinen Glieder höherer als 1. Ordnung berücksichtigt werden. Streichen wir dabei die Glieder von höherer als III. Ordnung, so bleibt

$$K = \frac{1}{a} + \frac{w^{\text{I}} + w^{\text{III}}}{a^2} + \frac{36c^2}{a^4} \cos 4\varphi - \frac{27c^3}{2a^4} \sin 4\varphi \sin 2\varphi \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (14)$$

Hiemit wird Gleichung (11) übergeführt in die gegenüber (12) verbesserte Gleichung für w :

$$w^{\text{VI}} + \left(2 + \frac{p a^3}{B}\right) w^{\text{IV}} + \left(1 + \frac{p a^3}{B}\right) w^{\text{II}} = 6804 \frac{c^3}{a^2} \sin 2\varphi - 1620 \frac{c^2}{a} \sin 4\varphi - 972 \frac{c^3}{a^3} \sin 6\varphi \quad (15)$$

wobei in allen Korrektionsgliedern, die n enthalten, hierfür genau genug der Wert 4 gesetzt wurde. (n ist, da $p > p_k$ vorausgesetzt ist, etwas größer als 4.)

Die Gleichung (15) läßt sich durch den Ansatz

$$w = c \sin 2\varphi + c_1 \sin 4\varphi + c_2 \sin 6\varphi \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (16)$$

integrieren, der die früher angegebenen Grenzbedingungen befriedigt. Die Eintragung dieses Ansatzes in (15) und Umformung des Gliedes linker Hand liefert:

$$c \left(\frac{p}{p_k} - 1 \right) \sin 2\varphi - 80 c_1 \sin 4\varphi - 1120 c_2 \sin 6\varphi = 189 \frac{c^3}{a^2} \sin 2\varphi - 45 \frac{c^2}{a} \sin 4\varphi - 27 \frac{c^3}{a^2} \sin 6\varphi$$

⁸⁾ Eine andere Ableitung dieser Gleichung habe ich mitgeteilt in: Eisenbau, Jahrg. 12, p. 291.

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $\sin 2\varphi$ ergibt sich für das gesuchte c der Wert

$$c = \frac{a}{\sqrt{189}} \sqrt{\frac{p}{p_k} - 1} = 0.073 a \sqrt{\frac{p}{p_k} - 1} \quad \dots \quad (17)$$

Die weitere Koeffizientenvergleichung führt zur Kenntnis der Verbesserungen c_1 und c_2 ; man erhält

$$c_1 = \frac{45}{80} \frac{c^2}{a} = 0.563 \left(\frac{c}{a}\right) \cdot c,$$

$$c_2 = \frac{27}{1120} \frac{c^3}{a^2} = 0.024 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot c.$$

Die gesuchte Lösung für die tangentielle Verschiebung w lautet daher:

$$w = c \left[\sin 2\varphi + 0.563 \left(\frac{c}{a}\right) \sin 4\varphi + 0.024 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sin 6\varphi \right] \quad \dots \quad (18)$$

Für die radiale Verschiebung u ergibt sich hiemit gemäß (13):

$$u = \frac{9c^2}{4a} + 2c \cos 2\varphi + \left(4c_1 - \frac{9c^2}{4a}\right) \cos 4\varphi + 6c_2 \cos 6\varphi \quad \dots \quad (19)$$

Das Verfahren könnte nun fortgesetzt werden, indem man mit diesen Deformationsgrößen einen verbesserten Wert von K aus (9) berechnet und den geschilderten Rechnungsgang wiederholt. Die Konvergenz ist sehr gut; ersichtlich erhält man eine Fourierreentwicklung für w und u als Funktion von φ .

Aus (19) entnehmen wir als *hinreichende Näherung für das maximale Maß der Einbeulung*:

$$u_{\max} = u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 2c = 0.146 a \sqrt{\frac{p}{p_k} - 1} \quad \dots \quad (20)$$

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Formänderung beim Kippen des Kreisringes aus seiner Ebene sowie bei den Knick- und Kipperscheinungen des Kreisbogens, die bisher einer strengen Lösung nicht zugeführt wurden, berechnen, freilich werden die notwendigen Rechnungen hierbei weitaus mühsamer. Man gelangt hierbei stets zu dem formal gleichen Ergebnisse,

daß die größte Auslenkung in 1. Näherung durch einen Ausdruck $a \sqrt{\frac{p}{p_k} - 1}$ dargestellt ist⁹⁾, worin bei Knickerscheinungen der Beiwert a mit dem Ringhalbmesser a proportional und unabhängig von der Steifigkeit ist, während er bei Kipperscheinungen sich noch abhängig vom Steifigkeitsverhältnisse $\frac{A}{C}$ zeigt. Beim Kreisbogen tritt natürlich noch die Abhängigkeit vom Oeffnungswinkel des Bogens hinzu. Man erkennt, daß die Auslenkungen für $p = p_k$ verschwinden und daß bereits kleine Ueberschreitungen des kritischen Druckes zu großen Verschiebungen Anlaß geben.

⁹⁾ Man vergleiche hiemit die analogen Ergebnisse beim Knicken und Kippen eines geraden Stabes. (v. MISES, Z. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 4, p. 435 und FEDERHOFER, Bd. 6, p. 43—48.)

Die singulären Punkte und ihre Bedeutung in den Kraftfeldern fester, elastischer Körper

Von Th. Wyß, Danzig

In jedem gespannten Körper besteht das Kraftfeld aus drei Scharen orthogonaler, kontinuierlich verlaufender Hauptspannungslinien, die als Kraftlinien bezeichnet werden sollen. Diese Linien müssen in ihren Schnittpunkten miteinander verknüpft gedacht werden. Die Umgrenzung des Kraftfeldes stimmt mit der Körperoberfläche überein.

Die singulären Punkte zeichnen sich nun dadurch aus, daß in ihnen zwei, oder alle drei Hauptspannungswerte gleich groß werden, wobei sie null, endlich oder unendlich sein können. Dementsprechend treten sie als singuläre Kugel — Rotationsellipsoid — und als Kreispunkte auf. Sie nehmen im Kraftfeld eine hervorragende Stellung ein, derart, daß wenn ihre Lage bekannt ist, der Kraftlinienverlauf bereits in großen Zügen festgelegt werden kann. Durch sie gehen die Grenzkraftlinien hindurch, welche die verschiedenen Kraftlinientypen einer Schar voneinander trennen. Unter Umständen werden durch sie lokale Felder abgegrenzt. Meistens sind in den singulären Punkten die Orthogonalitätsbedingungen nicht mehr erfüllt, indem in ihnen oft mehr als drei Kraftlinien zusammentreffen können. Im weiteren knicken einzelne Grenzkraftlinien in den singulären Punkten ein.

Eine besondere Art singulärer Punkte sind die Kraftangriffspunkte, von denen unendlich viele Kraftlinien ausgehen, und die Unendlichkeitspunkte an einspringenden Ecken. Die ersteren werden bei Druckwirkung als Quell-, bei Zugwirkung als Senkpunkte bezeichnet.

An Hand einiger Beispiele sollen in beiliegender Tafel die wichtigsten Eigenschaften und ihre markante Stellung im Feld gezeigt werden. Wir beschränken uns auf quasiebene Zustände.

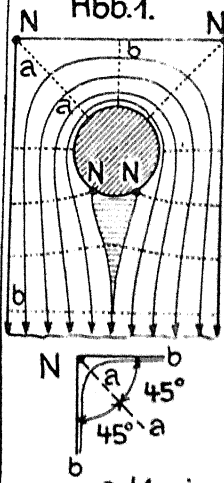
1. *Singuläre Nullpunkte.* Am Kopf einer durch einen Bolzen gespannten Lasche treten nach Abb. 1 zwei Ecknullpunkte N auf. Die Grenzlinie der Kraftlinienschar $b-b$, die mit der Randlinie zusammenfällt, knickt in N ein. Auf Grund der Orthogonalitätsbedingungen, die auch im engsten Bereich der Ecke gelten müssen, ist anzunehmen, daß die Grenzkraftlinie des punktiert gezeichneten Systems den Eckwinkel φ halbiert. Die Dicke des Kraftfadens, begrenzt durch die Randlinie und der dieser unendlich benachbarten Kraftlinie wird in der Ecke endlich.

Die Abb. 2 stellt das Kraftfeld eines kontinuierlichen Balkens im Bereich eines Momentennullpunktes dar. An den beiden Randlinien treten die singulären Kantennullpunkte N auf. Die in ihnen einknickenden Grenzkraftlinien schließen, wieder auf Grund der Orthogonalitätsbedingungen, dort einen Winkel von 60° miteinander ein. Sie grenzen deutlich die durchgehenden Kraftlinien von denen, die auf die Ränder einmünden, ab. Auch hier wird die Fadendicke in N endlich groß. Solche Kantennullpunkte treten auch am Lochrand in Abb. 1 auf.

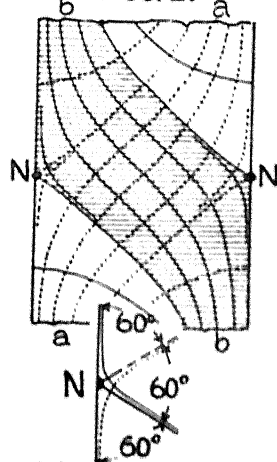
Zwei Flächennullpunkte entstehen nach Abb. 3 im Feld einer unendlich großen Scheibe, die durch zwei gleich große, zylinderförmige Körper infolge gleicher radialer Ausdehnung gespannt wird. Ein Teil der punktiert gezeichneten Druckkraftlinien verbindet die beiden Quellpunkte U direkt. Ihre Grenzkraftlinie knickt in N ein und trennt sie von denjenigen Linien ab, die nach dem Unendlichen verlaufen. Auch hier schneiden sich die Grenzkraftlinien im singulären Punkt N unter 60° . Beachtenswert ist der Verlauf der Zugkraftlinien, nach denen die lokalen Felder I, II, III unterschieden werden können. Von Interesse ist auch der Vergleich mit einem Quellen-Quellen-, bzw. Quellen-Senken-Feld idealer Flüssigkeiten.

I. Singuläre Nullpunkte.

Ecknullpunkt.
Abb. 1.



Kantennullpunkt.
Abb. 2.



Flächennullpunkt und Kreispunkt.
Abb. 3

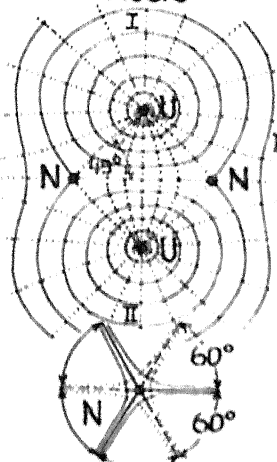
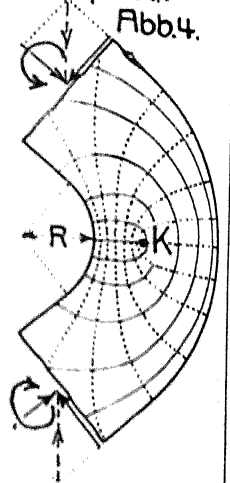
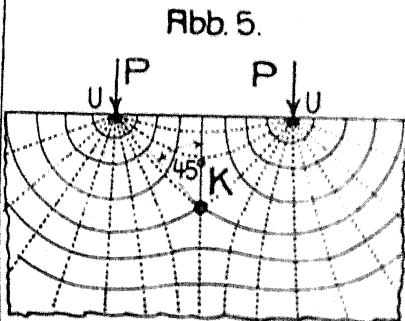


Abb. 4.



2. Kreispunkt.
Abb. 5.



3. Unendlichkeitspunkte.



Abb. 6

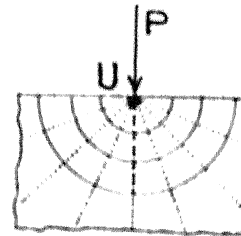
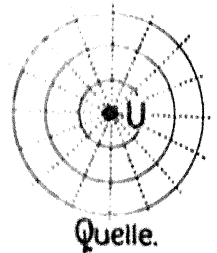


Abb. 7



Quelle.

4. Lage der singulären Punkte.

Abb. 9

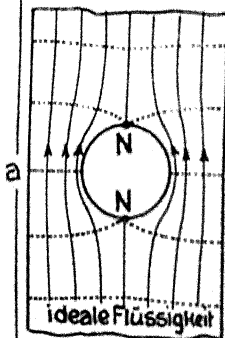
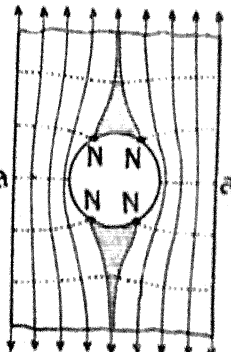


Abb. 10



5. Wandern der singulären Punkte.

Abb. 11

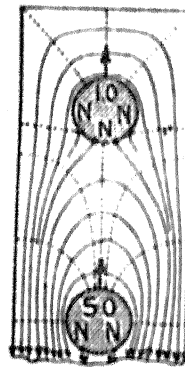


Abb. 12

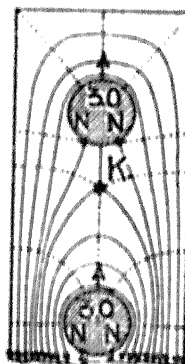
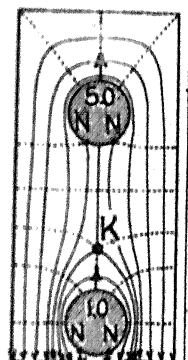
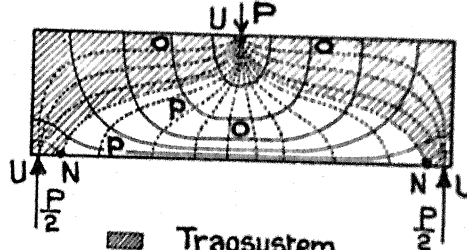


Abb. 13



6. Zusammenhang der Quellpunkte.

Abb. 14



Tragsystem
p-p Verteilungssystem
o-o Überleitungssystem

7. Torsionsfelder.

Abb. 15

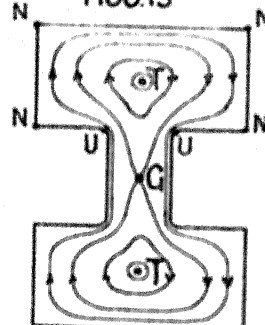
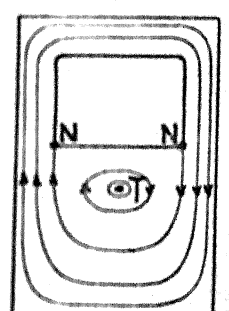


Abb. 16



2. *Kreispunkte.* Ein in biegungsfesten Tragteilen häufig auftretender singulärer Kreispunkt ist in Abb. 4 dargestellt. Die Kraftlinien in dieser Zone sind hakenförmig. Die Hakenöffnung wird um so kleiner, je näher die einzelnen Kraftlinien an den Punkt K heranrücken. Bei den Grenzkraftlinien fallen die beiden Schenkel des Hakens zusammen.

Ein anderer Typ von Kreispunkten tritt in Abb. 5 auf. Es ist dies das Feld zweier Einzelkräfte, die an einer unendlich großen Halbscheibe angreifen. Es hat ähnliche Eigenschaften, wie das in Abb. 3 vorgeführte Feld, ebenso ist das gleiche vom singulären Punkt K zu sagen.

3. *Unendlichkeitspunkte.* Die Abb. 6 zeigt einen singulären Unendlichkeitspunkt infolge Körperform. Die scharf einspringende Ecke bewirkt, daß die Randkraftlinie dort einknickt. Die Dicke des Kraftfadens ist im Knickpunkt von höherer Ordnung unendlich klein als an den anderen Teilen. Charakteristisch sind diese Unendlichkeitspunkte durch die starke Anhäufung von Kraftlinien in ihrem Bereiche.

Das Feld einer Einzellast, die nach Abb. 7 an einer unendlich großen Halbscheibe angreift, weist im Lastangriffspunkt einen singulären Unendlichkeitspunkt auf. Er zeichnet sich besonders durch das radiale Ausströmen der Druckkraftlinien aus. Einen ähnlichen Kraftlinienverlauf weist das Feld eines Quellpunktes, Abb. 8, in einer unendlich großen Scheibe auf. Dieser Quellpunkt kann, wie dies im Feld der Abb. 3 der Fall ist, durch einen sich radial ausdehnenden, zylinderförmigen Körper gebildet werden. Diese Felder der Abb. 7 und 8 zeigen sich überall im engsten Bereich der Unendlichkeitspunkte aus Einzellasten, nur werden dann entsprechend den Randbedingungen die Kraftlinien allmählich abgelenkt. (S. Abb. 3, 5, 14.)

4. *Die Bedeutung der Lage der singulären Nullpunkte* geht deutlich aus dem Vergleich der Abb. 9 und 10 hervor. Die Abb. 9 stellt das Strömungsfeld einer idealen Flüssigkeit in einem völlig glatten Gerinne, von unendlicher Ausdehnung dar, in das ein Zylinder eingebaut ist. Entsprechend der Gültigkeit des Kontinuitätsgesetzes treten die singulären Punkte N der Potentialströmung in der Mittelachse auf. Die Abb. 10 zeigt ein ähnliches Feld in einer einachsigen gezogenen Lasche mit kreisrundem Loch. Hier treten, trotzdem im Schnitt $a-a$ die gleiche Resultierende der inneren Kräfte zur Wirkung kommt wie in den anderen Querschnitten, die 4 singulären Punkte N auf. Zwischen das Feld der durchgehenden Kraftlinien haben sich zwei lokale, schraffiert dargestellte Felder hineingeschoben. Dies ist deshalb möglich, weil das Kontinuitätsgesetz bezüglich der Konstanz der Kraft längs eines Kraftfadens im allgemeinen nicht gilt. Die Kräfte können infolge des innigen Zusammenhanges der sich orthogonal schneidenden Kraftlinien aus einem Faden ab- oder zuwandern. Dementsprechend kann man bezüglich eines Kraftfadens von einem Kraftanbau bzw. -Abbau sprechen. Solchen lokalen Feldern begegnet man überall. Siehe z. B. Abb. 1.

5. *Das Wandern der singulären Punkte* kann als Folge veränderter Körperform oder veränderter Belastung betrachtet werden. In den Abb. 11 bis 13 ist das Wandern des singulären Kreispunktes K in einer Lasche infolge veränderter Bolzenkräfte dargestellt. Die genaue Lage wurde experimentell durch W. STOLTENBURG-Danzig festgestellt. Deutlich zeigt sich das immer größer werdende lokale Feld des zweiten Bolzens, wenn dessen Kraft anwächst.

6. *Der Zusammenhang der Quellpunkte;* die wegen des radialen Ausströmens von lauter Drucklinien so bezeichnet werden, soll an Hand von Abb. 14 gezeigt werden. Beim einfachen Balken sind die singulären Unendlichkeitspunkte U durch Druckkraftlinien miteinander verbunden. Durch sie wird das Tragsystem gebildet. Die Mittelkraft P muß nach den beiden Auflagerpunkten übergeleitet werden. Infolgedessen müssen alle Kräfte, die in den Fäden $p-p$ des Verteilungssystems enthalten sind, vermittels der Zugkraftlinien $o-o$ auf das Tragsystem übergeleitet werden. Dies ist auch deshalb notwendig, weil entsprechend den Rand-

bedingungen die Kräfte in den Fäden $p-p$ am unteren Balkenrande völlig abgebaut sein müssen. Die durch die singulären Kantennullpunkte N gehenden Grenzkraftlinien grenzen das Tragsystem vom Verteilungssystem ab.

7. *Auch in Torsionsfeldern* Abb. 15 und 16 treten singuläre Punkte, wenn auch anderer Art, auf. Hierbei handelt es sich nur um singuläre Null- und Unendlichkeitspunkte. Einerseits sind zu nennen die an höchster Stelle des Spannungshügels vorkommenden Nullpunkte T , dann die in tieferen Lagen sich zeigenden Punkte G , N und U . Durch die letzteren gehen wieder die Grenzl意思. Eine besondere Bedeutung ist den singulären Punkten N am inneren Rand eines Hohlkörpers zuzuschreiben, weil sie ein Kriterium ergeben über die Gültigkeit des Stokeschen Satzes bezüglich der Deckelfläche.

LITERATUR:

TH. WYSS. Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktischen Anwendungen. Verlag Julius Springer, Berlin 1926.

Biegungsprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Plattenstreifens

Von M. T. Huber, Lwów (Lemberg)

I.

Eine orthotrope Platte, d. h. eine elastische Platte von orthogonaler Anisotropie, kann, abgesehen von physikalischer Bedeutung, als das geeignetste mechanische Modell gewisser wichtiger Konstruktionselemente der Technik angesehen werden¹⁾. Mit den Elastizitätsachsen X , Y als Koordinatenachsen in der ursprünglichen Plattenebene hat die Differentialgleichung der Biegungsfläche einer orthotropen Platte die Gestalt:

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p, \quad \dots \dots \dots (1)$$

während die entsprechende Gleichung für die isotrope Platte bekanntlich durch die Formel

$$\Delta \Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B} \quad \dots \dots \dots (1a)$$

ausgedrückt wird. Hier bezeichnet $w = F(x, y)$ die Ordinate der Biegungsfläche und $p = f(x, y)$ den Belastungsdruck. Die drei Biegungskonstanten B_1 , B_2 und H gehen im Falle der Isotropie in eine einzige über, welche den Wert der *Plattenbiegungssteifigkeit* $B = \frac{m^2 F}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12}$ hat. Analog bedeuten

$$B_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_1 J_1 \quad \text{und} \quad B_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_2 J_2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

die *Plattenbiegungssteifigkeiten* der elementaren X - und Y -Streifen der orthotropen Platte (bezogen auf die Einheit der Querschnittsbreite). Die dritte Konstante

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{B_1}{m_2} + \frac{B_2}{m_1} \right) + 2C \quad \dots \dots \dots (3)$$

besteht aus der *Querbiegunskonstante*, welche durch B_1 , B_2 und die reduzierten Querdehnungszahlen m_1 und m_2 ausgedrückt wird, d. h. $\frac{1}{2} \left(\frac{B_1}{m_2} + \frac{B_2}{m_1} \right)$ und aus der *Plattendrillungssteifigkeit* $2C$.²⁾

Für die innere Energie der verbogenen Platte erhält man den Ausdruck:

$$L_i = \frac{1}{2} \iint \left\{ B_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 4C \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (4)$$

Falls die Platte bei entsprechenden äußeren Kräften als eine elastische orthotrope *Scheibe* wirkt, können wir das betreffende ebene Problem der Elastizitätstheorie auf die Lösung der Differentialgleichung der *Spannungsfunktion* φ :

¹⁾ Zu derartigen Elementen gehören z. B. Holzbretter (abgesehen von den Unregelmäßigkeiten in der Faserstruktur), dichte Trägerroste in Wänden, Decken und Brücken, ferner Wellblechtafeln und vor allem die kreuzweise bewehrten Betonplatten.

²⁾ In der strengen Theorie der homogenen orthotropen Platte sind zwar die Konstanten m_1 und m_2 nicht voneinander unabhängig, aber dieser Umstand spielt in der Theorie der allgemeinen Biegung keine Rolle.

$$A_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 A_0 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

zurückführen, ähnlich wie es seinerzeit G. B. AIRY für isotrope Scheiben getan hat. Hier bezeichnen A_1 und A_2 die *Dehnungssteifigkeiten* in der X- und Y-Richtung. Sie gehen im Falle der Isotropie in den gemeinsamen Wert Eh über. Für die dritte Konstante erhalten wir den Ausdruck

$$A_0 = A_1 A_2 \left(\frac{1}{2 G} - \frac{1}{A_3} \right), \quad \dots \dots \dots (6)$$

worin G die *Schubsteifigkeit* ($= Gh$ im Falle der Isotropie) und A_3 die *Querdehnungssteifigkeit* bezeichnet. Für die Formänderungskomponenten ε_{xx} , ε_{yy} (Dehnungen) und ε_{xy} (Schiebung) gelten dabei die Gleichungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{S_x}{A_1} - \frac{S_y}{A_3}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{S_y}{A_2} - \frac{S_x}{A_3}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{T}{G}, \quad \dots \dots \dots (7)$$

wenn

$$S_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad T = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad \dots \dots \dots (8)$$

die entsprechenden Spannungskomponenten sind (bezogen auf die Querschnittsbreite 1). Die konstante A_3 bestimmt gleichzeitig die Werte der reduzierten Querdehnungszahlen durch die Relation:

$$A_3 = m_1 A_1 = m_2 A_2 \quad \dots \dots \dots (9)$$

Die innere Energie (Formänderungsarbeit) der orthotropen Scheibe wird gegeben durch den Ausdruck:

$$I_i = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{S_x^2}{A_1} + \frac{S_y^2}{A_2} - 2 \frac{S_x S_y}{A_3} + \frac{T^2}{G} \right) dx dy \quad \dots \dots \dots (10)$$

(Die üblichen bezogenen Spannungen σ_x , σ_y und τ sind gleich den durch h dividierten S_x , S_y , T .)

II.

Die angeführten Gleichungen und Formeln bilden die Grundlagen zur Behandlung spezieller Aufgaben der Krystallphysik und der Festigkeitslehre. In ihrer Anwendung auf das Problem einer Rippendecke aus Eisenbeton u. dgl. muß man einstweilen jene Belastungsfälle ausschließen, bei welchen die Rippen auch auf Verdrehung beansprucht werden. Diese beschränkende Bedingung ist erfüllt, wenn eine sehr lange Platte mit zahlreichen gleichen Querrippen in gleichen Abständen auf jedem Plattenfelde etwa nach der Abb. 1 belastet ist.

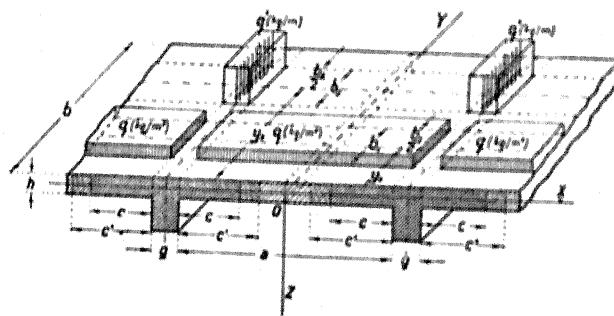


Abb. 1.

In diesem Falle biegt sich ein jedes Plattenfeld wie eine rechteckige Platte, die bei freier Auflagerung der a -Ränder mit beiden b -Rändern von den Rippen elastisch gestützt und hori-

zontal eingespannt wird. Die einzelnen Plattentafeln werden aber nicht nur auf allgemeine Biegung beansprucht, sondern wirken auch gleichzeitig als elastische orthotrope Scheiben, indem sie zu beiden Seiten einer jeden Rippe die Druckgurte der Plattenbalken vom T-förmigen Querschnitt bilden. (Die entsprechenden Scheibenspannungen werden dabei desto ungleichmäßiger im Querschnitt XZ verteilt, je größer a im Verhältnis zu b ist.)

Dadurch wird die Aufgabe recht verwickelt; jedoch unter ähnlichen Annahmen, welche gewöhnlich der Balken- und Plattentheorie zugrunde gelegt werden, läßt sie eine strenge theoretische Lösung zu. Diesen Annahmen (lineare Verteilung der Biegungsspannungen in der Z -Richtung usw.) muß allerdings noch die Voraussetzung einer im Vergleiche zur Rippenhöhe sehr kleinen Plattendicke h hinzugefügt werden ³⁾.

Das Problem zerfällt in folgende zwei Teilaufgaben:

1. Bei beliebig gegebener Verteilung der Randspannungen in der Mittelebene YZ jeder Rippe und zugleich in den angrenzenden Plattenrändern, den (ebenen) Spannungszustand im ganzen (als elastische orthotrope Scheibe betrachteten) Plattenfeld zu finden. Hierzu muß die Gleichung (5) integriert werden. Die Lösung erlaubt die elastische Nachgiebigkeit der Rippe als Auflager eines b -Randes des angrenzenden Plattenfeldes zu bestimmen.

2. Bei bekannter elastischer Nachgiebigkeit der Stützung der beiden b -Ränder eines jeden Plattenfeldes die Gleichung seiner Biegungsflächen durch Integration der Gleichung (1) bei der eben erwähnten Belastungsart zu finden.

Die vollständige Lösung dieser beiden Teilaufgaben führt mittelbar zur theoretischen Beantwortung einer wichtigen Frage des Eisenbetonbaues, welche die Praxis folgendermaßen formuliert:

„Welche Plattenbreite c' soll beiderseits der Rippe in dem T-förmigen Querschnitt des Plattenbalkens als »mitwirkend« betrachtet werden, so daß bei gegebener Belastung die übliche elementare Berechnung des Plattenbalkens eine richtige Abschätzung ihrer Beanspruchung liefert?»

Bezeichnet man mit g die (obere) Rippenbreite, so dürfte $(2c' + g)$ die *praktische mitwirkende Plattenbreite*, oder kürzer die *reduzierte Plattenbreite* genannt werden.

Von dieser Größe ist aber die *theoretische mitwirkende Plattenbreite* $(2c + g)$ scharf zu unterscheiden. Diese wird durch die Verteilung der Scheibenspannungen im Plattenfelde bestimmt. Ist σ_R die wahre Normalspannung in der horizontalen Linie des Rippenquerschnittes, deren Verlängerung in der neutralen Schicht der Plattenbiegung liegt, und L_i die innere Energie der Scheibenspannungen eines Plattenfeldes, so wird die einseitige theoretische mitwirkende Plattenbreite c aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{c h}{2} \int_0^b \frac{\sigma_R^2}{E_R} dy = \frac{1}{2} L_i \quad \dots \dots \dots (11)$$

berechnet (mit zulässiger Vernachlässigung der Energie der Schubspannungen gegen die Energie der Normalspannungen in betrachteten Rippenteilen).

Man darf im vorhinein erwarten, daß c meistens *viel kleiner* als c' und nur in gewissen Grenzfällen gleich c' sein wird. Denn die Arbeitswirkung der Belastungen beruht erstens auf der ebenen Biegung des Plattenbalkens von der oberen Breite $(2c + g)$ und zweitens auf der räumlichen Biegung der Plattentafel. Daraus folgt, daß dieser Plattenbalken so beansprucht wird, wie wenn er, losgelöst von dem übrigen Plattenstücke nur einen Teil der Gesamtbelastung

³⁾ Diese Voraussetzung ist in Wirklichkeit meistens nicht erfüllt, was jedoch nur sehr geringfügige Fehler verursachen dürfte.

trägt, während der andere Teil gewissermaßen von jenem Plattenstücke getragen wird. Will man dagegen an der Fiktion eines die Gesamtlast tragenden Plattenbalkens festhalten (wie in der Praxis geschieht), so müßte offenbar ihre Breite $(2c' + g)$ größer ausfallen, damit die berechnete Biegebungsbeanspruchung den richtigen Wert erhalte.

Die folgende Lösung der zweiten Teilaufgabe läßt obige Schlüsse quantitativ genau verfolgen.

III.

Wenn wir vorläufig annehmen, daß die Breite c gegeben sei, so setzt sich der Ausdruck für die innere Energie der Rippenplatte aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil in der Gestalt (4) drückt die Biegebungsenergie eines Plattenfeldes aus; der zweite hat die Form:

$$\frac{1}{2} \int_0^b (B^* - 2 B_2 c) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0}^2 dy \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (12)$$

und stellt die Summe aus der Biegebungsenergie der Rippe und der von der »Mitwirkung« bedingten Druckenergie der Platte dar. Dabei bezeichnet B^* die Biegesteifigkeit des Plattenbalkens von der oberen Breite $= 2c + g$. Man gelangt zur Lösung, wenn in der schon früher gefundenen Gleichung der Biegebungsfläche einer längs der b -Ränder unnachgiebig eingespannten Platte unbestimmte Koeffizienten ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) eingeführt werden, deren Werte aus der Bedingung des Minimums der totalen Energie (Ritzsche Methode) zu bestimmen sind. Wir bekommen auf diese Weise:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{4 q b^4}{\pi^5 B_2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[1 - \frac{\omega_n}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left(\beta \frac{Ch \frac{nx}{\beta}}{Sh \frac{na}{2\beta}} - \alpha \frac{Ch \frac{nx}{\alpha}}{Sh \frac{na}{2\alpha}} \right) \right] \sin \frac{n \pi y}{b} \\ \omega_n &= \left[\frac{B^*}{B_2} - 2c - \frac{(n, b_2, y_2) q'}{(n, b_1, y_1) q} \right] : \left[\frac{B^*}{B_2} - 2c + \frac{2}{n} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

mit abkürzenden Bezeichnungen in der Formelgruppe (14).

$$\left. \begin{aligned} (n, b_i, y_i) &= \sin \frac{n \pi}{2} \frac{b_i}{b} \cdot \sin \frac{n \pi y_i}{b} \\ \alpha \beta &= \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{H}{B_2}} + \sqrt{\frac{H^2}{B_2^2} - \frac{B_1}{B_2}} \\ \alpha_{an} &= \alpha \coth \frac{na}{2\alpha}, \quad \beta_{an} = \beta \coth \frac{na}{2\beta} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (14)$$

Man kann verifizieren, daß diese Lösung die Gleichung (1) und alle Randbedingungen befriedigt.

Das Biegemoment des Plattenbalkens berechnet sich jetzt nach der Formel

$$M = -B^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (15)$$

und kann nach dem Schema $M = M_q + M_{q'}$, zerlegt werden. Beispielsweise werden im Falle $H^2 = B_1 B_2$ *) die beiden Teilmomente durch die Formeln (16) ausgedrückt:

*) Fall II in den Arbeiten des Verfassers. ($H^2 \geq B_1 B_2$ entspricht den Fällen I und III.)

$$\left. \begin{aligned} M_q &= M_q^{(o)} \cdot \frac{64}{\pi^3} \sum_{n=1,2,3..} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^4} F_n(\epsilon) \frac{B^* \sin \frac{n\pi y}{b}}{B^* + 2 B_2 a \left[\frac{1}{n} F_n(\epsilon) - \frac{c}{a} \right]} \\ M_{q'} &= M_{q'}^{(o)} \cdot \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1,2,3..} \frac{(n, b_2, y_2)}{n^3} \frac{B^* \sin \frac{n\pi y}{b}}{B^* + 2 B_2 a \left[\frac{1}{n} F_n(\epsilon) - \frac{c}{a} \right]} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Dabei gelten die abkürzenden Bezeichnungen (16a):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &\equiv \frac{a}{b} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \quad (\text{das reduzierte Seitenverhältnis}) \\ F_n(\epsilon) &\equiv \frac{2}{\pi \epsilon} \cdot \frac{Ch(n \pi \epsilon) - 1}{Sh(n \pi \epsilon) + n \pi \epsilon} \\ M_q^{(o)} &\equiv \frac{1}{8} q a b^2, \quad M_{q'}^{(o)} \equiv \frac{1}{8} q' b^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16a)$$

Bei nicht zu großen Rippenabständen, wenn nämlich $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$, darf für $F_n(\epsilon)$ genügend genau der Wert $\frac{1}{2}$ gesetzt werden. Falls noch $b_1 = b_2 = b$, $y_1 = y_2 = \frac{b}{2}$ angenommen wird (Belastung der ganzen Rippenlänge und Plattenfläche), so reicht das erste Glied jeder Reihe aus, um einen für technische Zwecke genügend angenäherten Wert des M_{max} im Plattenbalken von der oberen theoretischen Breite $(2c + g)$ zu finden. Setzt man noch näherungsweise $\frac{32}{\pi^3} \approx 1$, so ist

$$M_{max} = \frac{B^*}{B^* + B_2 a (1 - 2c/a)} (M_q^{(o)} + M_{q'}^{(o)}) \quad (\text{für ziemlich kleine Rippenabstände}) \quad (17)$$

In einem anderen Grenzfalle, wenn der Rippenabstand sehr groß ist, wird genügend genau $F_n(\epsilon) = \frac{0,637}{\epsilon}$ und

$$\left. \begin{aligned} M_q &= M_q^{(o)} \cdot \frac{1,315}{\epsilon} \sum_{n=1,2,3..} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^4} \frac{B^* \sin \frac{n\pi y}{b}}{B^* + 2 B_2 a \left(\frac{0,637}{n\epsilon} - \frac{c}{a} \right)} \\ M_{q'} &= M_{q'}^{(o)} \cdot 1,032 \sum_{n=1,2,3..} \frac{(n, b_2, y_2)}{n^3} \frac{B^* \sin \frac{n\pi y}{b}}{B^* + 2 B_2 a \left(\frac{0,637}{n\epsilon} - \frac{c}{a} \right)} \end{aligned} \right\} \dots (16a)$$

Daraus folgt in erster Annäherung (die für praktische Zwecke immer ausreichen dürfte):

$$M_{max} = \frac{\left[\frac{1}{8} (1,3 q b_{red}) b^2 + \frac{1}{8} q' b^2 \right] B^*}{B^* + B_2 (1,25 b_{red} - 2c)} \quad (\text{für sehr große Rippenabstände}) \quad (17a)$$

Hier bezeichnet $b_{red} = b \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$ die (auf isotrope Platte) reduzierte Spannweite. Da in diesem Grenzfalle c ungefähr $= 0,1 b_{red}$ ist, so kann im Nenner statt $(1,25 b_{red} - 2c)$ einfach $1,05 b_{red}$ gesetzt werden. Von der unmittelbaren Rippenbelastung wird daher in diesem

Falle bloß ein Teil im Verhältnis $B^* : (B^* + 1,05 B_2 b_{red})$ auf den theoretischen Plattenbalken übertragen. Dieses Verhältnis nähert sich dem Werte 1 bei sehr steifen Rippen und schwacher Platte. Dann übertrifft die praktische mitwirkende Breite c' nur sehr wenig die theoretische Größe c . Wenn dagegen die Rippen schwach und die Platte sehr steif ist, so wird auf den Plattenbalken von der oberen Breite $(2c + g)$ nur ein kleiner Bruchteil der unmittelbaren Belastung der Rippe übertragen. In diesen Fällen müßte c' viel größer als c angenommen werden. *Die reduzierte Plattenbreite c' hängt also im allgemeinen nicht nur vom lichten Rippenabstand a und der Spannweite b ab, sondern auch von dem Verhältnis der Biegesteifigkeiten der Rippe und der Platte (letztere bezogen auf die Einheit der Querschnittsbreite).*

Die Ausrechnung von c' würde sich sehr mühevoll und verwickelt gestalten; glücklicherweise ist sie aber überflüssig, da die einfachen Formeln (17), (17a) vollkommen ausreichen, um die Beanspruchung der Rippe genügend genau zu bestimmen. Ähnliches läßt sich auch für die übrigen Teile der Konstruktion auf Grund der vorgeführten Lösung ausrechnen; die Knappheit der Zeit verbietet jedoch dieses weiter zu verfolgen. Ebenso wenig kann hier die Lösung der ersten Teilaufgabe dargestellt werden, um so mehr, da die diesbezüglichen Rechnungen noch nicht abgeschlossen sind. Es möge nur daran erinnert werden, daß die Spannungsverteilung in Gurtplatten bereits von den Herren EGGENSCHWYLER (1917), BORTSCH (1921) und v. KÁRMÁN (1924) theoretisch untersucht worden ist, allerdings bei der Voraussetzung eines isotropen Materials und für einfache Spezialfälle. Die am meisten befriedigende Lösung findet man in der v. KÁRMÁNSchen Abhandlung (Festschrift für A. Föppl, München 1924). Die erste angenäherte Lösung des Verfassers für orthotrope Gurtplatte (1921) hat sich zum Teil nicht bewährt; sie lehrte aber, daß die umgekehrte Reihenfolge der Behandlung beider Teilaufgaben gewisse Vorzüge zu haben scheint.

Allerdings glaubt der Verfasser durch die dargebrachten Anwendungen einer strengen Lösung der zweiten Teilaufgabe ihre Wichtigkeit für das genaue Erfassen der statischen Wirkung einer Rippenplatte erwiesen zu haben.

LITERATUR.

- M. T. Huber, 1. Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. Zeitschr. der Oester. Ing. u. Arch. Ver. 1916, Nr. 30; oder die ursprüngliche Bearbeitung in polnischer Sprache mit französischer Zusammenfassung: «La théorie générale des hourdis en béton armé...», Czasopismo techniczne, Lwów 1914.
2. Teorja płyt . . . , Lwów (Lemberg) 1921, im Verl. der poln. wissenschaftl. Gesellschaft (in Kommission bei Gubrynowicz i Syn, Lwów).
- 3—5. Drei Noten in «Comptes rendus . . . de l'Académie des Sciences», Bd. 170 (1920), S. 511 und 1305; Bd. 180 (1925), S. 1243.
- 6—9. Vier Aufsätze im «Bauingenieur», 1923, H. 12 u. 13; 1924, H. 9 u. 10; 1925, H. 1 u. 2; 1926, H. 7, 8 u. 9.
10. Einige Anwendungen der Biegetheorie orthotroper Platten. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mechanik. 1926, Bd. 6, Heft 3.
- Man vergleiche auch die Behandlung der Theorie der Eisenbetonplatten in folgenden Veröffentlichungen:
- H. Leitz, Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegezustand, Bautechnik 1923, S. 155.
- H. Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe, Berlin, Springer 1914, S. 100 bis 108.

Ueber die Torsion von Schrumpfverbindungen

Von G. Eichelberg, Winterthur

Schrumpfverbindungen, die durch ein Drehmoment auf Torsion beansprucht werden, kommen etwa vor bei Dampfturbinentrommeln und -Scheiben, bei zusammengesetzten Kurbelwellen und bei Kupplungsflanschen.

Eine erste Frage nach dem Zusammenhang zwischen Schrumpfzugabe, Umfangsspannungen und Anpassungsdruck, also zwischen Dehnungen und Spannungen, gehört rein in das Gebiet der Elastizitätslehre und hat dort ihre Beantwortung erfahren.

Die nächste Frage nach der Sicherheit einer Schrumpfverbindung gegen Lösen wird die Elastizitätstheorie allein nicht beantworten, da offenbar jede Schrumpfverbindung gegen Lösen einzig durch die Reibungskraft in der Berührungsfläche gesichert ist. Die Sicherheit hängt also vom Reibungskoeffizienten ab, dessen Kenntnis einen Versuch voraussetzt.

Eine dritte Frage, die hier ausschließlich erörtert werden soll, ist die nach dem Verlauf der Torsionsspannungen in einer auf Verdrehen beanspruchten Schrumpfverbindung. Wie erfolgt die Abgabe des Drehmomentes vom Zapfen an die Nabe?

Aus der Vorstellung heraus wird folgendes zu erwarten sein: In einer auf Torsion beanspruchten Schrumpfverbindung, bestehend aus Welle und Nabe, werden die Mantellinien der Welle außerhalb der Nabe schraubenförmig mit einer dem Drehmoment entsprechenden konstanten Steigung verdreht sein. Beim Eintritt in die Nabe kann nicht sprunghaft das ganze Drehmoment an die Nabe abgegeben werden, vielmehr wird in einem ersten Abschnitt nur ein durch den Reibungskoeffizienten begrenztes Moment übertragen. Der Rest muß bis zu einem folgenden Abschnitt noch durch den Zapfen weitergeleitet werden, was voraussetzt, daß dieser auch im Innern der Nabe verdreht wird. Die schraubenförmige Mantellinie der freien Welle geht nur allmählich in eine für Zapfen und Nabe gemeinsame Steigung über. In welchem Maße wird nun bei großem Drehmoment noch bevor eine bleibende Verschiebung auftritt, im ersten Abschnitt der Schrumpfflächen ein Gleiten zwischen Zapfen und Nabe eintreten können?

Die Frage in dieser ausführlichen Form stellen, heißt sie im Prinzip schon beantworten, denn was die mathematische Formulierung betrifft, so folgt der Verlauf der Torsionsspannungen den allgemeinen Gleichungen für die Torsion in Rotationskörpern. Die partiellen Differentialgleichungen dieses Problems sind der Elastizitätslehre bekannt. Sie sagen aus, daß in einem Längsschnitt die in der Richtung der resultierenden Schubspannungen verlaufenden Spannungstrajektorien zusammen mit den Linien gleichen Verdrehungswinkels ein orthogonales Netz bilden, dessen Maschen bestimmten Bedingungen unterliegen, und das den Randbedingungen, wie sie hauptsächlich durch die Form des Körpers vorgeschrieben sind, zu genügen hat.

Bei der Schrumpfverbindung kommt als besondere Grenzbedingung hinzu, daß in der Schrumpffläche das Moment der Umfangsspannungen den Betrag des Reibungsmomentes nicht überschreiten kann.

Die Ermittlung eines die Differentialgleichungen unter Einhaltung der Grenzbedingungen erfüllenden Liniennetzes ist für Rotationskörper im allgemeinen nur durch Näherungsrechnung möglich, ausgehend von einem angenommenen Liniennetz. Einen geeigneten Weg zur schrittweisen Korrektur hat F. A. Willers 1907 in seiner Göttinger Dissertation: « Die Torsion von Rotationskörpern » eingeschlagen. Nach einigen Korrekturen läßt sich damit schließlich ein den Bedingungen genügend genau entsprechendes Liniennetz als Näherungslösung finden.

Ohne hier bei Einzelheiten zu verweilen, sei in Fig. 1 das Resultat einer solchen Durchrechnung gezeigt.

Es handelt sich um eine Schrumpfung, bestehend aus einem vollen Zapfen, der in eine Scheibe eingeschrumpft ist, die als sich allseitig ins Unendliche erstreckend gedacht werden kann. Um den Fall zu präzisieren, ist die Schrumpflänge gleich dem Zapfenradius gewählt. Im übrigen gilt das Bild für beliebigen Maßstab. Es zeigt den Verlauf der Torsionsspannungen für maximal mögliches Drehmoment, bei dem bereits Gleiten auf der ganzen Zapfenlänge eintritt. In der Berührungsfläche werden in diesem Fall in gleichen Abschnitten gleiche Drehmomente übertragen, nämlich die dem Reibungsbetrag entsprechenden. Für die *Nabe* bedeutet dieses gleichmäßig über der ganzen Länge angreifende Moment offenbar, daß die Flächen gleichen Verdrehungswinkels koaxiale Zylinder sind. Die dazu rechtwinkligen Spannungslinien verlaufen somit radial. In der *Welle* ist in genügender Entfernung von der Schrumpfstelle das Liniennetz ohne weiteres gegeben. Die Einteilung der Spannungstrajektorien ($u = \text{const}$) ist nach Prozents des übertragenen Drehmomentes vorgenommen, das im zylindrischen Teil mit der 4. Potenz des Radius ansteigt. In der Schrumpffläche weist das Liniennetz infolge des eingetretenen Gleitens eine Unstetigkeit auf, die als Knick in den Spannungs- und Verdrehungslinien zum Ausdruck kommt.

Gerade in letzterer Hinsicht ändert sich das Bild, wenn das Drehmoment kleiner als maximal zulässig gewählt wird. In Fig. 2 ist die gleiche Schrumpfung nur mit der Hälfte des maximal möglichen Drehmomentes beansprucht. Nur im ersten Abschnitt, wo

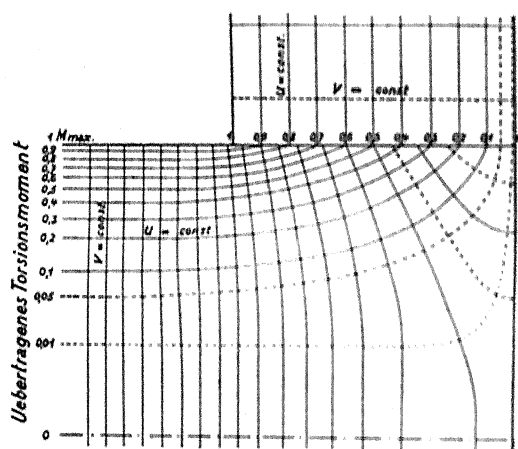


Abb. 1.

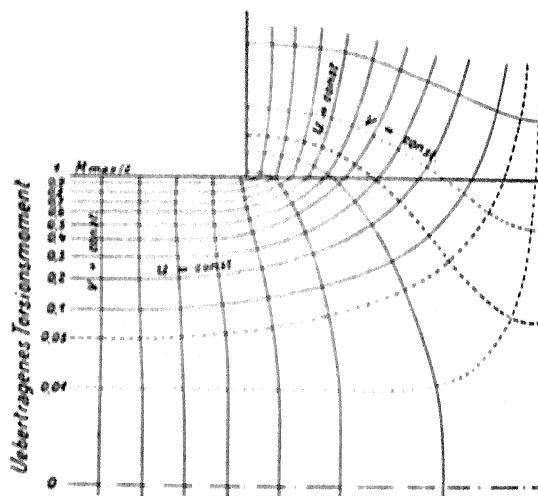


Abb. 2.

das Reibungsmoment erreicht wird, findet Gleiten zwischen Zapfen und Nabe statt, dort ist das Liniennetz in den Uebergangsstellen noch unstetig. Weiter innen nach etwa $\frac{1}{4}$ der Schrumpflänge tritt kein Gleiten mehr ein, das Liniennetz wird stetig. Die Nabe wird nicht mehr vollkommen gleichmäßig verdreht, die Ecke an der Einnümdung wird vom größten Moment erfaßt und erfährt die schärfste Verschiebung in der Umfangsrichtung.

Für noch größere Sicherheit bzw. geringeres Drehmoment verkleinert sich der Abschnitt der Unstetigkeit; prinzipiell wird er aber nicht verschwinden, da offenbar ohne Gleiten, etwa wenn Welle und Nabe aus einem Stück hergestellt wären, in der scharfen, einspringenden Ecke die Torsionsspannungen unendlich groß würden, also auf jeden Fall die Reibungsspannung überschreiten müßten. Der Gefahr eines Anrisses, wie sie in diesem Fall bestehen würde,

weicht die Schrumpfverbindung aus durch ein geringes Gleiten in einem ersten kurzen Abschnitt, der bei etwa 5facher Sicherheit kürzer als 1 % der Schrumpflänge wird.

Aus solchen Spannungsbildern lassen sich 2 Zusammenhänge herauslesen:

Zunächst kann längs der Berührungsfläche die übertragene Umfangsspannung ermittelt werden, da jeder Abschnitt zwischen zwei Spannungstrajektorien (Linien $u = \text{const}$) je 10 % des Drehmomentes überträgt.

Ferner läßt sich die Deformation der Mantellinien aus den Linien gleicher Verdrehung ($V = \text{const}$) ablesen. Fig. 3 zeigt die Verteilung des Drehmomentes über die Schrumpfffläche. Die Schrumpfverbindung ist dabei stets mit dem gleichen Torsionsmoment beansprucht, dafür aber mit verschiedenen Sicherheitsgraden ausgeführt gedacht, also etwa mit verschiedenen Schrumpfzugaben. Aus den drei, aus gerechneten Liniennetzen entnommenen Kurven für Sicherheit 1, 2 und 5 lassen sich weitere Werte leicht interpolieren. Bei 2-facher Sicherheit tritt im ersten Viertel ein Gleiten ein, nachher fällt die Schubspannung im Umfang rasch unter den Reibungsbetrag. Das Rechteck für Sicherheit 1 gibt dabei den Mittelwert für diese und für alle übrigen Kurven. Bei 1,5-facher Sicherheit kann das Lösen nicht weiter reichen als bis $\frac{2}{3}$ der Zapfenlänge, weil bis dahin schon das ganze Drehmoment durch die Reibung übertragen wäre und im Restabschnitt plötzlich nichts mehr übertragen werden müßte. Offenbar findet ein Lösen nur rund bis zur Hälfte der Schrumpflänge statt, wie aus der Interpolation mit der gestrichelten Grenzkurve hervorgeht; auch läßt sich so die mittlere Fläche mit dem charakteristischen Verlauf der Kurven in Uebereinstimmung bringen.

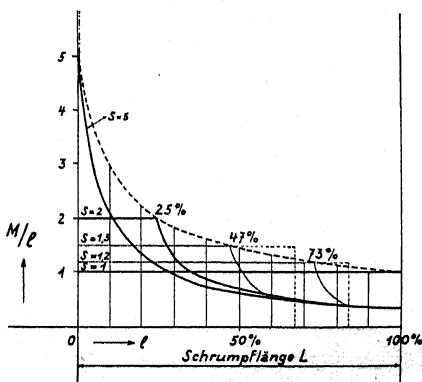


Abb. 3.

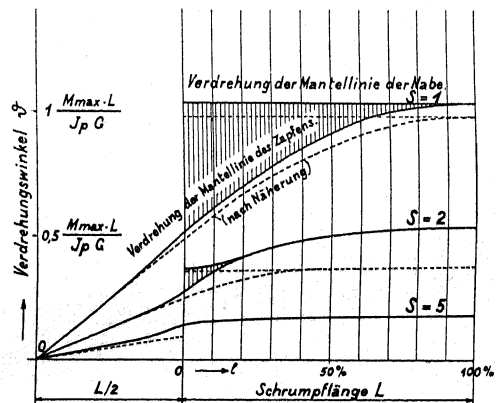


Abb. 4.

Die deformierte Mantellinie des Zapfens ist in Fig. 4 aufgetragen und zwar eine halbe Schrumpflänge vor der Nabe beginnend. Maßeinheit für den aufgetragenen Verdrehungswinkel ist derjenige, den die freie Welle, bezogen auf eine Schrumpflänge, erfahren würde, wenn sie mit dem für die Schrumpfverbindung maximalen Drehmoment beansprucht würde. — Bei Sicherheit 1 erfährt die Mantellinie der Nabe keine Verdrehung (nur eine Verschiebung), die des Zapfens geht aus der Steigung im freien Wellenende allmählich in die verdrehte Lage über. Die starke Verschiebung zwischen den im unverdrehten Zustande zusammenfallenden Mantellinien von Zapfen und Nabe, macht sich vor allem bei großen Drehmomenten geltend; bei doppelter Sicherheit ist die relative Verschiebung schon wesentlich kleiner. Diese relative Verschiebung entgegen der Reibungskraft ist gleichbedeutend mit einer Reibungsarbeit, deren Größe offenbar gegeben ist durch die zwischen den Deformationslinien gelegene schraffierte Fläche.

Dieser Reibungsarbeit kommt offenbar besonderes Interesse dann zu, wenn die Schrumpfverbindung ein stark wechselndes Drehmoment zu übertragen hat, etwa im Falle von Leistungsschwankungen oder von Torsionsschwingungen. Man wird sich fragen, was mit einer solchen wechselnd beanspruchten Schrumpfverbindung, die bis nahe an die Sicherheitsgrenze gegen Gleiten beansprucht wird, geschieht. Sicher ist, daß in der Schrumpfverbindung Reibungsarbeit aufgezehrt und deren Äquivalent als Wärme frei wird. Darüber hinaus kann zweierlei eintreten. Einmal können die gleitenden Flächen sich festfressen, was zu lokal erhöhten Umfangsspannungen an den betreffenden Stellen führen würde und wohl auch Anrisse in der Längsrichtung zur Folge haben könnte. Auch soweit dies nicht eintritt, besteht die Möglichkeit einer gegenseitigen Abnützung von Zapfen und Nabe in den gleitenden Flächen. Es wäre damit offenkundig ein «Altern» der Schrumpfverbindung im Sinne einer abnehmenden Sicherheit gegen Verdrehen verbunden.

Wie weit eine solche Gefahr besteht, könnte etwa durch Dauerversuche festgestellt werden, was bei kleinen Abmessungen mit den Mitteln der Materialprüfungsanstalten durchführbar wäre.

Der Maschinenbau wird die Schrumpfverbindungen auf genügenden Sicherheitsgrad berechnen, um Erscheinungen wie den geschilderten auszuweichen. Daß das konstruktive Gefühl mit dem gekennzeichneten Verlauf der Deformation sich vertraut machen sollte, sei noch kurz an Hand der Fig. 5 gezeigt. Eine Trommel ist auf einen Wellenstrumpf aufgezogen und zwar die gleichen Stücke in verschiedener Weise. Kraftein- und -Austritt liegen einmal am gleichen Ende, das andere Mal am entgegengesetzten. Die Folge ist, daß bei Uebertragung des maximalen Momentes im ersteren Fall die relative Verschiebung zwischen Zapfen und Trommel größer wird und damit die Reibungsarbeit auf den 4-fachen Betrag steigt. Die Berechnung wird übrigens in allen Fällen, wo wie hier die radiale Trommeldicke klein ist gegenüber den übrigen Abmessungen, elementar, so daß sich der Betrag der Reibungsarbeit ohne weiteres anschreiben läßt.

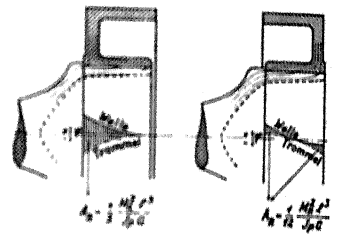


Abb. 5.

Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail*)

By S. Timoshenko, East-Pittsburgh (Pennsylvania, U. S. A.)

With the constant tendency in railway practice to increase the loading per axle, the problem of stresses in the rails becomes more and more important and means have to be found for their determination. In this paper a method is developed for calculating the vertical and lateral deflections of rails under the action of statical loading. The dynamical effects on the rail of a moving wheel due to unbalance or to low spots on the rail are also discussed in the paper.

I. Vertical Deflection of Rails

The following theory of vertical deflection of rails is based upon the assumption that the rail can be considered as a long bar continuously supported by an elastic foundation. Experiments have shown this assumption to be a good approximation and the results obtained on the basis of this theory are in very good agreement with experimental data. In the simplest case

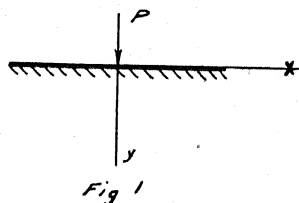


Fig. 1

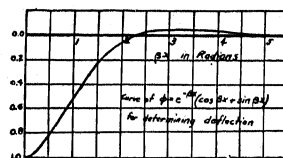


Fig. 2.

of a single load P acting on an infinitely long rail (fig. 1) let K = modulus of foundation, i. e. the load per unit length of the rail necessary to produce a deflection of the foundation equal to unity. EI = flexural rigidity of the rail and

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$$

Then from the known differential equation of the deflection curve

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -Ky \quad \dots \dots \dots (1)$$

we obtain

$$y = \frac{P\beta}{2K} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad \dots \dots \dots (2)$$

The corresponding deflection curve is shown in Fig. 2. The maximum deflection takes place under the load and is represented by the equation

$$\delta = (y)_{x=0} = \frac{P\beta}{2K} \quad \dots \dots \dots (3)$$

This equation is usually employed to calculate the modulus of foundation K provided the deflection of the rail under the known load has been measured.

*) The analysis here presented was carried on in connection with research work on track stresses now being undertaken by the Westinghouse El. & Mng. Co. for the purpose of obtaining data for the design of electric locomotives.

The wave length of the deflection curve depends on the magnitude of β . It increases with decrease of modulus K and with increase of flexural rigidity EI . For a 130 lb. rail ($I = 72.8 \text{ in.}^4$) and good track conditions we may take $K = 1500 \text{ lbs. per sq. in.}$ and $\beta \approx .020 \text{ in.}^{-1}$.

Knowing the values of these constants, the bending moment can easily be calculated from equation (2). This gives

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \quad \dots \quad (4)$$

which moment is represented graphically in Fig. 3. The maximum bending moment will be

$$M_{\max} = \frac{P}{4\beta} \quad \dots \quad (5)$$

Remembering that $\frac{1}{\beta}$ has the dimension of a length and the section modulus the dimension of a (length)³ it can be concluded that for geometrically similar cross sections the maximum bending stresses will be inversely proportional to the cross sectional areas.

Having the solution for the simplest case of a single load and using the principle of superposition, the deflection curve and bending moment diagram for any system of vertical loads can easily be obtained.

The inverse problem, i. e., of calculating the vertical pressures produced by locomotive wheels on the rail provided either the deflections or the stresses in the rail have been determined by experiment can also be solved without any difficulty. The application of such calculations to our experiments has always shown very good agreement¹⁾ between the sum of the calculated pressures and the actual weight of the locomotive used. This indicates that the fundamental assumption made which considers the rail as a bar on an elastic foundation is satisfactory.

II. Lateral Deflection of Rails

It is well known that under certain conditions locomotive wheels produce on the rail not only vertical but also great lateral pressures and the study of lateral deflection of rails under such conditions is of practical importance. Let a single lateral load H be acting on the rail

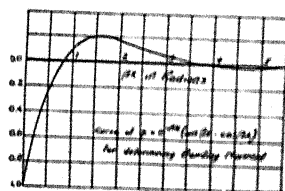


Fig. 3

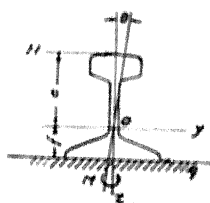


Fig. 4



Fig. 5

(Fig. 4). It is easy to see that under the action of such a load not only does a lateral deflection of the rail occur but twisting and local bending in the head of the rail also takes place.

Twisting of the Rail. If a rail with free ends is submitted to the action of two equal and opposite twisting couples M_T the angle of twist may be calculated from the known equation

$$\theta = \frac{M_T l}{C} \quad \dots \quad (6)$$

in which C = the torsional rigidity of the rail²⁾.

¹⁾ The difference between the calculated and actual weight never exceeded 8%.

²⁾ An actual test showed that in the case of rails the known S. VENANT's approximate formula $C = \frac{A^4 G}{40 I_p}$, in which A = area of the cross section, G = modulus of rigidity and I_p = polar moment of inertia, gives too large values for C .

If the ends of the rail are kept fixed and a torque moment $2M_T$ is applied at the middle cross section (Fig. 5) the twist of the rail will be accompanied by a bending of the head and base of the rail.

At any cross section at a distance x from the middle, the torque moment M_T will be transmitted partially in the form of simple twist and partially by bending of the head and base of the rail. Let M_1 and M_2 represent the first and the second parts respectively and θ denote the angle of twist shown in Fig. 6, then

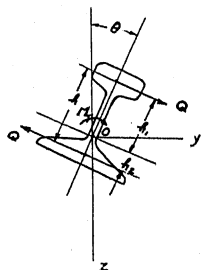


Fig. 6

$$M_1 = -C \frac{d\theta}{dx} \quad \dots \quad (7)$$

The part M_2 is represented in Fig. 6 by the couple Qh , in which Q denotes the shearing force due to bending in the head and base of the rail and h is the distance between the centers of the head and base sections. Neglecting bending of the web the position of the center of twist O will be determined by the distances

$$h_1 = \frac{h I_2}{I_1 + I_2}, \quad h_2 = \frac{h I_1}{I_1 + I_2}$$

in which I_1 and I_2 denote the moments of inertia of the head and of the base sections respectively.

The shearing forces Q will then be determined from the known equation

$$Q = EI_1 \frac{d^3 y}{dx^3} = EI_1 h_1 \frac{d^3 \theta}{dx^3}$$

which gives

$$M_2 = Qh = Eh^2 \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \frac{d^3 \theta}{dx^3} \quad \dots \quad (8)$$

If we make

$$\frac{EI_1 I_2}{I_1 + I_2} = D$$

the differential equation of twist becomes

$$M_T = M_1 + M_2 = -C \frac{d\theta}{dx} + Dh^2 \frac{d^3 \theta}{dx^3} \quad \dots \quad (9)$$

The solution of this equation for a very long rail is

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_T}{C} (1 - e^{-\gamma x}) \quad \dots \quad (10)$$

in which

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{Dh^2}}$$

In order to check equation (9) experiments were made on the twist of rail sections. The general arrangement of these experiments is shown in the photograph (Fig. 7, Plate XVII), from which it is seen how the torque moment was applied at the middle cross section. The angles of twist were measured optically. The tests gave results which were in good agreement with the equation (10).

Combined Bending and Twist of Rail. The combined bending and twist of a rail produced by a single lateral force H (Fig. 4) will now be considered. This force can be replaced by a force H at the center of twist O and by a couple He . Considering again the rail as a bar attached to a uniform elastic foundation, a continuous distribution of the reactive forces q and reactive moments m along the base of the deflected rail takes place. In the following discussion it is assumed that (1) the angle of twist of the rail at any cross section is proportional to m , and (2) the lateral deflection of the rail base is proportional to q . On the basis of these assumptions we have the equations

$$m = K_1 \theta \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$q = K_2 (y - f\theta) \quad \dots \dots \dots (12)$$

in which K_1 = the modulus of foundation with respect to twist, i. e., the torque moment per unit length of the rail necessary to produce a rotation of the rail about the longitudinal axis equal to one radian.

K_2 = modulus of foundation with respect to lateral deflection, i. e., the lateral load per unit length necessary to produce a lateral deflection of the base of the rail equal to unity.

y = lateral deflection of the center of twist of the rail.

Other notations are as shown in Fig. 4.

Considering one element of the rail of length dx (Fig. 5) the following equation of equilibrium against twist will be obtained

$$\frac{dM_r}{dx} dx = q f dx - m dx$$

or, by using the equations (9), (11) and (12)

$$-C \frac{d^2 \theta}{dx^2} + Dh^2 \frac{d^4 \theta}{dx^4} = K_2 (y - f\theta) f - K_1 \theta \quad \dots \dots \dots (13)$$

In considering the lateral bending of the rail, the known equation of the deflection curve

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -q = -K_2 (y - f\theta) \quad \dots \dots \dots (14)$$

can be written. These two simultaneous equations, (13) and (14), determine completely the lateral bending and twisting of the rail under the action of the force H .

In the section of application of the force H the following conditions must be satisfied.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{2} H \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad -C \frac{d\theta}{dx} + Dh^2 \frac{d^3 \theta}{dx^3} = \frac{1}{2} He$$

The other constants of integration must be chosen so as to make bending and twist of the rail disappear at infinity.

Example. If the dimensions of the rail are given and the moduli K_1 and K_2 are known, the calculation of the deflections and stresses from the equations (13) and (14) can easily be made. By taking, for instance, 130 lbs. rail

($EI = 4.02 \cdot 10^8$ lbs/sq. in., $C = 9.3 \cdot 10^7$ lbs/sq. in., $D = 8.0 \cdot 10^7$ lbs/sq. in., $h = 5.3$ in., $f = 1.90$ in.) and assuming $K_1 = 6.1 \cdot 10^5$ lbs/sq. in., $K_2 = 1.5 \cdot 10^4$ lbs/sq. in., the following expression for the angle of twist has been obtained³⁾

$$\theta = H 10^{-7} (5.36 e^{-.094 x} - 2.53 e^{-.179 x} + 1.10 e^{-.0553 x} \sin .0538 x + .151 e^{-.0553 x} \cos .0538 x)$$

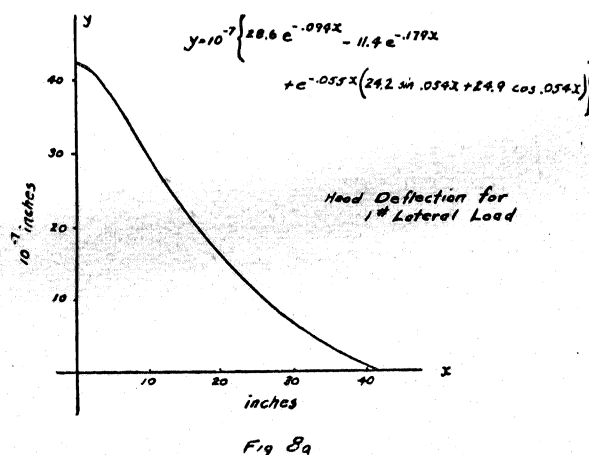
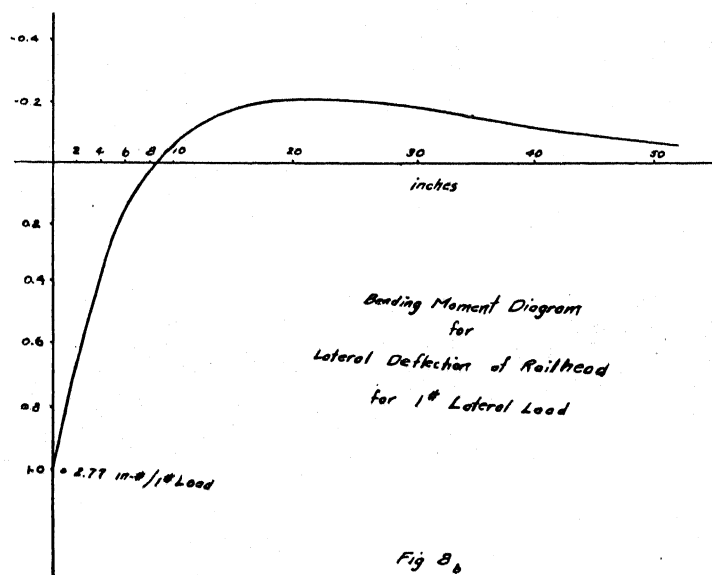
³⁾ These calculations were made by Mr. J. P. DEN HARTOG, of our Research Department.

The lateral deflection of the head of the rail will be as follows:

$$y_1 = y + \theta e = H 10^{-7} (28.6 e^{-.094 x} - 11.4 e^{-.179 x} + 24.2 e^{-.0553 x} \sin .0538 x + 24.9 e^{-.0553 x} \cos .0538 x).$$

The lateral deflection curve of the head of the rail and the diagram for the lateral bending moment are shown in Fig. 8.

It should be noted that the bending of the head of the rail is of a highly localized character, therefore if several lateral forces, such as lateral pressures produced by locomotive wheels, are acting on the rail the maximum stress produced in the head of the rail by one of



these forces will not be substantially affected by the other forces. This makes it possible to use the measurements of rail-head stresses during the motion of locomotive for calculating the lateral action of locomotive wheels on the track.

Applications. In order to obtain the vertical and the lateral components of the pressure of a wheel on the rail in the field it is necessary to take stress measurements in three fibres as shown in Fig. 9. It is easy to see that the average of the stresses at a and b $\frac{(a) + (b)}{2}$ is not affected by lateral bending or twist and can be used for calculating the vertical load P . The

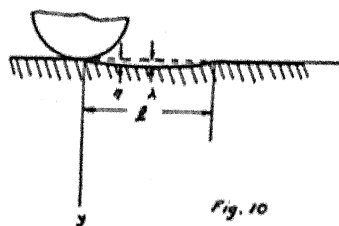
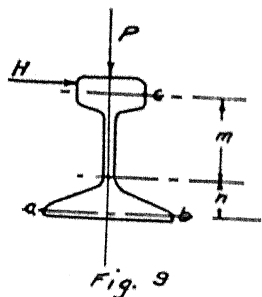
stress at c will depend on both P and H . Subtracting the effect of P , the remaining part, viz. (c) $-\frac{(a) + (b)}{2} \frac{m}{n}$ can be used for the calculation of the lateral force H .

In order to obtain sufficient data for calculating from the above theory the vertical and lateral actions of a moving locomotive on the track, it is only necessary to make two following preliminary statical tests in the field. A measurement of the vertical deflection and stresses produced by the load P at the points a , b and c (see Fig. 9) must be made together with a measurement of the lateral deflection and stresses produced by the lateral force H at the same points a , b and c , the rail being still vertically loaded.

Experiments made in the field have shown that the scheme of stress measurements as shown in Fig. 9, together with the method of calculating vertical and lateral forces based on these measurements is very satisfactory for obtaining a complete picture of the action of a locomotive on the track.

III. Dynamical Stresses in Track

The dynamical deflection of the rail and the dynamical stresses under the action of the moving wheels of a locomotive may become much larger than those calculated on the basis of the static formula discussed above. There are various causes which may produce such an increase in deflection and stress, some of which are discussed below in three groups, a , b and c .



(a) Variation in the forces acting on the rail caused by variable spring forces on the wheel; the vertical component of the centrifugal force of the counterweights and the vertical component of the forces in the connecting rods.

(b) Different kinds of irregularities in the shape of the wheel or rail, such as flat spots on the rim, low spots on the rail and discontinuities at the rail joints.

(c) Vibration of the rails under moving loads.

In discussing the causes mentioned in (a) it should be noted that the corresponding periodical forces have low frequencies as compared with the frequency of vibration of the wheel on the rail, therefore their effect on the deflections and stresses in the rails can be calculated without substantial error in a statical way.

Stresses produced in railway track by the effect of low spots can be calculated as follows: Let η = variable depth of the low spot (see Fig. 10).

$\frac{W}{g}$ = dead mass per wheel

y = deflection of the rail under the wheel

$a = \frac{2K}{\beta}$ = the vertical load necessary to produce a deflection equal to unity (see Eq. 3).

The differential equation of motion of the wheel in a vertical direction then becomes

$$\frac{W}{g} \frac{d^2(y + \eta)}{dt^2} + \alpha y = 0 \quad \text{or} \quad \frac{W}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha y = -\frac{W}{g} \frac{d^2 \eta}{dt^2} \quad \dots \dots \dots (15)$$

When the shape of the low spot and the speed of the locomotive are known η can easily be expressed as a function of the time. Assuming, for instance, that the shape of the low spot is given by the equation

$$\eta = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad \dots \dots \dots (16)$$

in which

l = length of the low spot

λ = depth of the spot at the middle of its length and that at the initial moment ($t = 0$) the point of contact of the wheel coincides with the beginning of the low spot, then denoting by v the constant speed of the locomotive, we have $x = vt$. Substituting this in equation (16), we get

$$\eta = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{l} \right)$$

$$-\frac{W}{g} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -\frac{W}{g} \frac{\lambda}{2} \frac{4\pi^2 v^2}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l}$$

Now, from equation (15), we obtain

$$y = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right)^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{\tau_1} - \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) \quad \dots \dots \dots (17)$$

In which

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{W}{\alpha g}} = \text{the period of vibration of the wheel on the rail}$$

$$\tau_1 = \frac{l}{v} = \text{time it takes the wheel to cross low spot.}$$

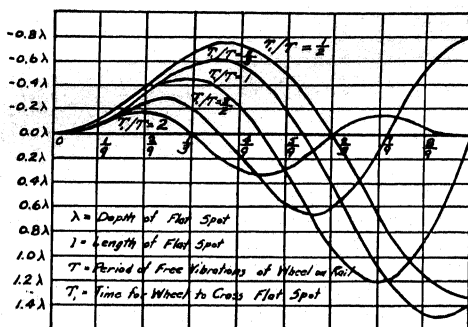


Fig. 11

It is seen that this additional dynamical deflection is proportional to the depth of the spot λ and depends on the magnitude of the ratio $\frac{\tau_1}{\tau}$. The variation of this deflection of the rail under the wheel in the interval $0 < t < \tau_1$ for different values of the ratio $\frac{\tau_1}{\tau}$ is represented in fig. 11.

It should be noted that at the instant the wheel reaches the edge of the low spot the pressure on the rail and the deflection begin to diminish while the wheel begins to accelerate in a downward direction. The retardation of this movement then begins and with it an increase in pressure and deflection, as seen from the figure. The values of the maximum deflection, calculated from equation (17) for different values of the ratio $\frac{\tau_1}{\tau}$, are given in the table below:

$\frac{\tau_1}{\tau}$	=	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{y_{max}}{\lambda}$	=	0.33	0.65	1.21	1.41	1.47	1.45	1.33

A maximum deflection, equal to about 1.47 λ , occurs at the speed corresponding to $\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{2}{3}$. Thus a comparatively small low spot produces, at certain speeds, very appreciable dynamic effect which must be added to the deflection calculated from static conditions (Eq. 3). Similar results can be obtained for low spots of different shapes.

In the general case given by

$$-\frac{W}{K} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = F(t)$$

we obtain the solution of equation (15) in the following general form:

$$y = \frac{g}{W} \frac{\tau}{2\pi} \int_0^t F(t) \sin \frac{2\pi}{\tau} (t_1 - t) dt \quad \dots \dots \dots (18)$$

The calculations made for several different shapes of the low spot showed that the ratio $\frac{y_{max}}{\lambda}$ does not depend substantially on the shape of the low spot provided it is represented by a continuous curve and that the figures of the above table can be used for approximate calculations of the corresponding dynamical effect.

Vibration of Rails: In all the considerations presented above the mass of the vibrating part of the rail has been neglected in comparison with that of the wheel. The error involved in this simplification of the problem is negligible only if the time τ_1 required for the wheel to pass over the spot is long enough in comparison with the period of the fundamental type of free vibration of the rail on the elastic foundation. This period can be calculated in a very simple manner by taking into consideration the fact that the fundamental type of vibration consists of an oscillation of the rail as an absolutely rigid body in a vertical direction.

Let q = weight of the rail per unit length.

K = modulus of foundation for bending in vertical plane. (See paragraph 1.)

The statical deflection of the rail due to its proper weight is $\frac{q}{K}$ and the period τ_2 of the fundamental type of vibration will be

$$\tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{q}{gK}} \quad \dots \dots \dots (19)$$

Taking, for instance, an 130 lbs. rail and $K = 1500$ lbs./sq. in.

$$\tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{130}{386 \times 36 \times 1500}} = .0157 \text{ sec.}$$

Only for cases in which τ_1 is large in comparison with this value of τ_2 is the above theory of the dynamical effect of a low spot accurate enough.

Now the vibrations produced by a periodical vertical disturbing force $P = P_0 \sin \omega t$ acting on the rail at a given point (Fig. 1) will be considered.

The differential equation of vibration of a bar on an elastic foundation is ⁴⁾

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + Ky = 0 \quad \dots \dots \dots (20)$$

By taking the forced vibrations of the rail in the form

$$y = X \sin \omega t \quad \dots \dots \dots (a)$$

in which X is a function of x only, and substituting (a) in equation (20) we obtain

$$EI X^{IV} + \left(K - \frac{q \omega^2}{g} \right) X = 0$$

It is seen that the deflection of the rail under dynamic condition can be calculated in the same manner as in the case of statics (see Equation 1) it is only necessary to take instead of the modulus of foundation K a smaller quantity

$$K_1 = K \left(1 - \frac{q \omega^2}{g K} \right) = K \left(1 - \frac{\tau_2^2}{\tau_3^2} \right)$$

in which $\tau_3 = \frac{2\pi}{\omega}$ = the period of the disturbing force. When the period τ_3 of disturbing force is large enough in comparison with τ_2 the difference between the static and dynamic deflections will be small and can be neglected.

The deflection of the rail under the action of a constant vertical force P moving along the rail with a constant speed v will now be considered. Assume that the rail is supported along the length by a continuous elastic foundation and at the ends by rigid supports as shown

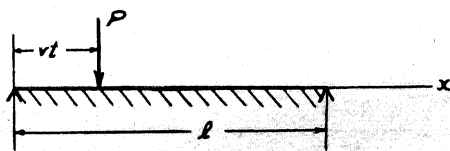


Fig. 12

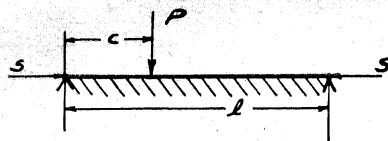


Fig. 13

in Fig. 12. The general expression for the deflection curve can be taken in the form of trigonometrical series as follows:

$$y = \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \varphi_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \dots \dots (21)$$

in which φ_1 , φ_2 and φ_3 are the generalized coordinates of the system. The kinetic energy of the system will be

$$T = \frac{q}{2g} \int_0^l \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dx = \frac{q l}{4g} \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{\varphi}_n)^2 \quad \dots \dots \dots (22)$$

⁴⁾ The mass of the vibrating foundation is neglected in the following consideration.

The potential energy V of the system consists of two parts, the energy of bending

$$V_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI \pi^4}{4 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \varphi_n^2 \quad \dots \quad (23)$$

and of energy of deformation of elastic foundation

$$V_2 = \frac{K}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{K l^3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \quad \dots \quad (24)$$

Substituting this in Lagrange's differential equation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_n} = \Phi_n$$

and taking into consideration the fact that the generalized force corresponding to the coordinate φ_n is

$$\Phi_n = P \sin \frac{n \pi x}{l}$$

we obtain

$$\ddot{\varphi}_n + \frac{2K}{ql} \left(\frac{EI \pi^4 n^4}{2 l^3} + \frac{K l^3}{2} \right) \varphi_n = \frac{2K}{ql} P \sin \frac{n \pi x}{l} \quad \dots \quad (25)$$

The corresponding forced vibration ⁵⁾ is

$$\varphi_n = \frac{2 P l^3}{EI \pi^4} \frac{\sin \frac{n \pi x}{l}}{n^4 + \frac{K l^4}{EI \pi^4} - n^2 \frac{v^2 q}{K} \frac{l^2}{EI \pi^2}}$$

Substituting this in equation (21) the following expression for the dynamical deflection of the rail will be obtained

$$y = \frac{2 P l^3}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi vt}{l}}{n^4 + \frac{K l^4}{EI \pi^4} - \frac{n^2 v^2 q}{K} \frac{l^2}{EI \pi^2}} \quad \dots \quad (26)$$

By taking in this equation $v = 0$ and $vt = c$ the deflection curve for a statical load P distant c from the left support (see Fig. 12) will be obtained.

In order to make a conclusion about the effect of the speed v on the magnitude of deflection, the dynamical deflection curve (26) will now be compared with the statical deflection of a bar which, in addition to bending by the force P , is compressed by forces S as shown in Fig. 13. By using the general expression (21) of the deflection curve and equations (23) and (24) the potential energy of deformation becomes

$$V = \frac{EI \pi^4}{4 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \varphi_n^2 + \frac{K l^3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \quad \dots \quad (27)$$

⁵⁾ Free vibrations of the rail, produced by a moving force P , are not considered here. It is assumed that they are compensated by the initial free vibrations.

The work done by the compressive forces S during the deformation will be

$$\frac{S}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{S \pi^2}{4 l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \varphi_n^2 \quad \dots \quad (28)$$

Applying now the principle of virtual displacements, we have

$$P \delta \varphi_n \sin \frac{n \pi c}{l} + \frac{S \pi^2}{2 l} n^2 \varphi_n \delta \varphi_n = \frac{\partial V}{\partial \varphi_n} = \left(\frac{EI \pi^4}{2 l^3} n^4 \varphi_n + \frac{K l}{2} \varphi_n \right)$$

from which

$$\varphi_n = \frac{2 P l^3}{EI \pi^4} \frac{\sin \frac{n \pi c}{l}}{n^4 + \frac{K l^4}{EI \pi^4} - \frac{S l^2}{EI \pi^2} n^2}$$

Substituting in equation (21), the following equation for the deflection curve will be obtained:

$$y = \frac{2 P l^3}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n \pi c}{l} \sin \frac{n \pi x}{l}}{n^4 + \frac{K l^4}{EI \pi^4} - \frac{S l^2}{EI \pi^2} n^2} \quad \dots \quad (29)$$

Comparing this with equation (26) of the forced vibrations, it can be concluded that the effect on the deflection of the speed v of the moving force P is the same as that of an additional compressive force S determined by the equation

$$S = \frac{v^2 q}{g} \quad \dots \quad (30)$$

This conclusion will hold also in the case of an infinitely long bar and can be used in the case of rails as follows: It is well known that in the case of a long bar on elastic foundation by a gradual increase of longitudinal compressive force S the condition can be reached in which the straight form of equilibrium of the bar becomes unstable and lateral buckling takes place. This critical value of the compressive force is ⁶⁾

$$S_{cr} = 2 \sqrt{K EI} \quad \dots \quad (31)$$

The effect of the compressive force S on the deflection of the long bar under the load P (Fig. 13) depends on the ratio

$$S : S_{cr} = \gamma$$

and the following equation for maximum deflection instead of equation 3 can be obtained:

$$\delta_d = \frac{P \beta}{2 K} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma}} \quad \dots \quad (32)$$

⁶⁾ See Author's book, Theory of Elasticity, Vol. II, p. 135.

From the previous discussion and from equation (30) it follows that equation (32) can be used also for calculating deflections produced in the rail by vertical force P moving with the velocity v , it is only necessary to substitute in it

$$Y = \frac{v^2}{v_{cr}^2}$$

where

$$v_{cr}^2 = \frac{S_{cr}^2 g}{q} = \frac{2g}{q} \sqrt{K EI} \dots \dots \dots (33)$$

It should be noted that v_{cr} becomes usually very large in comparison with the speed v of motion and the difference between the deflection obtained from equation (32) and statical deflection, given by equation (3), will be a very small one. Taking, for instance, a 130 lb. rail and assuming $K = 1500$ lbs/sq. in. we obtain, from equation (33), $v_{cr} \approx 1640$ feet per second, i. e., about ten times larger than the highest speed of a locomotive, and therefore the difference between the deflections (32) and (3) will be always less than $\frac{1}{2}\%$ and statical equations can be used.

Stress Concentration Produced by Fillets and Holes

By S. Timoshenko, East Pittsburgh (Pennsylvania U. S. A.)

(See Plate XVIII for figures 8, 9, 10)

It is well known that holes, sharp reentrant corners, and rapid changes of section produce high stress concentration in machine parts. This stress concentration is particularly undesirable where materials undergo reversal of stress, because under the action of such stress a progressive crack may start from the regions of high stress concentration and fracture ensue. The majority of fractures in service can be attributed to such kind of cracks. The study of such stress concentration is therefore of great importance. This study can be carried out in several ways; either by analysis, photo elasticity, LÜDERS' lines or by fatigue test. All these methods are discussed in the following paragraphs.

Analytical Method. The analytical method has been successfully applied in the case of a plate with a circular ¹⁾ or an elliptical ²⁾ hole. For these two cases an exact solution of the two dimensional problem of elasticity was obtained. By applying the usual elementary theory of bending of curved bars an approximate solution for a circular hole with bead (fig. 1) can

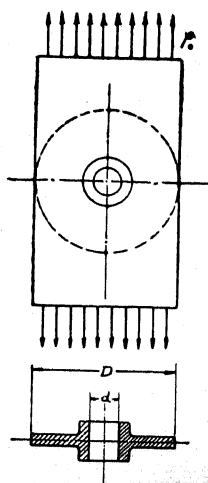


FIG. 1

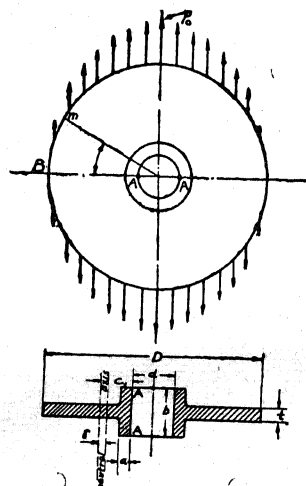


FIG. 2

also be obtained. This method is based on the fact that a hole produces only a local effect on the stress distribution in a plate such as shown in Fig. 1, and in points distant from the hole the stress will be about the same as in a plate without the hole. Imagine now that a circular ring is cut from the plate by a cylindrical surface of diameter D and that D is large in comparison with the diameter d of the hole. The action of the remaining part of the plate on the ring is shown in Fig. 2. The stress on the outer surface of the ring at any point m will be

$$p = p_0 \sin \varphi \dots \dots \dots (1)$$

where p_0 = tensile stress uniformly distributed over the ends of the plate.

The problem of stress concentration produced by the hole is now reduced to the calculation of stresses in a circular ring subjected to the action of known external forces and

¹⁾ KIRSCH, Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. 1898.

²⁾ G. KOLOSOFF, Dissertation (1910) Petrograd and C. E. INGLIS, Trans. Inst. Naval Architects, 1913.

having a \perp cross section as shown in fig. 2 by the shaded areas. This calculation can be made by using the elementary theory of bending of a curved bar with a circular axis. The complete stress at any point of the cross section AB consists of two parts, the stress p_1 due to tension, and the stress due to bending. The stress p_1 is uniformly distributed over the cross section and can be found from the simple equation

$$p_1 = \frac{p_0 t D}{2A} \dots \dots \dots (2)$$

in which

- p_0 = uniform tensile stress applied to the ends of the plate,
- t = thickness of the plate,
- A = area of the cross section of the ring

The maximum bending stress p_2 takes place at the points A (see fig. 2) and can be calculated from equation

$$p_2 = \frac{M_0 z (c_1 - \gamma)}{A \gamma d} \dots \dots \dots (3)$$

in which

- M_0 = bending moment acting in cross section AB
- c_1 = distance of points A from the center of gravity of the cross section AB (fig. 2).
- γ = distance of the neutral axis from the center of gravity of the cross section AB (fig. 2).

The calculations of p_2 have been made for various values of the cross section ab of the bead and for the case $D/d = 5^3$). The results of these calculations are given in Table I where the quantity α represents the ratio of the area of the bead cross section to the area of the diametral section of the hole and has the following meaning.

$$\alpha = \frac{A_b}{A_h} = \frac{a(b-t)}{td}$$

TABLE I.

$\alpha = \frac{A_b}{A_h}$.10	.20	.30	.40	.50
p_1/p_0	1.19	1.14	1.09	1.04	1.00
p_2/p_0	1.34	1.03	.81	.65	.53
$\frac{p_1 + p_2}{p_0} = K$	2.53	2.17	1.90	1.69	1.53

The complete stress at points A will be

$$p_{max} = p_1 + p_2 = K p_0 \dots \dots \dots (4)$$

where K represents the ratio of maximum stress to the tensile stress uniformly distributed over the end cross sections of the plate. This ratio is called *factor of stress concentration*. The values of this factor are also given in Table I. From this table it is clearly seen how the maximum stress diminishes with increase in the cross section of the bead. By applying this approximate method to the case of a circular hole without bead, in which case an exact

³⁾ Preliminary calculations showed that the maximum stress remains practically constant when this ratio varies within the limits $4 < D/d < 6$. See paper by writer in Journal of the Franklin Inst. April, 1924.

solution is available, it can be concluded that the approximate method, described here, has an accuracy sufficient for practical applications. The method can be applied also in other cases, for instance, in the case of an elliptical hole reinforced with a bead or in the case of reentrant corners in a frame such as shown in figure 3.

Photo-elastic Method. The investigation of stress concentration in the case of two dimensional problems of elasticity can be made experimentally by using models of transparent material such as celluloid and by studying the colored effect produced in such models by stressing them in the field of polarized light. As an example of such an investigation some data on the stress distribution at the tooth root of a gear are given below⁴). By using a simple bending formula the linear law of stress distribution as shown by the line *sos* in figure 4 will be obtained.

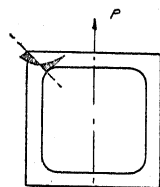


FIG.3

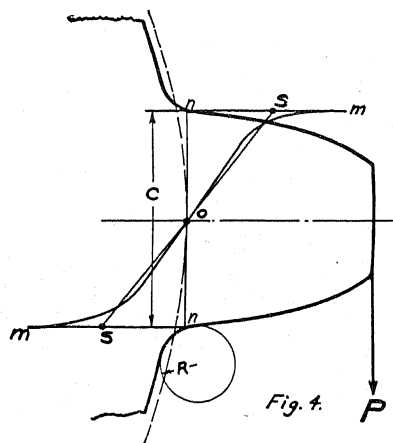


Fig. 4.

In reality considerable stress concentration takes place at the fillets at the root of the tooth and the actual stress distribution over the cross section *nn* will be as shown in figure 4 by the curve *mom*. The ratio of the maximum stress at the fillet to the stress calculated from the simple beam formula will be called in this case the factor of stress concentration. In order to obtain the factors of stress concentration for various tooth proportions some experimental

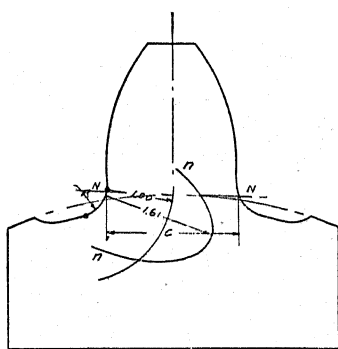


Fig. 5

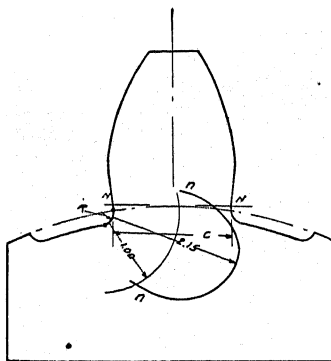


Fig. 6

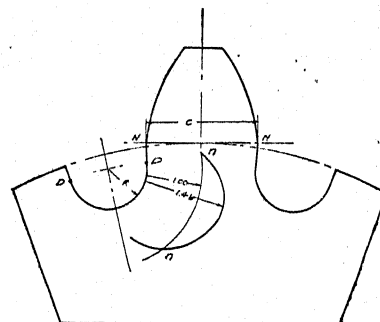


FIG.7

work was carried out in which the photo elastic method was employed. The models used in this investigation are shown in figures 5, 6 and 7. The first model (fig. 5) was designed according to proportions widely used in U. S. A. The second model (fig. 6) was designed with a fillet radius which may be considered as the minimum radius of fillet, according to the

⁴) This investigation was made in collaboration with Mr. R. V. BAUD, who is at present in charge of photo elastic work.

report of the Tooth Form Committee of the American Gear Manufacturers' Association. The third model (fig. 7) had the same layout as the first. Instead, however, of two fillets a semi-circular arc was chosen. These models were made from $\frac{1}{4}$ " thick celluloid and subjected to bending by a load applied at the end as is shown in figure 4. The stresses along the fillets were measured by the compensation method developed by Prof. E. G. COKER. The variation of stress along the edges of the fillets are represented graphically by curves $n-n$ in figs. 5—7. Unit stress was taken as the maximum bending stress obtained by the usual beam formula for the cross section $N-N$ tangent to the working depth circle and of the width C . These factors of stress concentration as found for the three models tested (figs. 5, 6 and 7) are as given in the table.

TABLE II.

Fig.	$\frac{K}{C}$	K
6	0.104	2.15
5	0.260	1.61
7	0.375	1.46

It is seen that these factors depend principally on the ratio $\frac{K}{C}$, in which K denotes the radius of fillet and C the thickness of the tooth. In the case of a ductile material the weakening effect of stress concentration is diminished by the yielding of the material at points of highest stress, but in the case of gears which have, by severe quenching obtained a high degree of hardness, the material at the tooth root may not have sufficient ductility and the full weakening effect of the stress concentration as given above must be taken into account in design.

Lüders' Lines Method. If a mild steel tensile test specimen be highly polished and subjected to an increasing load, very definite inclined lines will appear on the surface as the load approaches the yield point. These lines, known as «Lüders' lines», are well defined (fig. 8) and can be used to establish the regions of highest stress concentration in a model of any machine part as well as the approximate magnitude of the factor of this stress concentration. To establish this magnitude the following procedure was adopted. An ordinary tensile test of a polished specimen was made to ascertain the stress at which the «lines» appear for a particular material. Models of the same material having definite fillets or circular holes were then loaded until the Lüders' lines became visible in the over-stressed regions.

By this means an indication is obtained of the points of highest stress concentration. In photographs 9 and 10 (Plate XVIII) the Lüders' lines at the fillet and at the edge of a circular hole in a plate under tension are seen. In order to obtain the magnitude of the factor of stress concentration it was only necessary to divide the «limiting stress» at which the Lüders' lines appeared in the ordinary tensile test specimen (fig. 8, Plate XVIII) by the maximum stress in the model as obtained by usual formula of strength of materials. For instance, in the case of a plate with a circular hole (fig. 10) the «limiting stress» must be divided by the average tensile stress over the cross section through the hole. The factor of stress concentration obtained in this way is usually lower than that given by the photo-elastic method. This is mainly due to the fact that the region of stress concentration is usually small in order to observe easily the lines at the moment they are formed. Considerable time therefore elapses from their beginning before they become clearly visible. In order to get greater accuracy in calculating the factors of stress concentration large models with large radii of holes and fillets had to be used. In

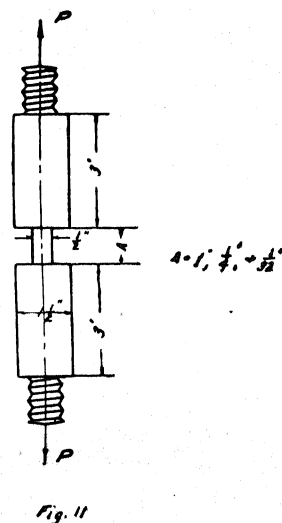
our case these radii were as large as $\frac{1}{2}$ " and the factors of stress concentration obtained by the Lüders' lines were about 25 % lower than those given by the photo elastic method. It must be noted that this method of testing is not confined to any particular type of problem and has the advantage over the photo-elastic method in that it is applicable to three-dimensional problems.

Fatigue Test Method. In considering the weakening effect of stress concentration on the ultimate strength of the structure it is necessary to keep in mind that the factors of stress concentration obtained either analytically or by using the photo-elastic method are true only within the elastic limit of the material. Beyond this limit the effect of stress concentration depends on the type of loading and on the ductility of the material. For ductile materials, as for example mild steel, with an increase of loading beyond the elastic limit the local stresses in the overstressed region will not increase in the same proportion due to yielding of the material, and in the case of tensile tests of bars with holes or notches the stress distribution over the weakened cross section at the moment of break can be considered as uniform. This means that stress concentration in this case will not have a weakening effect on the ultimate strength of the bar.

If the ultimate strength is calculated on the original area of the cross section some increase in the ultimate strength may be expected due to the fact that the lateral contraction at the weakened cross section will be to some extent prevented. In order to prove this, several tensile tests on notched bars of carbon steel were made. The test bar had the form shown in fig. 11. The results of these are given in the table below.

TABLE III.

Kind of specimen	Ult. Str. on original area	Ult. Str. on the final area
Standard	70,000 lbs./sq. in.	170,000 lbs./sq. in.
1" slot	70,000 " " "	156,000 " " "
$\frac{1}{4}$ " "	88,000 " " "	149,000 " " "
$\frac{1}{32}$ " "	124,000 " " "	141,000 " " "



From this table it is seen at once that the strength of the notched bars depends on the width of the notch, i. e., on the degree in which the lateral contraction is prevented. A further point brought out by these tests is that the appearance of the fractures depends entirely on the allowable contraction. For the case of test bar with $\frac{1}{32}$ " notch the fractures are always lustrous in appearance and must have been intercrystalline, whereas the fractures of test bar with 1" notch are typical of a ductile material as shown by the standard test bar fractures. Quite another effect of stress concentration will be obtained in the case of a brittle material. In this case plastic deformation, allowing equalization of stresses over the weakened cross section, does not occur and the break will start from the points of highest concentration of stress. For a material such as glass, holes and notches will diminish the ultimate strength in a ratio which agrees approximately with the factors of stress concentration calculated or obtained by the photo-elastic method.

The most important effect of stress concentration obtains however, in the cases where a reversal of stress takes place. In such cases the stress concentration produces a weakening effect not only in brittle but also on ductile materials. Due to reversal of stress at points of

high local stresses the development of a crack begins which gradually spreads over the weakened cross section of the structure and finally produces failure. This occurs at a loading much lower than could be expected on the basis of the usual theory. In order to procure some data

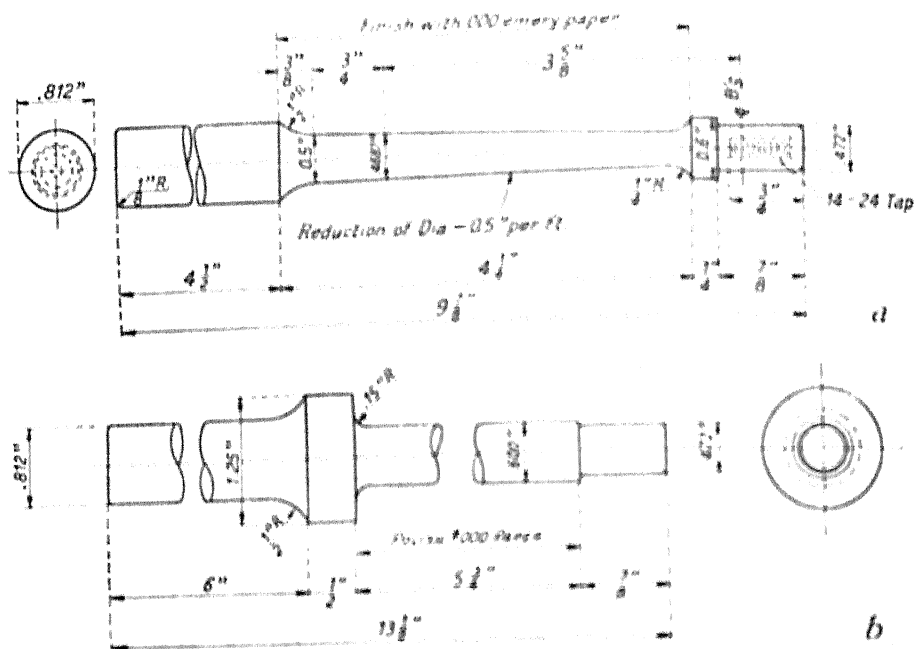


Fig. 12.

for such conditions fatigue tests were made on standard test bars (see fig. 12a) and also on cylindrical specimens having proportions shown in fig. 12b. For this work a cantilever fatigue testing machine was employed in which the reversal of stress was produced in the rotating specimen by a constant vertical load.

The results of the fatigue tests are given in the table below ⁵⁾

TABLE IV.

1	2	3	4	5	6	7	8
Material	Prop. Limit lbs./in. ²	Yield Point lbs./in. ²	Ult. lbs./in. ²	Flang. %	Endurance Limit Mean spec. lbs./in. ²	Spec. with fillets lbs./in. ²	Weaken- ing effect
Carbon Steel Heat Treated	57000	62000	107000	21.3	47000	29000	1.62
Nickel Chrom. Steel	73000	74500	106000	26.5	52500	31500	1.67
Low Mang. Steel	41500	47000	87300	29.6	36000	24500	1.47
" " treated	60200	62500	101000	25.0	46000	24000	1.92
High Mang. Steel	67500	69000	107000	25.3	49500	34000	1.45
" " treated	78000	83000	113000	24.2	55000	30000	1.83

In columns 2—5 the mechanical properties of materials as obtained on the standard tensile test specimens are given. In column 6 of the table, the endurance limits are given

⁵⁾ These results were obtained in collaboration with P. L. Lawrie, who is in charge of fatigue test work.

which were obtained from tests on standard fatigue test specimens where the action of stress concentration was excluded. In column 7 the endurance limits are given for specimens with fillets (fig. 12b) calculated on the basis of the simple bending formula. The ratio of the figures given in columns 6 and 7 represents the weakening effect of the fillets. It should be noted that this effect is always less than the factor of stress concentration for the corresponding two dimensional problems, as found by photo-elastic experiments. This quantity, for the same fillet proportions as in fig. 12b, should be about 2.50. In the case of cylindrical specimens the stress concentration is not so pronounced as in the two-dimensional and this can partially explain the comparatively low figures of column 8. Another reason for this can be seen in the fact that in the case of specimens with fillets, the section of fracture is predetermined due to highly localized stress concentration while in the standard fatigue test specimens the maximum stress remains constant along a large portion of the specimen and the crack begins in the weakest cross section. It should be further noted that there is no definite relation between the weakening effect of stress concentration and the ductility of material as given by the elongation of the standard tensile test specimens. It is interesting to note also that in the case of manganese

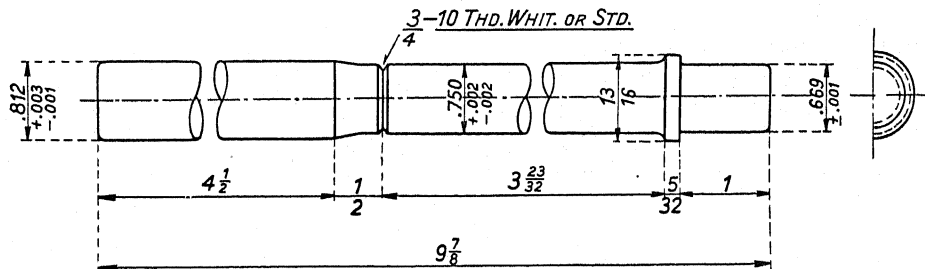


Fig. 13.

steel the heat treatment which considerably raises the proportional limit and the endurance limit of the material does not strengthen the specimens with fillets and the weakening effect of stress concentration for this material becomes higher than for any other material tested.

As another example of weakening effect of stress concentration some fatigue test data were obtained on cylindrical specimens having two different kinds of grooves (fig. 13), will now be given.

1. similar to Whitworth thread and
2. similar to United States Standard thread.

In both cases the dimensions correspond to 10 threads per inch. The material used in these tests had the following mechanical properties:

Proportional Limit	= 37,500 lbs./sq. in.
Yield Point	= 40,500 " " "
Ultimate Strength	= 72,000 " " "
Extension in 2 in.	= 33 %
Reduction of area	= 54 %
Endurance Limit	= 29,500 lbs./sq. in.

On the basis of these two series of tests it was found that the endurance limit for a Whitworth thread groove is equal to 15,000 lbs./sq. in. while that for the United States Standard is equal to 13,500 lbs./sq. in. These values were obtained by applying the usual bending formula and by using the cross section at the bottom of the groove. The ratios

$$n_1 = \frac{29500}{15000} = 1.97 \quad \text{and} \quad n_2 = \frac{29500}{13500} = 2.18$$

of the endurance limit as obtained by testing standard pieces, to that obtained for the grooved specimens represent the weakening effects produced by a single groove of Whitworth thread profile and a single groove of United States Standard thread profile respectively.

On the basis of experiments made with grooved specimens for the Aeronautical Research Committee (England) ⁶⁾ the following formula was established for calculating the weakening effect of a single groove

$$n = 1 + .45 \sqrt{\frac{d}{r}}$$

in which

d = the depth of the groove

r = the radius at the bottom of the groove

Applying this equation to our case of the Whitworth thread and taking

$$d = .0640 \text{ in. and } r = .0160 \text{ in.}$$

we have

$$n = 1 + .45 \sqrt{\frac{.0640}{.0160}} = 1.88$$

which is in good agreement with the factor n , obtained above on the basis of our tests.

Conclusions. On the basis of the analytical solutions and experimental data given above, it can be concluded that in many practical cases a very high stress concentration is produced by holes, grooves, and sharp variation of cross section. In the case of ductile materials this stress concentration does not have a weakening effect under static loading. In the cases, however, of brittle material or ductile material under the action of stress reversal, the weakening effect of stress concentration may become of prime importance and it must be taken into consideration in actual design.

The weakening effect of stress concentration in the case of ductile material submitted to the action of stress reversal can be established accurately enough only on the basis of fatigue tests of models of the machine parts under consideration. Tests of this kind are now in progress in the Research Laboratory of the Westinghouse Electric & Manufacturing Company.

⁶⁾ See paper No. 860, by W. NORMAN THOMAS.

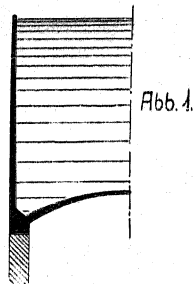
Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwandigen, kreisrunden Behältern

Von P. Pasternak, Zürich

Bei kreisrunden Behältern in Eisen- und Eisenbetonkonstruktion treten infolge der monolithischen Verbindung der Wand mit den gewölbten Böden und Decken hauptsächlich *Meridianbiegemomente* als Zusatzkräfte auf. Ihre Berechnung, die besonders bei Eisenbetonbehältern zur Bemessung der Biegebewehrung in den Knickstellen von Wichtigkeit ist, kann nach der baustatischen Methode der Elastizitätsgleichungen auf zwei Wegen ¹⁾* erfolgen: 1. nach der *Kraftmethode*, ausgehend von den gegenseitig frei drehbar und verschieblich gelagerten Einzelschalen oder auch 2. nach der *Deformationsmethode*, die als Grundsystem die an den Rändern gegen Drehen und Verschieben festgehaltenen, also *starr eingespannt* gedachten Einzelschalen wählt. Die zweite Methode ist besonders dann von Vorteil, wenn die Böden und Decken an die Wände durch besondere Fußringe (Zugringe), deren größere Steifigkeit im Kräftespiel berücksichtigt werden soll, angeschlossen oder auch mehrere Schalen im gleichen Knotenkreis monolithisch miteinander verbunden sind. Es treten dann nur zwei Ueberschüssige auf — Ringdrehung und -Dehnung —, während nach der Kraftmethode in diesem Fall an derselben Knickstelle mit vier Ueberschüssigen zu rechnen ist.

Im Prinzip gestaltet sich also die Erschließung der statischen Unbestimmtheit in kreisrunden Behältern ganz einfach; in der numerischen Durchführung wird sie aber, schon im einfachsten Falle konstanter Wandstärken, sehr zeitraubend, wenn zur Bestimmung der Einflußzahlen der elastischen Schalenrandbewegungen, bezw. Festhaltungskräfte (die als Summanden in die Matrixvorzahlen der Elastizitätsgleichungen treten) die strengen Reihenentwicklungen von O. BLUMENTHAL ²⁾ oder E. MEISSNER ³⁾ benützt werden.

Ich habe deswegen schon früher ⁴⁾, aus dem Bedürfnis der Praxis heraus, einfache, bei konstanter Schalenwandstärke gültige Näherungsformeln für die Einflußzahlen der Kugel- und Kegelschalen aufgestellt, die nun auf beliebig geformte Schalen mit nur *schwach sich ändernden Schalenabmessungen* erweitert werden sollen. Der Nachsatz bildet für die praktische Verwendung der mitzuteilenden Formeln keine Einschränkung, da die dünnwandigen Behälter in Eisen und Eisenbeton in der Tat der genannten Bedingung entsprechen, bis auf die in den Anschlußkreisen, aus statischen und praktischen Gründen, gebräuchlichen voutenartigen Verstärkungen, die aber zu den Fußringen gerechnet und, wie schon erwähnt, leicht nach der Deformationsmethode im Kräftespiel Berücksichtigung finden können. (Abb. 1.) Es wird gezeigt, daß



1. die von GECKELER ⁵⁾ vorgeschlagene und nur für *sehr dünne und nicht flache Schalen* gültige Näherungslösung auf einfachstem Wege unmittelbar gewonnen werden kann und sich aus ihr sehr einfache Ausdrücke für die Einflußzahlen ergeben;

2. aus den allgemeinen, in Erweiterung der REISSNERSchen Entwicklungen ⁶⁾ zuerst von E. MEISSNER ⁷⁾ aufgestellten Differentialgleichungen des Schalenbiegeproblems, für die eine anschauliche Ableitung gegeben wird, *allgemeiner gültige* Näherungsformeln für die Einflußzahlen folgen;

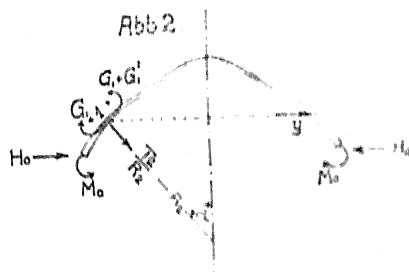
3. wird das von O. BLUMENTHAL ²⁾ bei der Kugelschale konstanter Wandstärke zuerst

*) Diese Ziffern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis, siehe jeweils dort bei der betreffenden Nummer.

verwendete asymptotische Integrationsverfahren durch die MEISSNERsche Zerfallsbedingung³⁾ vereinfacht und am Beispiel einer flachen Eisenbetonschale zur Nachprüfung der aufgestellten Näherungslösungen verwendet.

Wo keine neuen Bezeichnungen eingeführt werden, gelten die Bezeichnungen von LOVE, REISSNER und MEISSNER.

I. Sehr dünne und nicht flache Schalen (Abb. 2)



Annahmen: 1. Die *langsam* und *beschränkt* sich ändernden Schalenabmessungen werden bei Bildung der Ableitungen, im Vergleich mit den *sehr rasch* und *unbeschränkt* abklingenden Schalenkraft- und Deformationsgrößen infolge der Randgleichgewichtssysteme M_0, H_0 , als unveränderlich angenommen.

2. G_2 und T_1 werden vernachlässigt.

Diese Annahmen finden ihre Begründung in der aus der mathematischen Schalentheorie bekannten Tatsache, daß die genannten Randkräfte bei dünnen und nicht flachen Schalen sich auf eine sehr schmale Randzone verteilen und daß sich G_2 und T_1 als verschwindend klein ergeben.

Man kann nun ohne weiteres, ganz ähnlich wie bei der zylindrischen Schale, die beiden simultanen Differentialgleichungen anschreiben:

$$G_1'' - \frac{T_2}{K_2} = \frac{p}{h^2 K_2^2 \sin \alpha} - \frac{S^4 \sin \alpha}{4} \left(\frac{r}{\sin \alpha} \right)'' - \frac{r''}{\sin \alpha} - G_1 \dots \dots \dots (1)$$

wo $y = J\epsilon$ flache Dehnung des Parallelkreisradius und $S = 0,76 \sqrt{hK_2}$ die *lineare Schalenrandcharakteristik* bedeuten und die Ableitungen nach der Bogenlänge genommen sind. Aus der resultierenden Differentialgleichung

$$\frac{S^4}{4} G_1'' - G_1 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

ergeben sich dann, unter alleiniger Berücksichtigung der abklingenden Einzelösungen (wobei es ganz gleichgültig ist, ob man den Nullpunkt im Scheitel oder am Rande wählt – das Letztere gestattet eine kleine Vereinfachung der Rechnung) für die *flachen* Einflußzahlen der *elastischen Randbewegungen* folgende sich leicht zu merkenden Formeln⁴⁾:

Drehung inf. $M_0 = 1$	Drehung inf. $H_0 = 1$ bzw. Versch. inf. $M_0 = 1$	Versch. inf. $H = 1$
$a_{11} = S$	$a_{11} = \frac{S^2}{2} \sin \alpha$	$a_{11} = \frac{S^4}{2} \sin^2 \alpha$

(3)

II. Beliebige geformte dünne Schalen

Allgemeiner gültige Näherungsformeln für die Einflußzahlen können, wie ich glaube, nur gewonnen werden, wenn von den allgemeinen simultanen Differentialgleichungen von E. MEISSNER⁷⁾ ausgegangen wird. Es sei deswegen für diese wichtigen Gleichungen zunächst eine anschauliche und vereinfachte Ableitung skizziert.

1. Statisch bestimmte Membrankräfte.

Man ersetzt von vornherein die durch X, Z oder besser Z, V (die in die Schalenaxe fallende Resultierende der über einem Parallelkreis liegenden äußeren Kräfte) gegebenen äußeren Kräfte durch die statisch bestimmten Membrankräfte

⁴⁾ Unter Vernachlässigung der Querdehnung.

$$T_{10} = \frac{V}{2\pi R_2 \sin^2 \alpha}, \quad T_{20} = R_2 \left(Z - \frac{T_{10}}{R_1} \right) \quad \dots \quad (4)$$

Sämtliche weiteren Beziehungen hat man nun nur für die am Rand belastete Schale aufzustellen: man erhält die *inhomogenen* aus den *homogenen* Gleichungen, wenn T_1 und T_2 durch $T_1 - T_{10}$ und $T_2 - T_{20}$ ersetzt werden.

2. Gleichgewichtsbedingungen für das homogene System.

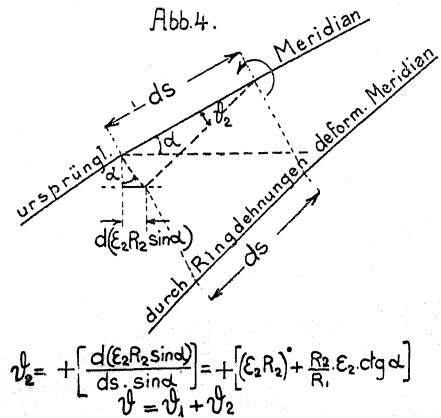
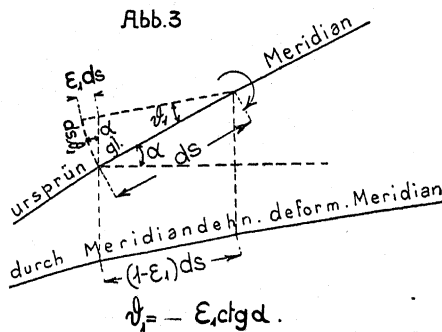
$$T_1 = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot N, \quad T_2 = -\frac{(NR_2)'}{R_1}, \quad (G_1 R_2)' - (G_1 R_2 - G_2 R_1) \operatorname{ctg} \alpha = -N R_1 R_2 \quad (5)$$

3. Elastizitätsbedingungen. Mit $\mathcal{F} = \frac{\mathcal{F}}{1 - \nu^2}$ gilt

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \mathcal{F} \left(\frac{d'}{R_1} + \nu \cdot \frac{d \operatorname{ctg} \alpha}{R_2} \right), \quad G_2 = \mathcal{F} \cdot \left(\frac{d \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{R_2} + \nu \cdot \frac{d}{R_1} \right) \\ E \varepsilon_1 &= \frac{T_1 - \nu T_2}{h}, \quad E \varepsilon_2 = \frac{T_2 - \nu T_1}{h}, \quad d = E \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6)$$

4. Verträglichkeitsbedingung.

Da ϑ , ε_1 und ε_2 verschwindend kleine Größen sind, muß zwischen ihnen ein *linearer* Zusammenhang bestehen, der durch Superposition gewonnen werden kann und zwar am unmittelbarsten auf geometrischem Wege aus den Abbildungen 3 und 4, die keiner weiteren Er-



läuterung bedürfen. Durch Summenbildung der Meridiantangentendrehungen ϑ_1 , ϑ_2 inf. ε_1 , ε_2 erhält man in derselben Form wie bei E. MEISSNER ⁷⁾

$$R_1 \vartheta = R_1 (\vartheta_1 + \vartheta_2) = (\varepsilon_2 R_2)' + \operatorname{ctg} \alpha (\varepsilon_2 R_2 - \varepsilon_1 R_1) \quad \dots \quad (7)$$

5. Die Meissnerschen Differentialgleichungen.

Sie folgen mit $d = E \vartheta$, $\sigma = \frac{NR_2}{h^2}$, $k = \frac{R_2}{R_1}$ aus dem Momentengleichgewicht unter (5) und der soeben abgeleiteten Verträglichkeitsbedingung (7)

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_2 h}{R_1^2} \left[d'' + d' \underbrace{\left(\frac{k'}{k} + \operatorname{ctg} \alpha + \frac{3 \cdot h'}{h} \right)}_{\varphi} - d \cdot f_1 \right] &= 12 (1 - \nu^2) \cdot \sigma \\ \frac{R_2 h}{R_1^2} [\sigma'' + \sigma' \cdot \varphi - \sigma \cdot f_2] &= -d + d_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

f_1 , f_2 sind beschränkt sich ändernde Funktionen von α , h , k . Die Störungsfunktion d_0 in der zweiten Gleichung ergibt sich, nach der oben gemachten Bemerkung über den Zusammenhang

zwischen den homogenen und inhomogenen Gleichungen, als *E-fache* statisch bestimmte Meridiantangentendrehung aus der Verträglichkeitsbedingung mit T_{10} und T_{20} .

6. Allgemeine Näherungsformeln für die Einflußzahlen.

Der MEISSNERsche Differentialoperator zeigt die Eigentümlichkeit, daß der mit φ bezeichnete Klammerausdruck aus der Summe dreier logarithmischer Differentialquotienten besteht. Man kann deswegen durch die Ansätze

$$d = \rho \cdot U, \sigma = \rho \cdot V, \text{ wo sehr einfach } \rho = \frac{1}{h \sqrt{k \cdot h \cdot \sin \alpha}} \dots \dots \dots (9)$$

die erste Ableitung in beiden Gleichungen zum Verschwinden bringen. Vernachlässigt man ferner in den sich ergebenden vereinfachten Gleichungen, gegenüber den zweiten Ableitungen U'', V'' , die mit beschränkt und wenig sich ändernden Faktoren vervielfachten sehr kleinen Stammfunktionen U, V , ebenso, bei Bildung der resultierenden Gleichung, die Veränderlichkeit der Schalenabmessungen, so erhält man für U wieder die einfache Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{S^4}{4} U^{IV} + U = 0 \text{ (Ableitung nach der Bogenlänge)} \dots \dots \dots (10)$$

und aus ihr, mit den entsprechenden Randbedingungen, die gesuchten allgemeineren Einflußzahlen

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \omega_1 \cdot S; a_{12} = \omega_1 \cdot \frac{S^2}{2} \sin \alpha; & a_{22} &= \omega_2 \cdot \frac{S^3 \sin^2 \alpha}{2} \\ \text{wo } \omega_1 &= \frac{1}{1 - (k\varphi - 2\nu \operatorname{ctg} \alpha) \frac{s}{2}}; & \omega_2 &= 1 - \frac{\nu s \operatorname{ctg} \alpha}{1 - (k\varphi - 2\nu \operatorname{ctg} \alpha) \frac{s}{2}} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$$s = 0,76 \sqrt{\frac{h}{R_2}} = \text{numerische Randcharakteristik.}$$

Diese Formeln enthalten die, für die Kugelschale konstanter Wandstärke, schon früher mitgeteilten Ausdrücke als Sonderfälle⁴⁾. Man kann aus ihnen natürlich nicht auch die Formeln für die Kegelschale veränderlicher Wandstärke erhalten. Man muß zunächst die Differentialgleichungen (8) auf die Meridianbogenlänge x als unabhängige Variable transformieren und durch Einführung der neuen Variablen $\eta = \sqrt{x}$ die zweite Ableitung vom auftretenden Faktor x befreien. Der weitere Berechnungsgang bleibt dann derselbe wie oben. Man erhält dann die Einflußzahlen für die Kegelschale in derselben Form, wo nun aber

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{1 - \frac{s}{4} \left[1 - 4\nu + \frac{6h^*}{h} x \right] \operatorname{ctg} \alpha} \\ \omega_2 &= 1 - \frac{\nu s \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \frac{s}{4} \left[1 - 4\nu + \frac{6h^*}{h} x \right] \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11a)$$

Die gefundenen Formeln (11) sind genauer als die unter (3), weil in die Korrekturkoeffizienten ω_1, ω_2 der von der Veränderlichkeit der Schalenabmessungen herrührende Faktor φ bzw. $\frac{h^*}{h}$ tritt^{*)}.

^{*)} Unter Annahme *linear* veränderlicher Wandstärke lassen sich noch *genauere* Formeln für die Einflusszahlen gewinnen, wie in einer besondern Abhandlung gezeigt werden wird.

III. Nachprüfung der Formeln für den Fall der Kugelschale konstanter Wandstärke

Zu diesem Zweck werden die genaueren Einflußzahlen mit Hilfe der asymptotischen Integration der entsprechenden Differentialgleichungen, unter Benützung von fünf Reihengliedern ermittelt. Der Berechnungsgang sei hier kurz skizziert, da er sich gegenüber den bisherigen Darstellungen bei O. BLUMENTHAL²⁾ und E. SCHWERIN⁸⁾ wesentlich vereinfacht.

Mit

$$d = \frac{\mathcal{F}E}{r^2} \cdot \vartheta = \rho \cdot U; N = \rho \cdot V; \rho = (\sin \alpha)^{-1/2} \dots \dots \dots (12)$$

und Berücksichtigung der MEISSNERSchen Zerfallsbedingung³⁾ wird die Berechnung zurückgeführt auf die Lösung der einzigen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} U'' - \tau \cdot U &= \lambda^2 \cdot U; \tau = 3/4 \cdot ctg^2 \alpha - 1/2 \\ \lambda &= \sqrt[4]{-4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{3r^2}{h^2} + 1\right) (1 - \nu^2) - \nu^2}} = \infty \pm (1 \pm i) \cdot \frac{1}{s}, s = 0,76 \cdot \sqrt{\frac{h}{r}} \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Durch Einführung des BLUMENTHALSchen asymptotischen Reihenansatzes²⁾

$$U = e^{\lambda \cdot \alpha} [1 + f_1/\lambda + f_2/\lambda^2 + f_3/\lambda^3 + f_4/\lambda^4 \dots] \dots \dots \dots (14)$$

in die Gleichung (13) erhält man für die Bestimmung der ν freien Zählerfunktionen $f(a)$ die sehr einfache Rekursionsformel

$$f_n = f'_1 f_{n-1} - f''_{n-1}/2 \dots \dots \dots (15)$$

aus der sich auch die im folgenden nötigen ersten und zweiten Ableitungen der f_n schrittweise ergeben. Man erhält bis auf die mit ν vervielfachten Glieder dieselben Ausdrücke wie bei SCHWERIN⁸⁾ (nur muß es in U_3 auf S. II in der SCHWERINSchen Arbeit anstatt $-\gamma^3, \frac{-\gamma^3}{6}$ heißen). Ich lasse deswegen raumhalber diese Formeln weg. Für die numerische Berechnung ist es zweifellos einfacher, den Ansatz (14) und seine drei ersten Abteilungen in reelle Form überzuführen. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} U_{1 \div 4} &= e^{\pm \psi} \left[\frac{\cos + (\cos + \sin)}{\sin - (\cos - \sin)} \cdot \frac{s}{2} f_1 + \frac{\sin \frac{s^2}{2}}{\cos \frac{s^2}{2}} \cdot f_2 - \frac{(\cos - \sin) \frac{s^3}{4}}{(\cos + \sin) \frac{s^3}{4}} f_3 - \frac{\cos \frac{s^4}{4}}{\sin \frac{s^4}{4}} \cdot f_4 \dots \right] \\ U'_{1 \div 4} &= e^{\pm \psi} \left[\frac{(\cos - \sin) \frac{1}{s} + \cos}{(\cos + \sin) \frac{1}{s} + \sin} \cdot f_1 - \frac{(\cos + \sin) \frac{s}{2}}{(\cos - \sin) \frac{s}{2}} (f'_1 + f'_2) + \frac{\sin \frac{s^2}{2}}{\cos \frac{s^2}{2}} (f'_2 + f'_3) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\cos - \sin) \frac{s^3}{4}}{(\cos + \sin) \frac{s^3}{4}} (f'_3 + f'_4) \dots \right] \\ U''_{1 \div 4} &= e^{\pm \psi} \left[-\frac{\sin \frac{2}{s^2} + (\cos - \sin) \frac{1}{s}}{+\cos \frac{s^2}{2} + (\cos + \sin) \frac{1}{s}} f_1 + \frac{\cos}{\sin} \cdot (2f''_1 + f''_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\cos + \sin) \frac{s}{2}}{-(\cos - \sin) \frac{s}{2}} (f''_1 + 2f''_2 + f''_3) + \frac{\sin \frac{s^2}{2}}{\cos \frac{s^2}{2}} (f''_2 + 2f''_3 + f''_4) \dots \right] \\ U'''_{1 \div 4} &= e^{\pm \psi} \left[-\frac{(\cos + \sin) \frac{2}{s^3} - \sin \frac{2}{s^2}}{+(\cos - \sin) \frac{s^3}{4} + \cos \frac{s^2}{2}} \cdot f_1 + \frac{(\cos - \sin) \frac{1}{s}}{(\cos + \sin) \frac{1}{s}} (3f'_1 + f'_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos}{\sin} (3f''_1 + 3f''_2 + f''_3) + \frac{(\cos + \sin) \frac{s}{2}}{-(\cos - \sin) \frac{s}{2}} (3f''_2 + 3f''_3 + f''_4) \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$\psi = \frac{\alpha}{s}$ (in den Klammerausdrücken ist ψ weggelassen).

Die f -Klammerausdrücke habe ich für den Bereich $\alpha = 30^\circ - 90^\circ$ ein für allemal in eine Zahlentafel gebracht; für die $e^{i\psi} \cos \psi$ u. s. f. sind Zahlentafeln vorhanden.

Zur Bestimmung der Einflußzahlen der im Scheitel geschlossenen Schale genügt übrigens die Auswertung der Klammerausdrücke in (16), die mit kleinen u bezeichnet werden sollen.

Mit

$$A_1 = C_1 \cdot \rho e^\psi, A_2 = C_2 \cdot \rho e^\psi \quad \dots \quad (17)$$

folgen diese Integrationskonstanten aus den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} [u_1' - (1/2 - \nu) \cdot \epsilon \epsilon' \alpha \cdot u_1] \cdot A_1 + [u_2' - (1/2 - \nu) \epsilon \epsilon' \alpha] \cdot A_2 &= M_0/r \\ (u_1'' - \tau u_1) \cdot A_1 + (u_2'' - \tau u_2) \cdot A_2 &= H_0 \sin \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (17a)$$

und hierauf die Einflußzahlen, als Vorzahlen von H_0 und M_0 , aus der JE -fachen Randdrehung

$$JE \cdot \Phi = r^2 \cdot (A_1 u_1 + A_2 u_2) \quad \dots \quad (18)$$

und der JE -fachen horizontal-radialen Randverschiebung

$$JE \cdot v = r \sin \alpha \cdot \frac{T_2 h^2}{12} = \frac{r^3 s^4}{4} \cdot \sin \alpha \cdot T_2 \quad \dots \quad (19)$$

wobei T_2 aus

$$\left. \begin{aligned} T_2 = -N' = -(\rho F)' = -[(u_1''' - \tau u_1' - (\tau' + \nu) \cdot u_1') \cdot A_1 + \\ + (u_2''' - \tau u_2' - (\tau' + \nu) \cdot u_2') \cdot A_2 - 1/2 \cos \alpha \cdot H_0] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20)$$

zu bestimmen ist. Als Rechenprobe ergibt sich die Gleichheit von $a_{12} = a_{21}$ aus (18) und (19).

Auf dem geschilderten Wege habe ich die genaueren Einflußzahlen für einige praktische Fälle berechnet und sie mit den aus den Formeln (3) und (11) sich ergebenden Werten verglichen. Beispielsweise gebe ich die Zusammenstellung der Ergebnisse für eine im Eisenbetonbau als flach zu geltende Kugelschale mit $\alpha = 30^\circ$ ($f/l = 1/7$)

s	berechnet vermittelt	$\frac{a_{11}}{r}$	Fehler in %	$\frac{a_{11}}{r^2}$	Fehler in %	$\frac{a_{22}}{r^3}$	Fehler in %
1/12 (sehr dünn)	asympt. Integr.	0,0895	0,00	0,00185	0,00	0,0000720	0,0
	Formeln 3)	0,0833	6,9	0,00174	6,5	0,0000723	0,4
	„ 11)	0,0893	0,2	0,001865	0,8	0,0000723	
1/6 (mäßig dünn)	asympt. Integr.	0,1924	0	0,00786	0	0,0005733	0
	Formeln 3)	0,167	13	0,00695	11,6	0,000579	
	„ 11)	0,1907	0,9	0,00795	1,1	0,000579	1,05

Größere Werte für s konnten infolge Versagens der asymptotischen Integration nicht gewählt werden. Immerhin erkennt man schon aus den beiden durchgerechneten Fällen, daß man die Formeln (11) allgemein als bequeme Hilfswerte bei der Berechnung von kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken verwenden darf, während die Anwendung der Formeln (3) in der Tat nur auf sehr dünne Kuppeln u. s. f. beschränkt bleiben muß.

IV. Die Belastungsglieder in den Elastizitätsgleichungen

d. s. die Randdrehungen und Verschiebungen infolge stetig verteilter polarsymmetrischer Vollbelastung können genügend genau mit T_{10} und T_{20} aus der Verträglichkeitsbedingung (7) und der Ringdehnung (19) berechnet werden⁹⁾. Dies folgt aus den von E. MEISSNER, SCHWERIN u. a. ermittelten Partikulärintegralen.

V. Dickwandige und sehr flache Schalen können wohl am einfachsten nach dem von mir beschriebenen Differenzenverfahren⁴⁾ berechnet werden. Bei Vernachlässigung der Stammfunktionen gegenüber den zweiten Ableitungen erhält man immer in guter Annäherung und bei Erfüllung der MEISSNERSchen Zerfallsbedingung⁷⁾ *in aller Strenge fünfgliedrige symmetrische Differenzgleichungen.*

LITERATURNACHWEISE:

- 1) Das Analogieprinzip in der energetischen Baustatik. Der Eisenbau 1922 H. XI.
- 2) Ueber asympt. Integr. von Differentialgleichungen mit Anwendungen auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. Ztschrft. f. Math. u. Phys. Bd. 62 1913, S. 343.
- 3) Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- oder Kegelform. Physik. Ztschrft. 1913, S. 343—349.
- 4) Die praktische Berechnung biegeester Kugelschalen u.s.f. Ztschrft. f. angew. Math. u. Mech. 1926, S. 1.
- 5) Ueber die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. 1926, VDI-Verlag.
- 6) Spannungen in Kugelschalen Müller-Breslau-Festschrift 1912.
- 7) Ueber Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Ges. Zürich, 1915.
- 8) Ueber Spannungen in symmetrisch und unsymmetrisch belasteten Kugelschalen u.s.f. Berlin 1918, Verlag J. Springer.
- 9) Vergl. S. B. Z. v. 12. Sept. 1926.

Ueber die Beanspruchungen unregelmäßiger Trägerquerschnitte

Von Ad. Eggenschwyler, Zürich

1. Biegung und Querkraft

Die allgemeine Biegeformel

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \quad \dots \dots \dots (1)$$

folgt aus dem Proportionalitätsgesetz und der Annahme eben bleibender Querschnitte und gilt für unregelmäßige Querschnitte, Abb. 1, so gut wie für symmetrische. Aus ihr und Grün-

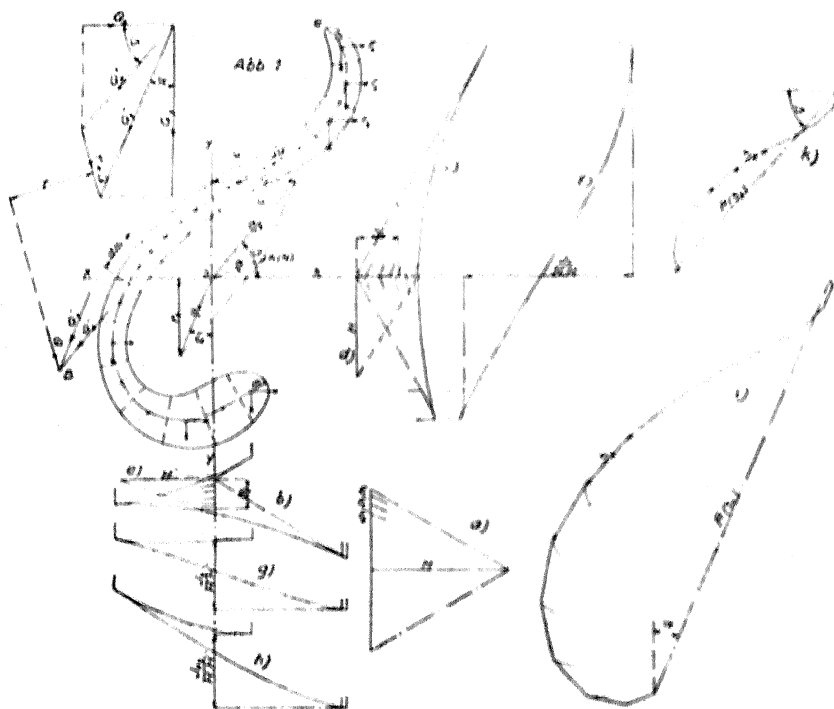


Abb. 1.

den des inneren Gleichgewichts folgt ferner, daß die Schubspannung eines beliebigen Querschnittspunktes dem bekannten Werte

$$\tau \cdot d = \frac{Q_x}{J_x} \cdot S_x \quad \dots \dots \dots (2)$$

entsprechen und parallel zu den Außenflächen des Trägers, also senkrecht zu den Linien $a-a$ gerichtet sein muß. Die Resultierende aller Schubspannungen des Querschnittes ist die Querkraft. Faßt man die Schubspannungen τ zu den längs der Mittellinie $m-m$ des Querschnittes wirkenden Teilkräften

$$dQ = \tau \cdot d \cdot dm = \frac{Q_x}{J_x} \cdot S_x \cdot dm \quad \dots \dots \dots (3)$$

zusammen, dann können diese durch ein Kraft- und ein Seileck zu ihrer Resultierenden zusammengesetzt werden. Teilt man den Querschnitt in lauter gleich lange Stücke von der Länge dm , dann kann man, da der Faktor $\frac{Q_y}{J_x}$ für den ganzen Querschnitt unveränderlich ist, an Stelle von dQ auch die statischen Momente S_x als Kräfte längs der $m - m$ -Linie wirkend denken und erhält durch ihre Zusammensetzung Lage und Richtung der Querkraft, ohne deren Größe zu kennen.

In Abb. 1 ist der Querschnitt in lauter gleich lange Elemente von der Länge dm geteilt. Nimmt man ihre Flächeninhalte als wagerecht, bzw. senkrecht wirkende Kräfte an, dann erhält man mit dem Krafteck 1a die Seilecke 1b und 1c, deren Schlußlinien sich auf der wagerechten bzw. senkrechten Schwerachse schneiden und deren einzelne Strahlen auf den Schwerachsen die statischen Momente S_x und S_y abschneiden. Mit ihnen erhält man vermittelt der weiteren Kraftecke 1d und 1e die Seilecke 1f, 1g und, sofern man die Strahlen von 1d um 90° dreht, 1h, deren Schlußlinien auf den Schwerachsen die Trägheitsmomente J_x und J_y , sowie das Zentrifugalmoment J_{xy} abschneiden. Ferner sind die statischen Momente S_x und S_y als Kräfte längs der Linie $m - m$ aufgefaßt und durch die Kraftecke 1i und 1k und die der Uebersichtlichkeit wegen wieder ausgewischten zugehörigen Seilecke zu ihren Resultierenden zusammengefaßt, die nach Lage und Richtung mit den Querkraften Q'_x und Q'_y übereinstimmen.

Der Schnittpunkt von Q'_x und Q'_y ist der *Schubmittelpunkt* ¹⁾. Er ist ein Festpunkt des Querschnittes und hat die Eigenschaft, daß die Querkraft immer durch ihn gehen muß, wenn der Träger in einer beliebigen Richtung drehungslos auf Biegung beansprucht sein soll. Für punktsymmetrische Querschnitte (I- oder Z-Eisen) fällt er mit dem Schwerpunkt zusammen.

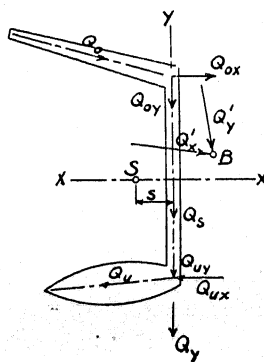


Abb. 2.

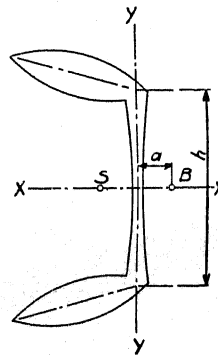


Abb. 3.

Besteht der Träger aus drei ebenen Tragwänden (Abb. 2), dann setzen sich die Schubspannungen der Flanschen zu den resultierenden Schubkräften Q_o und Q_u und diejenigen des Steges zu der Schubkraft Q_s zusammen. Zerlegt man Q_o und Q_u am Uebergang zwischen Flansch und Steg in ihre x - und y -Komponenten, dann wirken im Steg die Gesamtkraft

$$Q_y = Q_{oy} + Q_s + Q_{uy}$$

und in den theoretischen Kanten senkrecht dazu die Kräfte Q_{ox} und Q_{ux} und man findet für drehungslose Verbiegung in Richtung y , daß diese drei Kräfte sich zu einander verhalten wie das Trägheitsmoment J_x des ganzen Querschnittes zu den Zentrifugalmomenten J_{xyo} und J_{xyu} der Flanschen in bezug auf Stegebene und x -Achse. Für drehungslose Verbiegung in Richtung

¹⁾ Die Bezeichnung stammt vom Maillart. Der Referent hat ihn früher als »Biegemittelpunkt« und Herr Konstantin Weber als »Querkraftmittelpunkt« bezeichnet.

x dagegen verhalten sie sich wie das Zentrifugalmoment J_{xx} des ganzen Querschnittes zu den Werten $(J_{yo} - S_{yo} \cdot s)$ bzw. $(J_{yo} - S_{yo} \cdot s)$, wobei J_{yo} und J_{zo} die Trägheitsmomente und S_{yo} und S_{zo} die statischen Momente der Flanschquerschnitte in bezug auf die Stegeebene und s den Schwerpunktsabstand vom Steg bedeutet. Man braucht also nur an Stelle von Q_y , Q_{xy} und Q_{xz} diese Momentenwerte als Kräfte angreifen zu lassen und erhält durch ihre Zusammensetzung Lage und Richtung der Querkräfte Q'_x und Q'_y , die den Biegungsrichtungen x und y zugeordnet sind und sich im Schubmittelpunkt B schneiden.

Ist der Querschnitt symmetrisch, Abb. 3, dann liegt der Schubmittelpunkt auf der Symmetrieachse im Abstand

$$a = h \frac{J_{xy}}{J_x} \dots \dots \dots (4)$$

von Stegmitte, wobei h den Abstand der theoretischen Kanten und J_{xy} das Zentrifugalmoment des einen Flansches in bezug auf Symmetrieachse und Stegeebene bedeuten²⁾.

Die Berechnung der Querschnittsbeanspruchungen ergibt sich nun wie folgt: Jedes beliebige auf den Querschnitt einwirkende Lastsystem kann bekanntlich zu einer Normalkraft N und einer Transversalkraft T zusammengefaßt werden. Erstere schneidet die Querschnittsebene in einem beliebigen Punkte A und ist zu zerlegen in eine im Schwerpunkt S angreifende Achsial- oder Stabkraft und ein Biegemoment

$$M = N \cdot \rho$$

(Abb. 1). Zerlegt man M in die Richtungen von Q'_x und Q'_y , dann erzeugt

$$M'_x = N \cdot \rho_1$$

eine drehungslose Verbiegung in Richtung y und

$$M'_y = N \cdot \rho_2$$

eine drehungslose Verbiegung in Richtung x . Zerlegt man M'_x und M'_y weiter in ihre x - und y -Komponenten, dann erhält man $M_x = N \cdot \rho_1$ und $M_y = N \cdot \rho_2$ und hieraus die Biegungsspannung eines beliebigen Querschnittspunktes

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x = N \left(\frac{y \cdot \rho_1}{J_x} + \frac{x \cdot \rho_2}{J_y} \right) \dots \dots \dots (5)$$

Die Transversalkraft T ist zu zerlegen in eine zu ihr parallele, durch den Schubmittelpunkt B gehende Querkraft $Q = T$ und ein Torsionsmoment

$$M_T = Q \cdot r$$

Q ist zu zerlegen in Q'_x und Q'_y , und diese wieder in ihre x - und y -Komponenten, wodurch sich die Querkraftsspannung eines beliebigen Querschnittspunktes ergibt zu

$$\tau \cdot d = \frac{Q_y \cdot S_x}{J_x} + \frac{Q_x \cdot S_y}{J_y} \dots \dots \dots (6)$$

Die Querkräfte Q'_x und Q'_y schließen mit den zugehörigen Biegungsrichtungen die Winkel

$$\alpha = \arctg \frac{J_{xy}}{J_x} \text{ bzw. } \beta = \arctg \frac{J_{xy}}{J_y}$$

ein.

²⁾ Ähnliche Ergebnisse haben SCHWYZER («Statische Untersuchung der aus ebenen Tragflächen zusammengesetzten räumlichen Tragwerke», Diss. Zürich 1920), MAILLART («Schweiz. Bauz.» 30. 4. 1921) und ZIMMERMANN («Bauingenieur» 30. 4. 1921) gefunden. Später ist die Materie besonders von WEBER eingehend behandelt worden (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1924).

2. Drehung

Unter *Torsionsmomenten* seien in der Querschnittsebene wirkende Kräftepaare und unter *Drehmomenten* äußere, belastende Momente verstanden. Das Torsionsmoment ist dann eine Summation oder Integration von Drehmomenten, gleich wie die Querkraft eine Summation von senkrecht zur Stabachse wirkenden Lasten darstellt. Es ist gleich der Transversalkraft multipliziert mit ihrem Abstand vom Schubmittelpunkt.

Die durch das Torsionsmoment erzeugten *Drehungsbeanspruchungen* sind zweierlei Art. Wenn in einem aus drei ebenen Platten bestehenden Träger (Abb. 4) der Querschnitt $z + dz$ sich gegenüber dem benachbarten Querschnitt z verdreht und in die gestrichelte Lage übergeht, dann kann diese Verdrehung zerlegt gedacht werden in eine Verdrehung der drei einzelnen

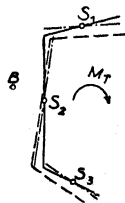


Abb. 4.



Abb. 5.

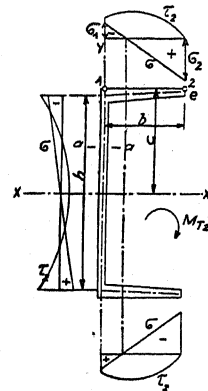


Abb. 6.

Querschnittsteile um ihre Einzelschwerpunkte S_1 , S_2 und S_3 , wodurch sie in die strichpunktierte Lage übergehen und an den Kanten ihren gegenseitigen Zusammenhang verlieren, und in eine Parallelverschiebung der einzelnen Platten, wodurch sie ihren Zusammenhang wieder gewinnen. Durch die Verdrehung der einzelnen Teile entstehen dann wirbelförmig über den Querschnitt verteilte Schubspannungen τ_1 , die wir als Drillungsbeanspruchungen bezeichnen können (Abb. 5). Durch die Parallelverschiebung müssen die einzelnen Tragflächen einen Biegungswiderstand überwinden, wodurch Normalspannungen σ und Schubspannungen τ_2 erzeugt werden (Abb. 6). Das auf den Querschnitt einwirkende Torsionsmoment M_T zerfällt in zwei Teile M_{T_1} und M_{T_2} , von denen der erstere die Drillungsbeanspruchungen τ_1 und der zweite die Spannungen σ und τ_2 erzeugt.

Dabei dreht sich der ganze Querschnitt um einen bestimmten Punkt, der nach Weber mit dem Schubmittelpunkt identisch ist.

Bezeichnet ψ den Verdrehungswinkel, dann ergibt sich aus den wirbelförmigen Drillungsbeanspruchungen τ_1 die Verdrehung

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{M_{T_1}}{G \cdot J_d}$$

wo J_d den sog. Drillungswiderstand bedeutet, der durch einen Drillungsversuch, Abb. 7, bestimmt werden kann und für den Föppl und de Saint Venant die Näherungswerte

$$J_d = \Sigma \frac{b \cdot d^3}{3}$$

bezw.

$$\mathcal{I}_d = \frac{F^3}{40 \mathcal{I}_p}$$

angegeben haben.

Die Spannungen σ und τ müssen den Bedingungen

$$\int \sigma \cdot df = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\int \sigma \cdot y \cdot df = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$\int \sigma \cdot x \cdot df = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$\int \tau_{xy} \cdot y \cdot df + \int \tau_{xy} \cdot x \cdot df = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

genügen. Nimmt man an, daß σ nach einer windschiefen Fläche über den Querschnitt verteilt und in symmetrischen Querschnitten über jede senkrecht oder parallel zur Symmetrieachse liegende Faserschicht geradlinig veränderlich sei, dann folgt für einen beliebigen Querschnittspunkt aus Abb. 6

$$\sigma = \sigma_1 \frac{y}{c} + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{c} \quad \dots \dots \dots (12)$$

bezw.

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{d\sigma_1}{dz} \cdot \frac{y}{c} + \frac{d(\sigma_2 - \sigma_1)}{dz} \cdot \frac{x \cdot y}{b \cdot c}$$

und wegen (9)

$$\int (\sigma \cdot y \cdot df) = \frac{\sigma_1}{c} \int (df \cdot y^2) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b \cdot c} \int (df \cdot x \cdot y^2) - \frac{\sigma_1 \mathcal{I}_s}{c} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \int (df \cdot x \cdot y^2)}{b \cdot c} = 0$$

also

$$\sigma_2 - \sigma_1 = -\sigma_1 \frac{\mathcal{I}_s \cdot b}{\int (df \cdot x \cdot y^2)} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\sigma = \sigma_1 \frac{y}{c} \left(1 - \frac{\mathcal{I}_s \cdot x}{\int (df \cdot x \cdot y^2)} \right) \quad \dots \dots \dots (14)$$

In einem beliebigen Längsschnitte $a-a$ durch das betrachtete Balkenelement muß eine Schubkraft wirksam sein gleich der Differenz der Normalspannungen in den außerhalb dieses Längsschnittes liegenden Teilen der Querschnitte z und $z + dz$, also

$$\tau \cdot d \cdot dz = \int_a^z (d\sigma \cdot df)$$

Wegen der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen im Innern eines Körpers muß auch die Schubspannung des Querschnittes dem Werte

$$\tau_2 \cdot d = \int_a^z \left(\frac{d\sigma}{dz} \cdot df \right) = \frac{d\sigma_1}{dz} \cdot \frac{1}{c} \left\{ \int_a^z (df \cdot y) - \frac{\mathcal{I}_s}{\int (df \cdot x \cdot y^2)} \cdot \int_a^z (df \cdot x \cdot y) \right\} \quad (15)$$

entsprechen und parallel zur Mittellinie $m-m$ des Querschnittes gerichtet sein. Setzt man die Schubspannungen der Flanschen wieder, wie in Abb. 2, zu den resultierenden Schubkräften Q_0 und Q_u zusammen und zerlegt man diese im Schnitt mit der Stegebene in ihre x - und y -Komponenten, dann ist für symmetrische Querschnitte

$$M_{T_2} = h \cdot Q_{ox} = h \int_1^2 r_2 \cdot d \cdot dm \cdot \frac{dz}{dm} = \frac{h}{c} \cdot \frac{d\sigma_1}{dz} \left\{ \int_1^2 (df \cdot y \cdot x) - \frac{\mathcal{F}_x}{\int (df \cdot x \cdot y^2)} \cdot \int_1^2 (df \cdot x^2 \cdot y) \right\} =$$

$$\frac{h}{c} \cdot \frac{d\sigma_1}{dz} \left\{ \mathcal{F}_{xy} - \mathcal{F}_x \frac{\int (df \cdot x^2 \cdot y)}{\int (df \cdot x \cdot y^2)} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

wobei das Zentrifugalmoment J_{xy} , das Trägheitsmoment J_x und die Flächenmomente höherer Ordnung $\int (df \cdot x^2 \cdot y)$ und $\int (df \cdot x \cdot y^2)$ auf Symmetrieachse und Stegebene und nur auf eine Querschnittshälfte zu beziehen sind. Daraus folgt

$$\frac{d\sigma_1}{dz} = \frac{M_{T_2} \cdot c}{h \left(\mathcal{F}_{xy} - \frac{\mathcal{F}_x \cdot \int (df \cdot x^2 \cdot y)}{\int (df \cdot x \cdot y^2)} \right)} \dots \dots \dots (17)$$

$$\frac{d(\sigma_2 - \sigma_1)}{dz} = \frac{M_{T_2} \cdot b \cdot c}{h \left\{ \int (df \cdot x^2 \cdot y) - \frac{\mathcal{F}_{xy}}{\mathcal{F}_x} \int (df \cdot x \cdot y^2) \right\}} \dots \dots \dots (18)$$

$$r_2 \cdot d = \frac{M_{T_2} \left\{ S_{xa} \cdot \int (df \cdot x \cdot y^2) - \mathcal{F}_x \cdot \mathcal{F}_{xya} \right\}}{h \left\{ \mathcal{F}_{xy} \cdot \int (df \cdot x \cdot y^2) - \mathcal{F}_x \cdot \int (df \cdot x^2 \cdot y) \right\}} \dots \dots \dots (19)$$

Die Verdrehung infolge der Drehungsnormalspannungen σ ist

$$\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{E \cdot c \cdot b}$$

also

$$\frac{d^3 \psi_1}{dz^3} = \frac{d(\sigma_2 - \sigma_1)}{dz} \cdot \frac{1}{E \cdot c \cdot b} = \frac{-M_{T_2}}{E \cdot h \cdot \left\{ \int (df \cdot x^2 \cdot y) - \frac{\mathcal{F}_{xy}}{\mathcal{F}_x} \int (df \cdot x \cdot y^2) \right\}} \dots (20)$$

und diejenige infolge von r_2

$$\frac{d\psi_2}{dz} = \frac{2 Q_{ox}}{h \cdot G \cdot F_f} = \frac{2 M_{T_2}}{h^2 G \cdot F_f} \dots \dots \dots (21)$$

wobei F_f den Flanschquerschnitt bedeutet. Da die Verdrehung infolge von M_{T_1} gleich der Verdrehung infolge von M_{T_2} , also

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

bezw.

$$\frac{d^3 \psi}{dz^3} = \frac{d^3 \psi_1}{dz^3} + \frac{d^3 \psi_2}{dz^3}$$

sein muß, so folgt

$$\frac{d^3 \psi_1}{dz^3} = \frac{-M_{T_2}}{E \cdot h \left\{ \int (df \cdot x^2 \cdot y) - \frac{\mathcal{F}_{xy}}{\mathcal{F}_x} \cdot \int (df \cdot x \cdot y^2) \right\}} =$$

$$= \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{M_{T_1}}{G \cdot \mathcal{F}_d} - \frac{M_{T_2} \cdot 2}{h^2 G \cdot F_f} \right) = \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{M_T}{G \cdot \mathcal{F}_d} - \frac{M_{T_2}}{G} \left(\frac{1}{\mathcal{F}_d} + \frac{2}{h^2 F_f} \right) \right\} \quad (22)$$

eine Differentialgleichung zweiten Grades zur Bestimmung von M_{T_2} als Bestandteil von M_T , die mit der Abkürzung

$$A^2 = \frac{E \cdot h}{G \cdot \mathcal{J}_d} \left(1 + \frac{2 \mathcal{J}_d}{h^2 F_f} \right) \left\{ f(df \cdot x^2 \cdot y) - \frac{\mathcal{J}_{xy}}{\mathcal{J}_x} \cdot f(df \cdot x \cdot y^2) \right\} \quad \dots \quad (23)$$

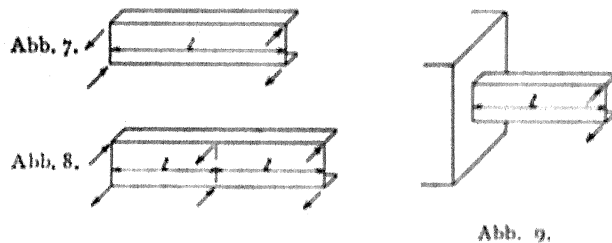
in

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{M_T}{1 + \frac{2 \mathcal{J}_d}{h^2 F_f}} - M_{T_2} \right) = - \frac{M_{T_2}}{A^2} \quad \dots \quad (24)$$

übergeht. A ist eine reine Querschnittsfunktion mit der Dimension einer Länge. Das Glied $\frac{2 \mathcal{J}_d}{h^2 F_f}$ ist bei dünnwandigen Querschnitten klein und kann ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden.

Diese Formel (24) bildet den Ausgangspunkt für die Berechnung von Drehungsbeanspruchungen. Sie gilt für konstantes oder nach einem beliebigen Gesetz veränderliches Torsionsmoment M_T und kann, so gut wie die Biegungsformel (1), auch für sanft gekrümmte Träger oder für Träger mit langsam veränderlichem Querschnitt beibehalten werden. Sie ist hier für symmetrische Querschnitte abgeleitet, wobei jedoch die Außenflächen der Flanschen nicht, wie in Abb. 6 gezeichnet, parallel zu sein brauchen, weil nur vorausgesetzt wurde, daß sich die Werte σ_1 und σ_2 auf denselben Abstand e von der Symmetrieachse beziehen. Sie dürfte auch für beliebige unsymmetrische Querschnitte (Abb. 1) gültig sein, sofern dafür noch eine entsprechende Querschnittskonstante A und ein Ersatz für den Wert $\frac{h^2 F_f}{2}$ abgeleitet wird.

In Abb. 7 bis 10 sind einige Belastungsfälle von reiner Drehung gezeichnet. Bei allen erhalten die Querschnitte keine Achsialkraft, kein Biegemoment und keine Querkraft, son-



dern nur Torsionsmomente. Für den in Abb. 7 gezeichneten Belastungsfall (Drillung) müssen die Drehungsnormalspannungen σ in beiden Endquerschnitten Null sein. Diese Randbedingung in (24) eingesetzt ergibt, daß auch in allen anderen Querschnitten $M_{T_2} = 0$ ist, daß das ganze Torsionsmoment M_T durch die wirbelförmigen Schubspannungen τ_1 aufgenommen werden muß und die ganze Verdrehung des Trägers

$$\psi_{max} = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot \mathcal{J}_d} \quad \dots \quad (25)$$

wird.

Bei Abb. 8 und 9 sind am freien Ende keine Normalspannungen und in Trägermitte bzw. am eingespannten Ende keine Querschnittsverwölbungen möglich. Diese Randbedingungen in (24) eingesetzt, ergibt für unveränderlichen Querschnitt

$$M_{T_2} = M_T \cdot \frac{\cosh\left(\frac{s}{A}\right)}{\left(1 + \frac{2 \mathcal{J}_d}{h^2 F_f}\right) \cdot \cosh\left(\frac{h}{A}\right)} \quad \dots \quad (26)$$

und als Gesamtverdrehung des Trägers

$$\phi_{max} = \frac{M_T}{G \cdot J_d} \left(l - \frac{A \cdot i g h \left(\frac{l}{A} \right)}{1 + \frac{2 J_d}{h^2 F_f}} \right) \dots \dots \dots (27)$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Fall der reinen Drillung, das zweite gibt die Abminderung der Verdrehung infolge der Spannungen σ und τ_2 an und tritt je nach dem Schlankheitsverhältnis gegenüber dem ersten mehr oder weniger zurück. Große Trägerlänge und dicke Wandungen bedingen ein Ueberwiegen von M_{T_1} und τ_1 , dünne Wandungen dagegen ein Ueberwiegen von M_{T_2} , σ und τ_2 .

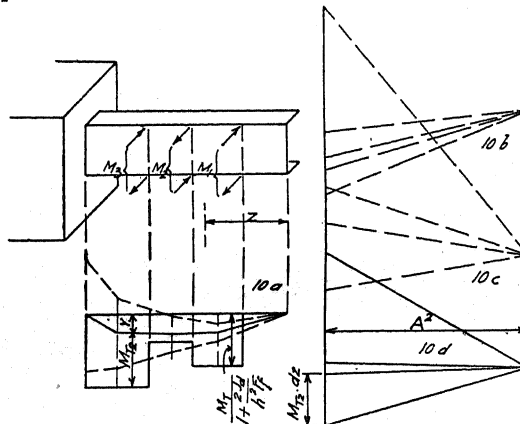


Abb. 10.

Für unregelmäßige Belastungsfälle, Abb. 10, wird Gleichung (24) besser graphisch aufgelöst. Man trage, Abb. 10 a, die Werte $\frac{M_T}{1 + \frac{2 J_d}{h^2 F_f}}$ als Ordinaten auf. Diese zerfallen nach (24)

derart in zwei Teile M_{T_2} und $y = \frac{M_T}{1 + \frac{2 J_d}{h^2 F_f}} - M_{T_2}$, daß, wenn man die Flächeninhalte $M_{T_2} \cdot dz$

als Kräfte betrachtet und mit der Poldistanz A^2 ein Krafteck zeichnet, das zugehörige Seilpolygon die Ordinaten y abschneidet. Am eingespannten Ende muß $y = 0$ sein. Man wähle die erste Polygonseite 1—2 beliebig und erhält dann mit dem Krafteck 10 b zwangsläufig den weiteren Verlauf der y -Linie. Ergibt sie am eingespannten Ende nicht die Ordinate Null, dann ändere man die erste Polygonseite und wiederhole das Verfahren mit den Kraftecken 10 c, 10 d usw., bis y am eingespannten Ende gleich Null wird. Die Berechnung der Beanspruchungen selbst macht dann keine Schwierigkeiten mehr.

3. Versuche

Durch Versuche des Referenten an einem 8-zölligen amerikanischen U-Eisen ist die Lage des Schubmittelpunktes sehr schön bestätigt worden. Dagegen blieben die gemessenen Verdrehungen bei Belastung nach Abb. 8 um ungefähr 20 % hinter den erwarteten Werten zurück, was wahrscheinlich hauptsächlich durch die Unsicherheit des Drillungswiderstandes J_d zu erklären ist. Es wären deshalb weitere Versuche sehr zu begrüßen und zwar dürfte es sich jeweils empfehlen, zunächst durch einen Drillungsversuch nach Abb. 7 und Gl. (25) den Drillungswiderstand J_d und darauf durch Belastung z. B. nach Abb. 8 und Gl. (27) den Wert A zu bestimmen, der dann für beliebige Belastungsfälle in (24) einzusetzen wäre.

C. SEKTION III
HYDRO- UND AEROMECHANIK

Vorsitzende in den Sitzungen die Herren
Baes-Bruxelles, Reissner-Berlin, Oseen-Upsala,
Burgers-Delft

Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire

Par A. Weinstein, Rome

L'onde solitaire, observée pour la première fois par SCOTT RUSSELL¹⁾, consiste d'une seule élévation qui se propage sans changement de forme avec une vitesse constante c dans un canal à profondeur finie h , le mouvement réel des particules (de vitesse petite par rapport à c) ayant lieu dans des plans verticaux.

La vitesse c est sensiblement liée à l'élévation maximum a au-dessus du niveau moyen par la relation remarquable

$$c^2 = g(h + a). \quad \dots \dots \dots (1)$$

RAYLEIGH et BOUSSINESQ ont retrouvé ce résultat expérimental par un calcul d'approximation en se servant d'un artifice ingénieux.

Nous nous proposons d'étudier le problème de l'onde solitaire par la méthode de M. LEVI-CIVITA²⁾ et nous établirons dans cette note une relation (voir l'équation (10)) qui est une approximation d'un ordre plus élevé que (1), notre intention étant d'aborder ensuite la solution rigoureuse de la question.

Position du problème. — Admettons, en nous plaçant dans un plan vertical parallèle aux parois du canal, que la ligne l qui limite supérieurement le liquide ait une crête unique et tende asymptotiquement à l'infini vers la droite horizontale d'hauteur h au-dessus du fond.

La ligne l se déplace avec une vitesse constante horizontale c par rapport à un observateur fixe, le mouvement réel étant irrotationnel. Le mouvement devient permanent par rapport à un système d'axes Oxy invariablement liés à l , Oy étant dirigé vers le haut et passant par la crête, tandis que Ox , coïncidant avec le fond du canal, a un sens opposé à la direction de c .

On aura, d'après la nature même du mouvement ondulatoire, pour les composantes u, v de la vitesse relative les relations suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = c, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v = 0,$$

$(u - c)^2 + v^2$ restant toujours voisin de 0 et v s'annulant rigoureusement pour $y = 0$.

Sur l nous avons l'équation dynamique fondamentale

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy = \frac{1}{2}c^2 + gh \quad \dots \dots \dots (2)$$

où la constante au second membre a été déterminée par les conditions à l'infini.

Désignons par φ^* et ψ^* le potentiel et la fonction du courant. On peut alors établir une représentation conforme faisant correspondre biunivoquement au champ du mouvement la bande indéfinie S^* comprise entre les droites $\psi^* = 0$ et $\psi^* = ch$ du plan $f^* = \varphi^* + i\psi^*$ et cela de manière que les axes se correspondent entre eux.

En posant $f^* = chf = ch(\varphi + i\psi)$, (où φ et ψ sont des nombres purs) on obtient, au lieu de S^* , la bande S_1 du plan f limitée par les droites $\psi = 0$ et $\psi = 1$.

1) Voir par ex. LAMB, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1924), § 252.

2) *Détermination rigoureuse des ondes permanentes*, «Mathematische Annalen», 93 (1925).

D'après le procédé de M. LEVI-CIVITA nous allons introduire f comme variable indépendante, en prenant pour fonction inconnue la grandeur $\omega = \vartheta + i\tau$, définie par l'équation

$$\omega = e^{i\varphi} (\omega = e^{i\varphi} e^{i\tau} \quad (\tau, \vartheta \text{ reals}),$$

où $\omega = \frac{df^*}{dz}$ désigne la vitesse complexe $u = iv$.

En reprenant le raisonnement de M. LEVI-CIVITA, tenant toutefois compte de la nature qualitative de notre phénomène, nous arrivons à poser pour l'onde solitaire le *problème fondamental* suivant:

Déterminer les fonctions $\omega(f)$ régulières dans la bande S_1 et nulles à l'infini, qui satisfont aux conditions aux limites suivantes:

$$\vartheta = 0, \quad \text{pour } \psi = 0, \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{d\tau}{d\varphi} + p e^{-i\tau} \sin \vartheta = 0, \quad \text{pour } \psi = 1, \quad \dots \dots \dots (4)$$

p étant une constante a priori indéterminée qui est liée à c et h par la relation

$$p = \frac{g h}{c^2}.$$

Pour obtenir une solution approchée de (4) nous allons y remplacer $\frac{d\tau}{d\varphi}$ par les trois premiers termes d'un développement semiconvergent que M. LEVI-CIVITA a obtenu³⁾ en analysant l'artifice employé, par RAYLEIGH. Ce développement peut être déduit dans notre cas de la manière suivante:

$\omega = \vartheta + i\tau$ étant, pour $\psi = 0$, égale à une quantité purement imaginaire $i\tau_0$, on a (en faisant usage du symbolisme employé par M. LEVI-CIVITA) par la série de TAYLOR

$$\omega(\varphi, i) = i e^{iD} \tau_0$$

(où le symbole D signifie l'opération $\frac{d}{d\varphi}$).

On en tire

$$\vartheta(\varphi, i) = -\sin D \tau_0, \quad \tau(\varphi, i) = \cos D \tau_0,$$

d'où il vient en éliminant τ_0

$$-\frac{d\tau}{d\varphi} = -D\tau = D \cotg D\vartheta = \vartheta - \frac{1}{3} D^2 \vartheta - \frac{1}{45} D^4 \vartheta + R_6,$$

le module de R_6 étant inférieur à la limite supérieure de $\frac{2}{945} |D^6 \vartheta|$.

En négligeant R_6 nous allons substituer cette valeur de $-\frac{d\tau}{d\varphi}$ dans l'équation (4), ce qui nous donnera l'équation approchée

$$p e^{-i\tau} \sin \vartheta = \vartheta - \frac{1}{3} D^2 \vartheta - \frac{1}{45} D^4 \vartheta, \quad \text{pour } \psi = 1, \quad \dots \dots \dots (5)$$

³⁾ Sulla espressione del resto in una operazione funzionale usata da Lord Rayleigh, «Rend. Acc. Linc», 20, I (1911), p. 605-614.

On obtiendrait (comme on va le voir) l'approximation de RAYLEIGH en négligeant encore le terme $-\frac{1}{45}D^4\vartheta$.

Pour pouvoir estimer dans tous les cas l'erreur commise, nous conviendrons (ce qui est d'ailleurs suggéré par la nature du problème) de considérer comme petite quantité du premier ordre la valeur maximum ν de $|\tau|$ (égal à la valeur absolue du $\log \left| \frac{zw}{c} \right|$) sur la ligne l (et par conséquent aussi dans tout le champ du mouvement).

Il est évident d'après l'équation (2), ou de son équivalente

$$\frac{1}{2}e^{2\tau} + p \frac{y-h}{h} = \frac{1}{2}, \quad \dots \dots \dots (6)$$

que $|\tau|$ atteint cette valeur ν seulement à la crête (unique), et qu'en ce point on aura

$$\tau = -\nu \quad \vartheta = 0$$

L'hypothèse faite sur l'allure de la ligne libre permet en outre d'affirmer, d'après (6), que τ varie en croissant de $-\nu$ jusqu'à 0 lorsque φ varie de 0 à ∞ .

On peut donc introduire τ comme variable indépendante dans (5) et remplacer chaque D par $\tau' \frac{d}{d\tau}$, ($\tau' = \frac{d\tau}{d\varphi}$).

Nous allons d'abord chercher à retrouver (en négligeant le terme $-\frac{1}{45}D^4\vartheta$) le résultat de RAYLEIGH et nous obtiendrons en même temps l'ordre de grandeur de ϑ , ce qui facilitera les calculs sur l'équation (5) complète.

En introduisant τ au lieu de φ on obtient par intégration de l'équation (5) réduite:

$$\frac{p}{6}\vartheta^2 = \frac{\tau^2}{2p}[\tau + (1-p)] \quad \dots \dots \dots (7)$$

ce qui nous donne (ϑ devant s'annuler à la crête, c'est-à-dire pour $\tau = -\nu$) la relation

$$\nu = 1 - p. \quad \dots \dots \dots (8)$$

D'autre part l'équation (6) donne à la crête

$$p \frac{a}{h} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\nu}) = \nu - \nu^2 + \dots \quad \dots \dots \dots (9)$$

En combinant (8) et (9) on retrouve la relation de RAYLEIGH:

$$\frac{a}{h} = \frac{c^2}{g h} - 1 + \boxed{2}$$

où le symbole $\boxed{2}$ indique que l'erreur commise est, par rapport à ν , de l'ordre 2 au plus. L'équation (7) démontre en même temps que ($1 - p$ étant égal à ν) ϑ^2 est de l'ordre 3 et que cette quantité à une racine simple pour $\tau = -\nu$ et une autre double pour $\tau = 0$. Cela signifie d'ailleurs géométriquement que la courbure de l est 0 seulement à l'infini et pas à la crête.

Tenant compte de l'ordre de ϑ et négligeant l'ordre 5 on peut aisément intégrer l'équation complète (5) deux fois, ce qui donne la relation suivante plus précise que celle de RAYLEIGH:

$$c^2 = g h \left(1 + \frac{a}{h} - \frac{21}{20} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right). \quad \dots \dots \dots (10)$$

Cette équation nous montre que l'expression (1) de la vitesse de propagation (adoptée par SCOTT RUSSELL et justifiée théoriquement par RAYLEIGH et BOUSSINESQ) est une approximation par excès, d'ailleurs assez bonne, le terme correctif ayant pour coefficient $\frac{21}{20}$ et ne pouvant donc dépasser dans les cas ordinaires 4 % (en admettant $\frac{a}{h} \leq \frac{1}{5}$) du précédent.

Note au sujet des ondes d'émersion et d'impulsion

Par R. Risser, Paris

Une masse liquide d'une profondeur finie ou infinie est au repos ; on la met en mouvement par l'action de forces impulsives appliquées à la surface (effet d'un coup de vent) ou par l'émersion d'un corps solide ; dans le premier cas, il se produit des ondes dites par impulsion, dans le second, des ondes par émersion. Prenons pour étudier le mouvement des ondes trois axes de coordonnées rectangulaires ; le plan xoy est confondu avec le plan de la surface libre au repos, et l'axe oz dirigé vers le bas. Nous désignerons par φ le potentiel des vitesses, par u, v, w les composantes de la vitesse d'une particule, et par g l'accélération de la pesanteur.

On sait que l'on a

$$(u, v, w) = \frac{\partial \varphi}{\partial (x, y, z)},$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou } \Delta_2 \varphi = 0 ;$$

de plus les équations d'EULER conduisent à la relation

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

qui est vérifiée en tous les points du fluide, relation où p représente la pression en un point x, y, z et ρ la densité du fluide

Si l'on choisit les unités de façon à rendre égale à 1 la densité et l'accélération de la pesanteur, et de plus si l'on admet que les carrés des composantes de la vitesse sont négligeables, l'équation précédente devient

$$(1) \quad p = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Comme l'on peut supposer nulle la pression qui règne au-dessus du fluide, on voit que l'on a à la surface libre

$$(2) \quad z = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Soit $h = f(x, y, t)$ la dénivellation de la surface libre au temps t , l'équation (2) s'écrit $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, équation dans laquelle on remplace z par o , en raison de la petitesse de h et de continuité de φ .

Les données initiales caractéristiques des ondes d'émersion, exprimant l'état du fluide à l'époque $t = 0$ consisteront à poser

pour $t = 0$ $\varphi_0 = 0$ et $h = F(x, y)$, φ_0 étant la valeur de φ à la surface libre et $F(x, y)$ désignant les petites ordonnées primitives connues de la surface ;

$$\text{de plus à l'époque } t = 0, \text{ on a } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Dans le cas où la profondeur du liquide, ainsi que les dimensions horizontales peuvent être regardées comme infiniment grandes, on substitue à la condition $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ (dérivée normale

de φ à la paroi du vase), la condition pour φ de s'annuler asymptotiquement lorsque l'on s'éloigne indéfiniment de l'origine des coordonnées.

Nous mettrons en lumière ici quelques points qui nous semblent nouveaux et qui sont relatifs d'une part au problème des ondes cylindriques, aux ondes d'émersion dans un milieu indéfini, et d'autre part à ces mêmes ondes dans un canal de profondeur finie ou infinie et dans un bassin parallépipédique.

Cas des ondes cylindriques

Nous nous proposons de rechercher les maxima et les minima de la dénivellation pour des particules fluides situées dans le plan $z = z_0$.

Si r est le rayon vecteur partant de l'origine et aboutissant à la particule, et θ l'angle formé par la verticale avec le dit rayon, on sait que le potentiel des vitesses est défini par l'expression due à M. LAMB (Traité d'hydrodynamique — 3^e Edition 1906 — page 364)

$$\varphi = \frac{g't}{\pi} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} g't^2 \right) \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{1}{2} g't^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\}, \text{ qui n'est autre que}$$

celle donnée ultérieurement par M. ROUSIER (Thèse 1908 — p. 25).

M. Rousier, partant de l'expression de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ de M. BOUSSINESQ, définit l'expression de la dénivellation

$$h = \frac{S}{\pi r} \cos \theta - \frac{S}{\pi} \left[\sum_0^{\infty} \left[\frac{t^{4n+2} \cos (2n+2)\theta}{2^{2n+1} \cdot r^{2n+2} \cdot 4n+1} - \frac{t^{4n+4} \cos (2n+3)\theta}{2^{2n+2} \cdot r^{2n+3} \cdot 4n+3} \right] \right] \quad (1)$$

[r désigne ici la distance d'un point m de la zone d'ébranlement à la particule fluide $M(x, s)$, θ l'angle de mM avec la verticale, S l'aire de la section droite du cylindre immergé, et la symbole $4n+1$ représente le produit $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)$].

Les sommets et les creux des ondes apparentes correspondent à $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$ pour $s = s_0$, et sont définis par l'équation (2)

$$\sin 2\theta = \sum_0^{\infty} \left[\frac{(2n+2) \sin (2n+3)\theta}{\gamma^{2n+1} \cdot 4n+1} - \frac{(2n+3) \sin (2n+4)\theta}{\gamma^{2n+2} \cdot 4n+3} \right] = 0 \text{ avec } \gamma = \frac{t^2}{2r} \quad (2)$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$2 \left(\frac{t^2 x}{2r^2} \right) \cdot \frac{x^2}{r^2} f_1 + \frac{x^2}{r^2} f_2 - x^2 \left(\frac{t^2 x}{2r^2} \right) \cdot \frac{1}{r^2} f_3 + x^2 \left(\frac{t^2 x}{2r^2} \right) \cdot \frac{1}{r^2} f_4 \dots = 0, \quad \dots \quad (3)$$

$$\left(\frac{x s}{r^2} \right) g_1 + \frac{x^3}{3! \cdot s r^2} g_2 - \frac{x^5}{5! \cdot s^2 r^2} g_3 + \frac{x^7}{7! \cdot s^3 r^2} g_4 \dots = 0; \quad \dots \quad (3')$$

dans (3) les f_i sont des séries entières alternées en $\frac{t^2 x}{2r^2}$, et dans (3)' les g_i des séries alternées en $\left(\frac{t^2 s}{2r^2} \right)$

Les f_i et g_j ont toutes une infinité de racines positives et distinctes.

Etude du phénomène dans le cas où $\frac{t^2}{2r}$ n'a pas une grande valeur

Si la particule fluide envisagée correspond à une valeur de z finie, et à une valeur de x qui tout en étant petite, est supérieure aux abscisses de la zone d'ébranlement, il suffit de se reporter à (3)', et l'on remarque que $g_1 = 0$ caractérise les maxima et les minima.

Si x et z sont finis, avec $\frac{t^2}{2r}$ petit, les maxima et les minima sont donnés par $f_2 = 0$; le sommet de l'onde apparente qui se produira au bout du temps t en (x, z_0) , correspond à

$$h = \frac{x}{r^2} \left(\frac{p^{1/2}}{1} - \frac{p^{3/2}}{5} + \frac{p^{5/2}}{9} - \frac{p^{7/2}}{13} \dots \right) + \frac{z_0}{r^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) p^n (-1)^n}{4n+1} \right] -$$

$$- \frac{t^2 z_0^2}{2 r^4} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{2!} \frac{p^n (-1)^n}{4n+1} \right] \dots,$$

où $p = \left(\frac{t^2 x}{2 r^2} \right)^2$ est une racine de $f_2 = 0$.

Supposons maintenant z_0 fini, x très grand, et laissons à $\frac{t^2}{2r}$ une valeur petite; dans ce cas, les maxima et minima sont définis par $f_1 = 0$.

Etude du phénomène dans le cas où $\frac{t^2}{2r}$ a une grande valeur

Lorsque x est fini et inférieur à z , on a recours à une méthode d'approximations successives en partant de

$$g_1 + \frac{x^2}{3! \cdot z^2} g_2 = 0;$$

si au contraire $z < x$, on emploie le même procédé en utilisant l'équation

$$2 \lambda f_1 - \frac{z}{x^2} f_2 - \frac{z^2}{x^2} \lambda f_3 \dots = 0, \quad \text{avec } \lambda = \frac{t^2 x}{2 r^2}, \text{ et en prenant pour premières valeurs approchées de } \lambda \text{ les racines de } f_1 = 0.$$

Ondes par émergence en milieu indéfini — Etude du phénomène dans le voisinage de la zone d'émergence

Nous guidant sur la méthode préconisée par M. BOUSSINESQ dans le cas de deux dimensions (cylindre immergé dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe du canal), nous adoptons pour l'expression de la dénivellation:

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{2n} d\theta \int_0^{\infty} \left(\frac{t^2 \cos \mu}{4 r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' \left(\frac{t^2 \cos \mu}{4 r} \right) \cdot F(x + r \cos \theta, (y + r \sin \theta) dr,$$

où ψ est définie par

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - \mu^2) d\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin \gamma - \cos \gamma) + \int_0^{\infty} e^{-2m\sqrt{\gamma}} \cos m^2 dm.$$

Nous remplacerons le corps par son paraboloïde osculateur, et substituerons alors

$$H \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] \quad \text{à } F(x, y).$$

Dans l'expression de la dénivellation qui peut s'écrire

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \left(\frac{r^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{r^2 \cos \mu}{4r} \right) F(x \pm r \cos \theta, y \pm r \sin \theta) dr,$$

la fonction F n'a de valeur que si $-a \leq x \pm r \cos \theta \leq a$, $-b \leq y \pm r \sin \theta \leq b$.

A titre indicatif, nous n'étudierons ici que le cas $x = a$, $y < b$, et remarquerons qu'en la circonstance

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\sum_{i=1}^4 \int_0^{r'_i} \right) \text{ avec } (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{et } r'_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}, \quad r'_2 = \sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2},$$

$$r'_3 = \sqrt{(a-x)^2 + (b+y)^2}, \quad r'_4 = \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}.$$

Les fonctions F entrant dans les 2 premiers éléments de Σ sont

$$F(x \pm r \cos \theta, y \pm r \sin \theta) \text{ et } F(x \pm r \cos \theta, y \mp r \sin \theta), \text{ et celles entrant dans les autres}$$

$$F(x \pm r \cos \theta, y \mp r \sin \theta) \text{ et } F(x \pm r \cos \theta, y \pm r \sin \theta).$$

En prenant pour valeur approchée de $F = \frac{\text{volume du corps immergé}}{\pi ab}$, on voit qu'en première approximation l'on a

$$h = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi t} \cdot (F) \cdot \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \mu d\mu \left(\sum_{i=1}^4 \int_0^{r'_i} \right), \text{ avec } a_i^2 = \frac{r'^2 \cos \mu}{2r}, \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi \left(\frac{\alpha_i^2}{2} \right) d\alpha_i.$$

Les α_i étant des nombres positifs considérables, on peut avec M. BOUSSINESQ substituer

$$-\frac{1}{\alpha} \psi \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) \text{ à } \int_0^{\frac{\pi}{2}}, \text{ et par suite donner à } h \text{ une forme relativement simple.}$$

L'étude détaillée du phénomène conduit aux conclusions ci-dessous indiquées:

Suivant que la particule fluide M occupe dans l'angle $y > b$ des axes de la section à fleur d'eau les positions: $(x > a, y > b)$, $(x < a, y > b)$, $(x > a, y < b)$, $(x < a, y < b)$, elle peut être considérée suivant les cas comme soumise à 1, 2 ou quatre trains absolus d'ondes.

Si la particule fluide est dans l'une des positions $(x > a, y < b)$, $(x < a, y > b)$ les 4 trains sont distincts. Si la particule fluide est à l'intérieur de la section, les 4 trains sont distincts toutes les fois qu'elle n'est pas sur l'un des axes; si elle est sur l'un des axes, les 4 trains se réduisent à deux trains doubles distincts, et enfin si elle est au centre, les 4 trains d'ondes sont identiques. Si la section à fleur d'eau est circulaire, toutes les fois que la particule est à l'intérieur de la section, les 4 trains se réduisent à 2 trains doubles distincts.

Introduction de termes secondaires dans le potentiel des vitesses

L'étude des ondes d'émergence dans un canal de profondeur infinie, se trouvant, grâce à l'emploi des images de KELVIN (voir Mémoire de M. Boussinesq — Annales de l'École normale 1910), ramenée à celle des ondes dans un milieu indéfini, il est facile d'examiner pour un tel milieu l'influence perturbatrice motivée par l'intervention d'une coordonnée η de la surface d'émergence, non négligeable par rapport à la coordonnée y du point pour lequel on veut à un instant donné, évaluer la grandeur de la dénivellation.

Revenons à l'expression du potentiel des vitesses de POISSON (voir p. 144 de son mémoire sur la Théorie des ondes)

$$\varphi = - \frac{t}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{t^2}{3!} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{t^4}{5!} \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} \dots \right) F(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

ou ξ, η représentent les coordonnées horizontales de la zone d'émersion et $F(\xi, \eta)$ les ordonnées primitivement connues de la surface, avec

$$Z = \frac{\pi}{2 \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$$

En supposant ξ négligeable devant x , et η non négligeable devant y , on est conduit à calculer

$$Z_1 = \iint \frac{F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{z^2 + x^2 + (y - \eta)^2}}$$

En substituant au dénominateur son développement en série, et en assimilant la partie du corps immergé à son paraboloïde osculateur, de telle façon que $F(\xi, \eta) = H \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\eta^2}{l'^2} \right)$ on trouve que l'expression Z_2 approchée de Z_1 a pour valeur

$$Z_2 = \pi H l l' \left(\frac{1}{2R} - \frac{l'^2}{6R^3} \right) = \pi V \left(\frac{1}{2R} - \frac{l'^2}{6R^3} \right), \text{ avec } V = H l l' \text{ et } R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Il s'en suit que le potentiel des vitesses a pour valeur

$$\varphi = - \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{t \partial Z_2}{\partial z} + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{n+1} Z_2}{\partial z^{n+1}} + \dots \right]$$

On est conduit à introduire les termes complémentaires relatifs à $\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{R^3} \right)$, et l'on remarque

$$\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{R^3} \right) = \frac{(n+1)(n+2)P_n + 2(n+2) \cos \theta \cdot P_n' + \cos^2 \theta \cdot P_n''}{R^{n+3}} = \frac{Q_n}{R^{n+3}},$$

avec $\cos \theta = \frac{z}{R}$ et où P_n est le polynome de LEGENDRE d'ordre n .

L'équation $Q_n = 0$ est de degré n en $\cos \theta$ et ne renferme que des termes ayant la parité de n , elle a comme $P_n = 0$ toutes ses racines réelles et distinctes comprises entre -1 et $+1$.

L'introduction du terme en $\frac{1}{R^{2p+1}}$ conduirait à une équation Q_n analogue à Q_n , qui a aussi toutes ses racines réelles et distinctes.

Si l'on fait abstraction des termes en $\frac{1}{R^3} \dots$, on retrouve le développement classique de φ .

Ondes d'émersion dans un canal de largeur donnée et de profondeur infinie

Le potentiel des vitesses peut être représenté par la série de Mac-Laurin

$$\varphi = t h_0 + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial h_0}{\partial z} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^n h_0}{\partial z^n} + \dots, \quad \dots \quad (1)$$

où h_0 qui désigne la valeur initiale au point (x, y, z) de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ou de la dénivellation, répond aux

conditions $\Delta_2 h_0 = 0$, $\frac{dh_0}{dn} = 0$ sur les parois, et est telle que pour $s = 0$, elle se réduise à $f(x, y)$.

Si l'on se trouve dans le cas limite d'un canal de largeur a , on peut évaluer la dénivellation, en introduisant le corps réel et ses $2k$ images, et adoptant comme aire totale d'émergence l'ensemble de l'aire vraie et de ses $2k$ images, à condition de faire croître k indéfiniment. Si l'on ne considère qu'un seul élément dq immergé à l'origine des coordonnées, en supposant ξ et η négligeables devant x et y , on trouve que la dénivellation de la particule fluide située à la surface dans un canal à parois parallèles distantes de a , aura pour valeur une série dont le terme de rang m sera définie par l'expression

$$\frac{dq}{2\pi} (-1)^{3m+2} \frac{\left(\frac{l^2}{2}\right)^{2m+1}}{(2 \cdot 4 \dots 2m)(2m+3) \dots (4m+1)} \sum_{j=-k}^{j=k} \frac{1}{r_j^{2m+3}}$$

En première approximation, cette expression peut être remplacée par la suivante

$$\frac{dq}{\pi a R} (-1)^{3m+2} \left(\frac{l^2}{2R}\right)^{2m+1} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4m+1)}, \quad \text{avec } R = \sqrt{x^2 + s^2}.$$

Quant à la dénivellation au point (x, y, s) , elle a pour valeur en première approximation.

$$h = \frac{dq}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{l^2}{R}\right)^n \cdot \frac{2}{aR} \cdot \frac{n+1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \sum_{p=0}^{p < \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \frac{1}{p!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n+1-2p)!} \cos \theta,$$

avec $R = \sqrt{x^2 + s^2}$ et $\cos \theta = \frac{s}{R}$.

On peut donner une expression rigoureuse de φ et par suite de la dénivellation, en supposant le corps réduit à un élément dm .

Si l'on se trouve dans le cas d'un canal de largeur donnée et de profondeur infinie, il suffit de prendre pour h_0 le développement

$$h_0 = dm \left[\frac{1}{r} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + s^2 + (y - ka)^2}} - \frac{1}{ka} \right) + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + s^2 + (y + ka)^2}} - \frac{1}{ka} \right) \right]$$

qui répond aux conditions exigées $\Delta_2 h_0 = 0$, $\left(\frac{\partial h_0}{\partial n}\right) = 0$.

$$\text{L'expression } C_1(x, y, s, a) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + s^2}} + \sum \left(\frac{1}{\sqrt{(y - ka)^2 + x^2 + s^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 a^2}} \right)$$

est susceptible d'être développée en série trigonométrique

$$C_1 = A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} A_v \cos \frac{2v\pi y}{a},$$

où $A_0 = \frac{-1}{a} \log u + B_0$, avec $u = x^2 + s^2$, B_0 étant une constante indépendante de u et

$$A_v = \frac{2}{a} \int_0^{\infty} e^{-tu - \frac{\pi^2 v^2}{a^2 t}} \frac{dt}{t}$$

Si l'on considère maintenant le cas d'un canal de largeur et de longueur limitées, mais de profondeur infinie, on est conduit à représenter le potentiel h_0 par l'expression

$$dm \times C_2(x, y, z, a, b), \text{ avec } C_2(x, y, z, a, b) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\mu, \nu} \cos \frac{\mu \pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b};$$

La fonction C_2 est telle que $C_2(x+a, y, z) = C_2(x, y+b, z) = C_2(x, y, z)$ et

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial x}\right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = \left(\frac{\partial C_2}{\partial y}\right)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0.$$

Le coefficient $A_{\mu, \nu}$ a pour valeur

$$A_{\mu, \nu} = \frac{4}{ab \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} e^{-2\pi z \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} + B_{\mu, \nu}$$

toutes les constantes $B_{\mu, \nu}$ sont nulles sauf celle qui correspond à $\mu = \nu = 0$

$$B_{0,0} = C_2(0, 0, z; a, b) + \frac{2\pi z}{ab} - \sum' \frac{4e^{-2\pi z \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}}{ab \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}$$

Si le corps est immergé dans un milieu limité par les parois

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}, \quad z = c,$$

il suffit de prendre pour expression de h_0

$$dm [C_2(x, y, z; a, b) + C_2(x, y, 2c - z; a, b)].$$

On peut étudier le problème des ondes par émergence dans le cas d'un bassin parallélépipédique limité dans toutes les directions, en faisant état d'une étude de POINCARÉ au problème des marées, c'est-à-dire en choisissant pour le potentiel φ une fonction se mettant sous la forme $\varphi = \varphi_1(x, y, t) \varphi_2(z)$.

On trouve ainsi que φ est constitué par 4 séries dont la première Φ_1 est définie par l'expression

$$\Phi_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sin(m t) \cdot A_{\mu, \nu} \cos \frac{\mu \pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b} \frac{e^{\frac{z}{K_1}} + e^{\frac{2c-z}{K_1}}}{m \left(1 + e^{\frac{2c}{K_1}}\right)},$$

en ayant soin de choisir pour K_1 et m les valeurs:

$$K_1 = \frac{1}{-\pi \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}, \quad m^2 = \frac{\frac{2c}{K_1} - 1}{K_1 \left(1 + e^{\frac{2c}{K_1}}\right)}, \text{ avec}$$

$$A_{\mu, \nu} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} f(\xi, \eta) \cos \frac{\mu \pi \xi}{a} \cos \frac{\nu \pi \eta}{b} d\xi d\eta$$

Aux fonctions Φ_2, Φ_3, Φ_4 , il y aurait lieu de faire correspondre respectivement les coefficients $({}_2A_{\mu, \nu}, {}_3A_{\mu, \nu}, {}_4A_{\mu, \nu})$ qui se rattachent aux groupements trigonométriques suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\mu \pi \xi}{a} \\ \sin \frac{(2 \nu + 1) \pi \eta}{2 b} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{(2 \mu + 1) \pi \xi}{2 a} \\ \cos \frac{\nu \pi \eta}{b} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{(2 \mu + 1) \pi \xi}{2 a} \\ \sin \frac{(2 \nu + 1) \pi \eta}{2 b} \end{array} \right\}.$$

Si l'on fait croître jusqu'à l'infini les dimensions du parallélépipède, on trouve que le potentiel des vitesses a pour valeur

$$\varphi = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \frac{\sin \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot z}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-z \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos \alpha (x - \xi) \cos \beta (y - \eta) d\alpha d\beta d\xi d\eta$$

qui n'est autre que l'intégrale trouvée par POISSON, dans le cas d'un fluide indéfini.

Observation. Toutes les fois que l'on étudie les ondes d'émersion produites dans un canal de largeur limitée, en supposant que le corps immergé n'est pas constitué par un cylindre dont les génératrices perpendiculaires à l'axe du canal embrassent toute la largeur, on peut dire que la dénivellation ne peut pas être indépendante de y ; l'hypothèse qui conduit à admettre que le phénomène se reproduit de la même façon, dans tout plan parallèle aux parois ne peut conduire qu'à une première approximation.

Rôle des vagues divergentes dans la résistance à la marche des flotteurs

Par E. G. Barrillon, Paris

I. Après avoir repris sur une échelle plus vaste des essais analogues à ceux relatés par W. FROUDE dans son Mémoire de 1877, nous avons été amenés à conclure que les résultats obtenus par W. FROUDE ne pouvaient s'expliquer suffisamment par cette théorie classique, et à rechercher s'il ne pourrait y avoir des phénomènes d'interférence entre vagues divergentes comme entre vagues transversales, ou des modifications des vagues transversales sous l'effet du voisinage de vagues divergentes.

Parmi plusieurs dispositifs expérimentaux utilisés pour étudier ces phénomènes, soit par des relevés précis de formes de vagues, soit par des mesures dynamométriques nous décrirons seulement le suivant qui nous semble le plus convenable pour mettre en évidence le rôle des divergentes.

Le matériel expérimental utilisé se compose de trois modèles ayant des formes identiques ou voisines. L'un de ces modèles est décomposé en deux demi-modèles, par un plan longitudinal.

Au cours des essais, tous les modèles ont leurs longitudinaux parallèles à la direction de la marche et les mesures dynamométriques se font toujours sur le même modèle, qui est celui placé le plus à l'arrière dans le sens de la marche. Tous les essais sont supposés faits à la même vitesse de route et il est important que cette vitesse soit très exactement réalisée.

Il est procédé à 4 essais différents et indépendants.

Dans le premier, on mesure la résistance de remorquage du modèle arrière isolé.

Dans le second, on mesure la résistance de ce même modèle placé derrière le modèle avant, à une certaine distance.

Dans le troisième essai, on mesure la résistance du modèle, placé dans le champ formé par les deux demi-modèles placés en avant et latéralement de part et d'autre, de telle sorte que le modèle sur lequel on fait les mesures se trouve à la rencontre des demi-champs de divergentes, formés par les demi-modèles.

Dans le quatrième essai, on mesure la résistance du modèle arrière, placé dans le champ formé à la fois par les transversales du modèle avant et par les divergentes des demi-modèles latéraux.

Les résultats sont les suivants: pour des modèles que nous appelons V , pour une vitesse de route de 2 m/s. et un flotteur arrière, pesant 53,100 kg. (la distance du flotteur avant au flotteur arrière, mesurée d'étambot à étrave est 13,816 m.; la distance des demi-flotteurs avant, mesurée de même est, dans le sens longitudinal, de 3,613 m., et dans le sens transversal, de 2,10 m., soit 4,20 m entre les deux demi-flotteurs).

	Résistance mesurée	Résistance de frottement calculée	Résistance directe	Gain en valeur absolue	Gain proportionnel
1 ^{er} essai	3,677 kg	0,702 kg	2,975 kg	0	0
2 ^{ème} essai	3,080 kg	0,702 kg	2,378 kg	0,597 kg	0.20
3 ^{ème} essai	1,210 kg	0,702 kg	0,508 kg	2,467 kg	0.83
4 ^{ème} essai	0,728 kg	0,702 kg	0,026 kg	2,949 kg	0.99

Ce genre d'essai sur modèles V montre qu'il peut y avoir des effets d'interférence ou de modification du champ d'ensemble, dus aux vagues divergentes, que les interférences de divergentes peuvent être plus importantes que les interférences de transversales, enfin, que la résistance due à la formation de vagues par le flotteur V en mouvement, peut être pratiquement annulée en plaçant le flotteur dans un champ de vagues artificiel.

2. Dans ce qui précède, nous avons toujours utilisé la même vitesse de route et la même position relative de chaque flotteur formant des vagues artificielles par rapport au flotteur dont on mesure la résistance. D'autres conclusions peuvent être tirées en variant les conditions des essais.

Plaçons-nous d'abord dans le cas du 2^e essai (deux flotteurs en tandem) et conservons la même vitesse de route, mais faisons varier l'écartement entre flotteurs. Nous constatons des variations de résistance ayant, par rapport à l'écartement, une périodicité égale à la longueur Λ de la houle d'accompagnement théorique, dont la célérité égale la vitesse de route (en réalité, la période semble un peu plus courte). Cette périodicité est la même que dans les expériences de W. FROUDE.

Plaçons-nous maintenant dans le cas du 3^e essai pour un même écartement transversal des demi-flotteurs latéraux et une même vitesse de route, mesurons la résistance du flotteur arrière à divers éloignements, mesurés dans le sens longitudinal. Nous constatons alors que la périodicité de la résistance est égale à Λ , comme précédemment, et non à la distance de crête en crête des divergentes mesurée dans le sens longitudinal. Dans ce cas, la courbe des résistances en fonction de l'écartement présente en plus de la périodicité générale Λ , des inégalités relativement faibles, prouvant qu'il y a ici une superposition de plusieurs interférences; la période Λ est celle des maxima maximorum.

Plaçons-nous maintenant dans le cas du 4^e essai, et laissant identique la composition du train, faisons varier la vitesse de route seulement, un peu au-dessus et un peu au-dessous de 2 m/s. (vitesse de route pour laquelle la composition du train a été réglée). Nous constatons alors, que pour une variation de 1½ % de la vitesse au-dessus et au-dessous de 2 m/s., la résistance varie de plus de 25 %. Ceci montre d'une part, la nécessité dans ce genre d'essais d'opérer à une vitesse absolument constante et d'autre part, la ressemblance des phénomènes dont il s'agit, avec de véritables phénomènes de synchronisme.

3. Le fait que la périodicité des phénomènes d'interférence, dus aux vagues divergentes est la même que la périodicité des phénomènes d'interférence dus aux vagues transversales, tend à prouver que c'est la vitesse du groupe qui domine tous ces phénomènes, quel que soit leur mécanisme interne, et que par suite il n'y a pas lieu de faire au point de vue dynamométrique de distinction entre les systèmes transversaux et les systèmes divergents, puisque ces systèmes n'interviennent que par leur ensemble.

Le détail du mécanisme a pu être étudié par relevés de formes de vagues, sur plusieurs formes de flotteurs, et en particulier, sur la forme qui avait servi à W. FROUDE.

Cette étude a montré que le champ des vagues dans la région intermédiaire (entre les divergentes avant et les divergentes arrière) était déjà modifié par les interférences, suivant qu'il s'agit de flotteurs favorables ou de flotteurs défavorables à la marche.

L'hypothèse de la théorie classique que les interférences ont lieu dans la région arrière seulement (à l'arrière des divergentes de l'arrière), n'est donc pas non plus acceptable du point de vue géométrique.

4. Les essais qui viennent d'être relatés ont été exécutés sur des modèles V représentant des vedettes.

Une autre série d'essais a été exécutée en employant des modèles ayant des formes de véritables navires de mer (forme T. M.). Dans cette série d'essais, on a d'abord employé des modèles identiques entre eux et placés dans les mêmes lignes d'eau; on a trouvé que le gain de résistance pouvait (lorsque le train formant le champ de vagues artificiel était correctement accordé), dépasser la résistance directe du modèle, sur lequel les mesures dynamométriques étaient faites, c'est-à-dire, que l'effort de traction nécessaire pour remorquer le modèle dans le champ de vagues artificiel était moindre que la résistance de frottement; le modèle est alors réellement poussé par le champ de vagues artificiel.

Le train, conservant la même disposition géométrique, on a alors surchargé les modèles formant le champ de vagues artificiel de façon à former des vagues plus fortes que celles que produit le modèle lui-même, lorsqu'il est isolé. Dans ces conditions, on a pu abaisser jusqu'à zéro la résistance de remorquage du modèle placé dans le champ de vagues artificiel, c'est-à-dire, que le champ artificiel, fournit au modèle la poussée nécessaire pour vaincre sa résistance propre de frottement.

L'emploi d'un champ de vagues artificiel permet donc, non seulement de réduire la résistance de remorquage à la résistance de frottement seule, comme cela était le cas pour les modèles V, mais encore, d'annuler la résistance totale de remorquage.

5. L'étude des phénomènes n'est pas actuellement assez développée et surtout s'étend sur un nombre de formes trop limité, pour que l'on puisse dès maintenant affirmer que la notion des champs de vagues à individualité propre, doit être abandonnée et remplacée par la conception d'un champ d'ensemble tel que celui que l'on utilise dans l'analyse mathématique de la résistance à la marche.

Une des difficultés de l'obtention de résultats, s'étendant à des cas variés, est l'immensité du travail à entreprendre. Une collaboration des divers laboratoires intéressés à ces questions, serait très désirable, car il est peu probable qu'un seul puisse mener à bien une étude qui ne peut se faire que dans des Bassins d'Essais, en général surchargés de travail courant.

Le but de la présente communication est spécialement d'attirer l'attention sur un domaine de recherches expérimentales, insuffisamment exploré, et au sujet duquel il y a matière à une collaboration internationale.

Sur le signe de la pression dans un liquide pesant, en mouvement irrotationnel

Par G. Bouligand, Poitiers

Considérons un liquide parfait pesant, en mouvement irrotationnel. Si nous prenons pour axe Oz la verticale ascendante, nous avons, en désignant par φ le potentiel des vitesses au point (x, y, z) et à l'instant t , par p la pression, par ρ la densité:

$$\frac{p}{\rho} + g z + \frac{1}{2} \text{grad}^2 \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

d'où en prenant le laplacien

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = -\frac{1}{2} \Delta (\text{grad}^2 \varphi)$$

or les composantes (u, v, w) de $\vec{\text{grad}} \varphi$ étant harmoniques, nous avons

$$\Delta (\text{grad}^2 \varphi) = \Delta (u^2 + v^2 + w^2) = 2 (\text{grad}^2 u + \text{grad}^2 v + \text{grad}^2 w)$$

d'où il résulte que le laplacien de la pression est partout négatif ou nul.

Il s'ensuit que la pression ne peut offrir aucun minimum au sein du fluide. Cette fonction ne pourra atteindre sa borne inférieure que sur les surfaces délimitant le liquide.

De cette remarque simple découlent d'importantes conséquences:

I. Etudions le mouvement irrotationnel en chute libre, dans le vide, d'une certaine masse liquide. A un instant quelconque, la pression sera nulle à la surface limite; et puisque $\Delta p \leq 0$, p sera positive dans toute la masse du fluide. On pourra donc intégrer les équations du mouvement sans se préoccuper du signe de la pression, pourvu que la surface libre fournie par ce calcul hypothétique évolue de manière à ce qu'il ne se produise jamais de choc entre les éléments matériels qui la composent, ou plus précisément, qu'il n'y ait jamais rencontre de deux éléments matériels de la surface ayant des positions distinctes au début du mouvement.

II. On arrive à une conclusion analogue en étudiant le mouvement irrotationnel d'un liquide dans un vase à parois fixes, moyennant certaines hypothèses simples sur la forme des parois. On répond ainsi, au moins partiellement, à une question formulée par M. HADAMARD à la fin du chapitre III de ses Leçons sur la Propagation des Ondes (no. 138).

Nous supposons avec précision que la surface constituant l'ensemble des parois du vase répond aux conditions suivantes:

1. Une verticale la coupe en un point au plus.
2. Une droite de direction quelconque la coupe en deux points au plus.

Il est alors facile de déduire de l'équation (1), que sur cette surface, le gradient de la pression est dirigé vers l'extérieur du liquide, ou encore que la dérivée normale intérieure $\frac{dp}{dn}$ est négative: en effet, il suffit évidemment d'établir que l'on a bien

$$\frac{d}{dn} (\text{grad}^2 \varphi) > 0$$

Soit M un point de la paroi. La molécule qui passe en M à l'instant t occupe à l'instant ultérieur $t + dt$ une nouvelle position M' telle que l'on ait

$$\vec{MM'} = \vec{V} dt \quad \text{avec } \vec{V} = \vec{\text{grad}} \varphi$$

Nous avons

$$\frac{d}{dn} \bar{V}^2 = 2 \bar{V} \cdot \frac{d\bar{V}}{dn}$$

Portons à partir de M sur la normale en ce point à la paroi un vecteur \vec{MM}_1 , dirigé vers l'intérieur et de longueur δn . Tout revient à prouver que l'on a bien

$$\vec{V} dt \cdot \frac{d\bar{V}}{dn} \delta n > 0$$

or $\frac{dV}{dn} \delta n$ est l'accroissement géométrique infinitésimal $\delta \bar{V}$ du champ vectoriel \vec{V} pour le déplacement $\delta M = \vec{MM}_1$. Nous avons donc

$$\vec{V} dt \cdot \frac{d\bar{V}}{dn} \delta n = dM \cdot \delta \bar{V}$$

mais puisque le champ \vec{V} irrotationnel, le second membre peut s'écrire $\delta M \cdot d\bar{V}$: pour un déplacement tangentiel du point M , il résulte des hypothèses faites sur les parois que l'accroissement géométrique $d\bar{V}$ fait un angle aigu avec la normale interne, donc que le produit scalaire $\delta M \cdot d\bar{V}$ est positif. Mais alors, la pression possède les caractères suivants:

- a) Elle s'annule à la surface libre.
- b) Elle a, le long de la paroi, son gradient dirigé vers l'extérieur du liquide.
- c) Son laplacien est négatif ou nul au sein du liquide.

De l'ensemble de ces conditions résulte alors pour la pression l'impossibilité d'acquiescer des valeurs négatives. On peut donc encore intégrer les équations du mouvement sans se préoccuper du signe de la pression, pourvu que la surface libre fournie par ce calcul hypothétique évolue de manière à ce qu'aucun choc ne se produise entre ses éléments.

III. Supposons enfin qu'on étudie le mouvement d'un solide qui se déplace au sein d'un liquide, de manière à éviter la production de tourbillons. Si, en s'inspirant d'une idée de M. RIABOUCHINSKY ¹⁾, on fait décroître brusquement la pression extérieure, on pourra voir le liquide se séparer de la partie arrière du solide pour donner naissance à une cavitation. Des remarques précédentes, il résulte que la cavitation doit s'amorcer à partir de la paroi solide. Ce résultat ne peut d'ailleurs s'étendre au cas du mouvement tourbillonnaire, où la photographie révèle des cavitations dont la surface est sans point commun avec celle du solide (si tant est qu'une comparaison avec les liquides réels soit permise) et où l'équation (1) établit l'existence de pressions négatives très grandes aux environs d'un tube tourbillonnaire très délié.

¹⁾ Voir C. R. Ac. Sc. Paris, mai 1926.

Ueber Grenzschichtabsaugung

Von J. Ackeret, Göttingen

Vor längerer Zeit hat PRANDTL¹⁾ gezeigt, daß man in vielen Fällen die Wirkung der Flüssigkeitsreibung etwa so beschreiben kann: Beim Ingangsetzen der Strömung (durch geeignete impulsive Kräfte) herrscht zirkulationslose Potentialbewegung. Durch das Haften der Flüssigkeit an festen Wänden kommt aber ein der Potentialtheorie fremdes Element herein. Die Geschwindigkeitsgradienten normal zu den Wandungen sind sehr groß, so daß auch bei kleiner Zähigkeit eine nicht zu vernachlässigende Reibungskraft auf die in der Nähe der Wand strömende dünne Schicht ausgeübt wird. Außerhalb dieser „Grenzschicht“ ist fast ungestörte Potentialbewegung. Im weiteren Verlauf der Bewegung aber zeigt sich ein charakteristischer Unterschied zwischen dem Verhalten der Grenzschicht, da wo Druckabfall in Strömungsrichtung vorliegt und da, wo Druckanstieg herrscht. Im ersten Fall wird mit der äußeren Strömung auch die Grenzschicht beschleunigt, im letzteren aber hat die Grenzschicht, die durch Reibung an der Wand Energie verliert, nicht mehr genügend Impuls, um gegen den Druck vorwärtszuströmen. Es kann dann Stagnation der Grenzschicht eintreten, die dann weiterhin die ungestörte Strömung von der Wand abdrängt (Ablosung).

In dem zitierten Vortrag hat Prandtl aber auch schon einen Versuch beschrieben, wo er die Grenzschicht auf der Hinterseite eines Zylinders absaugt und so Stagnation und Ablösung künstlich verhindert.

Trotz des großen theoretischen und auch praktischen Interesses ist merkwürdigerweise dieser Versuch anscheinend nicht wiederholt worden.

Die im nachfolgenden beschriebenen neuen Untersuchungen sind im Laufe der letzten Jahre von Prof. Betz und mir ausgeführt worden. Sie haben den Zweck, die Anwendungsmöglichkeit der Absaugung für praktische Fälle zu zeigen, insbesondere auch den für die Absaugung nötigen Kraftbedarf festzustellen.

In Abb. 1 soll das Prinzip der Grenzschichtabsaugung kurz erläutert werden. Die Flüssigkeit (Wasser, Luft etc.) soll von links her durch ein in Strömungsrichtung erweitertes Rohr strömen. Man weiß aus der Erfahrung, daß die gezeichnete Form ungünstig ist, nämlich zu stark erweitert; will man kinetische Strömungsenergie in Druck- (potentielle) Energie mit gutem Wirkungsgrad umwandeln, so darf der Öffnungswinkel des Kegels 10° nicht wesentlich übersteigen. Man beobachtet tatsächlich ein starkes Anwachsen der in der Figur 1a punktierten Grenzschicht und Ablösung der Strömung kurz hinter dem engsten Querschnitt. Die Druckumsetzung ist klein. Bringt man an den Stellen, wo die Ablösung sonst einsetzt (besser etwas vorher), einen Schlitz in

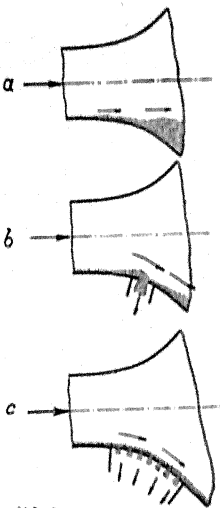


Abb. 1

der Wand an, Abb. 1b, und saugt Grenzschicht-Flüssigkeit weg, so bleibt die Ablösung aus. Sie kann weiter hinten unter Umständen noch auftreten, da ja immer noch Druckanstieg vorhanden ist. Will man sicher gehen, so wird man an mehreren Stellen absaugen und schließlich kontinuierliche Absaugung, d. h. durchlässige Wände anwenden (Abb. 1c).

Wie sich die Absaugung praktisch auswirkt, soll nun an Hand dreier weiterer Bilder gezeigt werden. Ein offenes Wasser-Gerinne ist stark zusammengeschnürt und hierauf rasch

¹⁾ L. PRANDTL, Verhandl. des III. intern. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, Leipzig 1905, Seite 484.

erweitert. Die Strömung (von links nach rechts) wird durch aufgestreutes Aluminiumpulver sichtbar gemacht. Die Aufnahmen Abb. 2, 3, 4 (Tafel XIX) sind Ansichten des Vorganges von oben.

Abb. 2 zeigt zunächst, daß der Wasserstrom sich im engsten Querschnitt an beiden Wänden ablöst. Es bilden sich Diskontinuitätsflächen, die bekanntlich unstabil sind und sich bald in einzelne große Wirbel auflösen.

In Abb. 3 wird zunächst nur auf einer Seite (in der Figur oben) abgesaugt. Die Strömung legt sich sofort an, auf der anderen (nicht abgesaugten) Seite ist nach wie vor Ablösung. Die Stagnation hinter der Ablösestelle ist deutlich erkennbar, da die einzelnen Aluminiumpulverteilchen einzeln sichtbar sind. Zwei Absaugeschlitze sind in Tätigkeit.

Wird endlich auf beiden Seiten abgesaugt, so hört jede Wirbelbildung auf, die Strömung hat weitgehend Potentialcharakter (Abb. 4).

Nun haben wir versucht, auch bei einem geschlossenen, stark erweiterten Rohr durch einen Schlitz abzusaugen²⁾ (Abb. 5) (Absaugeschlitz s). Ohne Absaugung ergibt sich der Druckverlauf $s = 0$ (obere Hälfte der Abbildung 5). Der aus den gegebenen Querschnitten

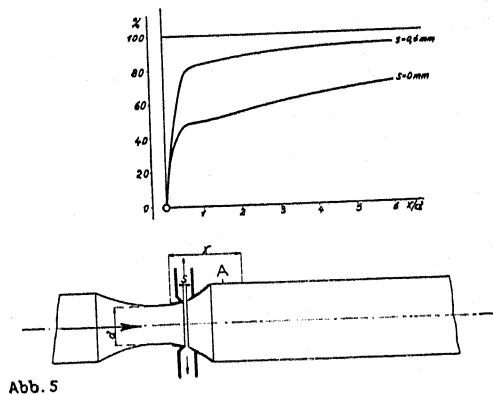


Abb. 5

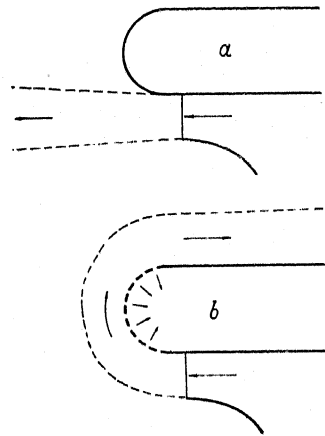


Abb. 6

errechenbare größte Druckanstieg ist mit 100 % bezeichnet. Sobald abgesaugt wird ($s = 0,6$ mm), wird die Umsetzung von kinetischer in Druckenergie wesentlich günstiger und erfolgt, was nun technisch von großer Wichtigkeit ist, auf sehr kurzer Strecke. Im einzelnen waren die Daten:

Durchmesser der engsten Stelle	14 mm
Durchmesser nach der Erweiterung	28 „
Durchfließende Menge	1,94 l/sek.
Abgesaugte Menge	0,094 „
Theoretischer Druckanstieg	7,92 m Wassersäule
Gemessener Druckanstieg zwischen engstem Querschnitt und einer Stelle A unmittelbar nach der Erweiterung	6,68 m WS
Druckdifferenz zwischen Absaugeschlitz und A	4,45 m „
Spaltweite	$s = 0,6$ mm.

Aus diesen Angaben kann man die Absaugeleistung berechnen; sie ist 3,4 % der durch den engsten Querschnitt pro Sekunde strömenden Energie, wobei ein Wirkungsgrad der Absaugepumpe von 75 % berücksichtigt ist.

²⁾ J. ACKERET, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1926, Seite 1153.

Es wurden ferner Umlenkungen, wo Ablösung leicht auftritt, untersucht. Besonders auffällig ist ein Versuch, bei welchem ein freier Luftstrahl um 180° umgelenkt wird bei einseitiger Führung auf der konkaven Seite. Abb. 6a ohne Absaugung auf der Innenseite, Abb. 6b mit Absaugung. Zurzeit sind Versuche mit Tragflügeln im Gang, bei welchen auf der Oberseite abgesaugt wird, um das «Abreißen» der Strömung bei großen Anstellwinkeln zu verhindern. Ueber einige vorläufige Ergebnisse ist ein kurzer Bericht erschienen³⁾. Absaugversuche an Kugeln hat SCHRENK beschrieben⁴⁾.

³⁾ Vorläufige Mitteilungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen. Heft 4.

⁴⁾ O. SCHRENK, Zeitschr. für Flugtechnik und Motor-Luftschiffahrt 1920, Seite 366.

Ueber turbulente Strömung durch Röhren.

Von M. Broszko, Warschau

Im Gegensatz zu den derzeit vorherrschenden Lehrmeinungen wird in der vorliegenden Theorie die Ansicht vertreten, daß die für den turbulenten Strömungszustand charakteristischen Pulsationen als *geordnete, molekulare* Bewegungen aufzufassen sind, die sich den (im Ruhezustand einer endlichen Flüssigkeitsmasse ungeordneten) molekularen Bewegungen thermischer Herkunft überlagern. Des weiteren wird angenommen, daß die ausgebildeten turbulenten Pulsationen in ihrer Gesamtheit eine Welle bilden, die im inneren Kern der strömenden Flüssigkeitsmasse (im «turbulenten Bereich») fortschreitet, und daß der turbulente Bereich von einer äußerst dünnen Laminarschicht umhüllt ist, welch' letztere über der ruhenden, stets an den Wänden haftenden Flüssigkeitsschicht in Schichten wegleitet¹⁾. Im Falle eines *geradachsigen Kreisrohres* ist die Welle eben und die turbulenten Pulsationen sind von höchst einfacher Art: es führen nämlich sämtliche, im turbulenten Bereich enthaltenen Flüssigkeitsteilchen in ihren Achsialebenen eine geradlinige, harmonische Bewegung aus, deren Amplitude A , Schwingungsdauer T_0 , und Wellenlänge λ_0 , sowie der Neigungswinkel der geradlinigen Schwingungsbahn gegen die Rohrachse im ganzen Bereich ihren Wert nicht ändern würden, falls die ebene Welle in einer *ruhenden* Flüssigkeit sich ausbreiten würde. Die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen Welle würde dann durch die Gleichung $w = \frac{\lambda_0}{T_0}$ gegeben sein, und die durch das Fortschreiten der ebenen Welle in ruhender Flüssigkeit bedingten radialen Verschiebungen der Flüssigkeitsteilchen könnte man durch die einfache Gleichung

$$r_0' = A_r \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_0} - \frac{z}{\lambda_0} \right)$$

darstellen, wenn die radiale Komponente der Verschiebungsamplitude mit A_r bezeichnet wird. In dem betrachteten Fall durchquert aber die ebene Welle ein *bewegtes* Medium. Die wirklich eintretende radiale Verschiebung ist daher gegeben durch die Gleichung

$$r' = A_r \cos 2\pi \frac{T_0}{T} \left(\frac{t}{T_0} - \frac{z}{\lambda_0} \right),$$

in welcher T den infolge der Translation geänderten Wert der Schwingungsdauer bedeutet. Aus dieser Gleichung erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial r'}{\partial t} = -\frac{2\pi A_r}{T} \sin 2\pi \frac{T_0}{T} \left(\frac{t}{T_0} - \frac{z}{\lambda_0} \right)$$

$$\frac{\partial r'}{\partial z} = \frac{2\pi A_r}{T} \frac{T_0}{\lambda_0} \sin 2\pi \frac{T_0}{T} \left(\frac{t}{T_0} - \frac{z}{\lambda_0} \right)$$

$$\frac{\partial r'}{\partial r} = 0.$$

Beachten wir nun, daß bei der vorliegenden molekularen Bewegung die achsiale Komponente der Pulsationsgeschwindigkeit w'_z gegen die Translationsgeschwindigkeit \bar{v}_z vernach-

¹⁾ Eine kurzgefasste Angabe über die von uns angenommenen *Entstehungsursachen* und *Entstehungsbedingungen* der Turbulenz findet man in den Vortrags-Auszügen des 2. Intern. Mech. Kongresses, p. 42.

lässigbar ist, so erhalten wir, unter Benutzung des letzten Gleichungssystems, den Ausdruck für die radiale Komponente der Pulsationsgeschwindigkeit

$$w_r' = \frac{dr'}{dt} = \frac{\partial r'}{\partial t} + (v_s + w_s') \frac{\partial r'}{\partial z} = \frac{\partial r'}{\partial t} + v_s \frac{\partial r'}{\partial z} \\ = \frac{2\pi A_r}{T} \frac{r_s - w'}{w'} \sin 2\pi \frac{t}{T} \left(\frac{t}{T_u} - \frac{z}{\lambda_0} \right) \quad \dots \dots \dots (1)$$

In ähnlicher Weise gelangt man zu der Gleichung für die achsiale Komponente der Pulsationsgeschwindigkeit

$$w_s' = \frac{2\pi A_s}{T} \frac{r_s - w'}{w'} \sin 2\pi \frac{t}{T} \left(\frac{t}{T_u} - \frac{z}{\lambda_0} \right) \quad \dots \dots \dots (2)$$

wenn mit A_s die achsiale Komponente der Verschiebungsamplitude bezeichnet wird.

Die oben erörterten Vorstellungen über den Mechanismus der Turbulenz als Grundlage benutzend, knüpfen wir nun an REYNOLDSsche theoretische Untersuchungen²⁾ an, aus denen für den Fall einer achsensymmetrischen, stationären Flüssigkeitsströmung im Kreisrohr die Gleichung

$$g \mathcal{F} = -\Lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_s}{\partial r} \right) + \frac{\partial (v_s' v_s')}{\partial r} + \frac{v_s' v_s'}{r}$$

sich ergibt. In dieser Gleichung bezeichnet g die Schwerebeschleunigung, J den Gefällsverlust, Λ die Zähigkeitszahl, r den Radius eines mit dem Kreisrohr koaxialen Kreiszylinders, \bar{v}_s den Mittelwert aller Geschwindigkeiten, die zu irgend einer Zeit auf der Zylinderfläche $r = \text{const}$ zu finden sind, v_r', v_s' die Komponenten der zu v_s hinzutretenden Zusatzgeschwindigkeit in Richtung des Radius bzw. der Achse, und $\bar{v}_r' v_s'$ den Mittelwert des Produktes $v_r' v_s'$.

Durch Integration der letzten Gleichung erhält man

$$\frac{g \mathcal{F}}{2} r^2 = -\Lambda r \frac{dv_s}{dr} + r \bar{v}_r' v_s' + C_1$$

Beachtet man nun, daß die innere Reibung den durch thermische Bewegungen bedingten Impulstransport zur Ursache hat, so kann man die vorstehende Gleichung in der Form anschreiben

$$\frac{g \mathcal{F}}{2} r^2 = -r u_r' u_s' + r \bar{v}_r' v_s' + C_1 \quad \dots \dots \dots (3)$$

wenn u_r' bzw. u_s' die radiale bzw. achsiale Komponente der thermischen Schwankungsgeschwindigkeit u' bezeichnet.

Um zu einer Lösung dieser Gleichung zu gelangen, formen wir zunächst den Mittelwert $\overline{v_r' v_s'}$ um

$$\overline{v_r' v_s'} = \overline{v_r' (\bar{v}_s + v_s')} = \overline{v_r' v_s} = \frac{1}{T} \int_0^T v_r' v_s dt = \int dt \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d(v_r' v_s)}{dt} dt + C_1 \quad (4)$$

Auf den von der Zeit und voraussetzungsgemäß von nur zwei Koordinaten r und z abhängigen Differentialquotienten $\frac{d(v_r' v_s)}{dt}$ wenden wir nun die EULERSche Differentiationsregel an

²⁾ O. REYNOLDS, London, Phil. Trans. Vol. 174 (1883), p. 935.

$$\frac{d(v_r' v_z)}{dt} = \frac{\partial(v_r' v_z)}{\partial t} + v_z \frac{\partial(v_r' v_z)}{\partial z} + v_r' \frac{\partial(v_r' v_z)}{\partial r},$$

formen unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_z'}{\partial z} + \frac{\partial v_r'}{\partial r} + \frac{v_r'}{r} + \text{div } \mathbf{u}' = 0$$

die Glieder auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung um:

$$\frac{d(v_r' v_z)}{dt} = \frac{\partial(v_r' v_z)}{\partial t} + \bar{v}_z \frac{\partial(v_r' v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(v_r' v_z' v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(v_r'^2 v_z)}{\partial r} + \frac{v_r'^2 v_z}{r} + v_r' v_z \text{div } \mathbf{u}'$$

und nehmen von diesen Gliedern die zeitlichen Mittelwerte unter Beachtung der Tatsache, daß solche zeitliche, sich auf die turbulente Bewegung beziehende Mittelwerte wie $\overline{v_r' v_z'}$, $\overline{v_r'^2}$ usw. von z unabhängig sind ³⁾. Es wird dann

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{d(v_r' v_z)}{dt} dt = \frac{d(\overline{v_r'^2} \bar{v}_z)}{dr} + \frac{\overline{v_r'^2} \bar{v}_z}{r}.$$

Setzen wir diesen Wert in (4) ein und führen die angedeutete unbestimmte Integration aus, so erhalten wir nach nochmaliger Mittelwertbildung

$$\overline{v_r' v_z'} = t_v \left[\frac{d(\overline{v_r'^2} \bar{v}_z)}{dr} + \frac{\overline{v_r'^2} \bar{v}_z}{r} \right] + C_1. \quad \dots \dots \dots (5)$$

In dieser Gleichung bedeutet t_v ein bestimmtes bzw. ein noch zu bestimmendes Zeitintervall.

Eine analoge Behandlung des Ausdrucks

$$\overline{u_r' u_z'} = \overline{u_r' (\bar{v}_z + u_z')} = \overline{u_r' u_z} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u_r' u_z dt = \int dt \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d(u_r' u_z)}{dt} dt + C_2$$

ergibt die Gleichung

$$\overline{u_r' u_z'} = t_u \left[\frac{d(\overline{u_r'^2} \bar{v}_z)}{dr} + \frac{\overline{u_r'^2} \bar{v}_z}{r} \right] + C_2, \quad \dots \dots \dots (6)$$

in der t_u wiederum ein Zeitintervall bedeutet.

Setzt man nun die Werte für $\overline{v_r' v_z'}$ und $\overline{u_r' u_z'}$ aus (5) und (6) in die beiderseits mit dr multiplizierte Gleichung (3) ein, so erhält man

$$\frac{g\mathcal{F}}{2} r^2 dr = -t_u d(r \overline{u_r'^2} \bar{v}_z) + t_v d(r \overline{v_r'^2} \bar{v}_z) - C_3 r dr + C_0 dr$$

wobei $C_3 = C_1 - C_2$.

Da die Integrationskonstante dieser einfachen Differentialgleichung gleich Null ist, so nimmt ihr Integral die Gestalt an:

$$\frac{g\mathcal{F}}{4} r^2 = -\Lambda \bar{v}_z + \Theta \overline{v_r'^2} \bar{v}_z - C_4 r + C, \quad \dots \dots \dots (7)$$

wenn wir die Bezeichnungen

$$\frac{3}{2} t_u \overline{u_r'^2} = \Lambda, \quad \frac{3}{2} t_v = \Theta, \quad \frac{3}{4} C_3 = C_4, \quad \frac{3}{2} C_0 = C$$

³⁾ s. H. A. LORENTZ. Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig 1907, p. 65.

eingeführen. Diese Gleichung vereinfacht sich noch dadurch, daß die Konstante C_4 , wegen achsensymmetrischer Verteilung der Geschwindigkeitswerte, gleich Null ist. Berücksichtigt man außerdem, daß in der den turbulenten vom laminaren Gebiet trennenden Zylinderfläche Gl. (7) und die Gleichung für laminäre Strömung im Kreiszrohr

$$\frac{K}{4} (K^2 - r^2) = A v, \quad (8)$$

durch das gleiche Wertepaar (v, r) erfüllt sein müssen, und daß in dieser Trennfläche v'_1 und v'_2 gleich Null werden, so nimmt Gl. (7) die Gestalt an

$$\frac{K}{4} (K^2 - r^2) = A v + B v^2, \quad (9)$$

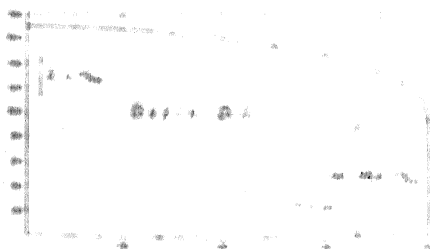
wenn wir in (8) und (9) mit K den Radius des Rohrquerschnitts bezeichnen. Führen wir nun den aus (1) berechneten Wert von v^2 in (9) ein und berechnen den in der Rohrachse auftretenden Maximalwert von v , mit v_m , so können wir schließlich die letzte Gleichung auf ihre endgültige Form bringen:

$$\frac{K}{4} (K^2 - r^2) = A v + \left(\frac{K}{4} (K^2 - v_m^2) \right) \left(\frac{v}{v_m} \right)^2 \frac{v}{v_m}, \quad (10)$$

Auf Grund der Gleichungen (8) und (10) berechnen wir noch die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} ; es ist

$$\bar{v} = \frac{2A}{K^2} v_m^2 + \left(1 - \frac{4A}{K^2} v_m \right) \frac{2v_m^2}{15} + \frac{16v_m^2}{15} \frac{v_m^2}{(v_m^2 - v_m^2)} + \frac{w^4}{15(v_m^2 - w^2)^2 v_m}, \quad (11)$$

Um den Genauigkeitsgrad unserer Theorie nachzuprüfen, wollen wir gleich das gewonnene theoretische Ergebnis mit denjenigen Versuchsergebnissen (BAZIN⁴⁾) vergleichen, die bei der experimentellen Nachprüfung der Geschwindigkeitsverteilung in einem sorgfältig geglätteten Zementrohr von $R = 40$ cm gewonnen wurden. Da sämtliche in den Gleichungen (10) und (11) auftretende Größen, außer der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w , von BAZIN in seinen Versuchsreihen experimentell bestimmt wurden⁵⁾, so gelangen wir nach Einführung des aus (11) berechneten Wertes von w in (10) zu einer Gleichung, in der außer den beiden Veränderlichen r und \bar{v} , nur durch Versuch bestimmte konstante Größen und keine zwecks Anpassung der Theorie an die Wirklichkeit eingeführte Willkürlichkeiten auftreten. Die Meßergebnisse der



im mittleren Querschnitt (Querschnitt II) durchgeführten zweiten Versuchsreihe benutzend, ermitteln wir daher für diese Versuchsreihe auf Grund der Gl. (11) die einzige Unbekannte w ; es ist $w = 93,8$ cm/sec. Der zugehörige Wert der Entfernung von der Achse $r_m = 39,44$ cm, so

⁴⁾ H. BAZIN, Paris, Mém. prés. par div. sav. 32 (1902) Nr. 6.

⁵⁾ Mit einer einzigen Ausnahme der Zähigkeitzahl A , denn die Temperaturmessung wurde von BAZIN unterlassen. — Wir haben für diesen Wert (der einen äußerst geringen Einfluss auf das Endergebnis der Zahlenrechnungen ausübt) $0,017$ cm²/sec eingeführt.

daß die Dicke der Laminarschicht sich zu $0,032$ cm ergibt. Nach Einsetzung des berechneten Wertes von w in (10) bestimmen wir die theoretische Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt und tragen gleich in die, diese Verteilung darstellende Zeichnung die 9 Meßwerte BAZINS ein. Ein bloßer Anblick der Zeichnung belehrt, daß die Meßwerte von den entsprechenden theoretischen Werten im Durchschnitt nur um einige Tausendstel dieser Werte abweichen, also um eine Größe, die viel kleiner ist als die möglichen Meßfehler und allfällige, durch unvermeidliche kleine Asymmetrien der experimentell untersuchten Strömung bedingte Anomalitäten. Zu der aus unserer Theorie abgeleiteten Geschwindigkeitsverteilungskurve ist noch zu bemerken, daß der Kurvenast des turbulenten Gebietes stetig in denjenigen des laminaren Gebietes übergeht, denn beide haben an der Uebergangsstelle (d. i. bei $\bar{v}_x = w$) außer der gleichen Ordinate eine gemeinsame Tangente.

Die vorliegende kurze Mitteilung über die Lösung eines einfachen Sonderproblems mit Hilfe der Vorstellungen unserer neuen, ohne empirische Annahmen ⁶⁾ auskommenden Theorie möge einstweilen genügen, um die Berechtigung der am Anfang aufgestellten These zu begründen.

⁶⁾ Zu solchen zählen wir auch die zweifellos nicht zutreffende Annahme, dass die bekannte BLASIUS'sche Interpolationsformel ein exaktes Naturgesetz zum Ausdruck bringt.

Potential-Strömungen durch rotierende Kreiselräder

Von E. Sörensen, Karlsruhe

Das von einer Kreiselmaschine irgend einer Art aufgenommene oder übertragene Drehmoment und damit auch die Leistung ist immer kleiner als das nach der Eulerschen Formel berechnete. Der Eulerschen Formel liegt die Annahme zugrunde, daß sich alle Wasserteilchen so bewegen, als ob sie sich auf einer Schaufeloberfläche befänden. Nun haben aber die Schaufeln eines Rades einen endlichen Abstand voneinander, und die Wasserteilchen beschreiben infolgedessen zum Teil andere Bahnen als die der Annahme entsprechenden. Es handelt sich nun darum, das Verhältnis des tatsächlichen zum theoretischen Drehmoment zu bestimmen. In der Praxis richtet man sich nach Werten, die man an ausgeführten Kreiselmaschinen gemessen hat; aber erst in den letzten Jahren sind Versuche gemacht worden, das oben genannte Verhältnis im voraus zu berechnen. Wir sehen hier ab von den vorgeschlagenen Näherungs-Verfahren und gehen näher ein auf die Verfahren, bei denen die Strömungen durch das Kreiselrad als Potential-Strömungen aufgefaßt und die Potentiale gesucht werden. Außerdem machen wir noch eine weitere Einschränkung, indem wir die Strömung als zweidimensional ansehen. Diese Einschränkung ist am wenigsten fühlbar bei den Hochdruck-Kreiselmaschinen, während hier die Frage nach der Leistungsaufnahme gerade am brennendsten ist. Als wichtigstes Hilfsmittel steht uns die Methode der konformen Abbildungen zur Verfügung, die im folgenden benutzt werden soll. Dabei muß die Rotation des Kreiselrades durch einen besonderen Kunstgriff in die Rechnung eingeführt werden. Das ist zum ersten Male geschehen für ein Kreiselrad mit radialen Schaufeln durch Prof. SPANNHAKE, nach dem schon vorher KUCHARSKI mit Hilfe eines Näherungs-Verfahrens auf ähnlichem Wege ein weniger allgemeines Beispiel durchgerechnet hat.

Wenn wir den Versuch machen wollen, die in der Praxis vorkommenden Verhältnisse auf dem oben angedeuteten Wege durch die Rechnung zu erfassen, dann treten uns zwei Schwierigkeiten entgegen. Erstens müssen wir eine Abbildungs-Funktion haben, die es uns ermöglicht, Schaufelformen zu erhalten, wie sie bei praktisch ausgeführten Pumpen vorkommen. Zweitens müssen wir das komplexe Potential für die Rotation des Kreiselrades in einer Form haben, die uns eine Zahlenrechnung ermöglicht.

1. Abbildung der Schaufel des Kreiselrades

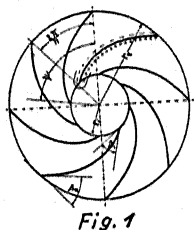


Fig. 1

Die in der Praxis vorkommenden Pumpenschaufeln haben meistens die in Fig. 1 dargestellte Form. Den von einer Schaufel in einer w -Ebene bedeckten Zentriwinkel nennen wir ψ , der Teilungswinkel ist $\frac{2\pi}{n}$. Als Ueberdeckungs-Verhältnis bezeichnen wir das Verhältnis:

$$m = \frac{\text{Ueberdeckungswinkel}}{\text{Teilungswinkel}} = \frac{\psi \cdot n}{2\pi}.$$

In der Praxis ist nun fast immer $m > 1$. Um derartige Schaufelformen auf einen Nullstrahl einer z -Ebene abzubilden, können wir die Funktion verwenden, die KÖNIG 1922 in der Z.A.M.M. angegeben hat. Die Funktion läßt sich durch eine leichte Umformung für unseren Zweck brauchbar machen und lautet dann:

$$w = \left[\left(\frac{z - z_a}{z - z_b} \right) e^{i\alpha} \cdot \left(\frac{z - \bar{z}_a}{z - \bar{z}_b} \right) e^{-i\alpha} \right]^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha}$$

$\bar{s}_a, \bar{s}_a', \bar{s}_b, \bar{s}_b', \alpha$ sind feste Größen, die durch die besondere Schaufelform bestimmt werden müssen. Mit Hilfe dieser Abbildung läßt sich nun aber nicht jede vorgelegte Schaufel auf einen Strahl in der z -Ebene abbilden. Wir müssen eine gegebene Schaufel ersetzen durch ein Profil, das sich abbilden läßt. Das geschieht nach der in Fig. 2 dargestellten Tabelle. Von der gegebenen Schaufel können wir das Radienverhältnis $p = \frac{r_i}{r_a}$, den Ein- und den Austrittswinkel (β_i und β_a) unverändert übernehmen. Damit sind die Konstanten der Abbildungsfunktion festgelegt und infolgedessen auch das Ueberdeckungs-Verhältnis m' , sowie die ganze Schaufelform. Diese Schaufelform stimmt indessen nicht genau mit der vorgelegten Schaufel überein; die Abweichungen sind aber meistens so klein, daß sie auf die weitere Rechnung keinen nennenswerten Einfluß haben.

2. Aufstellung des Potentials

Wir zerlegen die Strömung durch das Kreiselrad in zwei Anteile. Der erste Anteil entsteht durch eine Quelle in der Axe des stillstehenden Rades, wobei das Wasser die Schaufeln, um die eine Zirkulation gelagert ist, umströmt. Die Schaufeln sind Stromlinien. Das Potential für diese *Durchfluß-Strömung* ist ebenfalls bereits von KÖNIG angegeben worden. Der zweite Anteil entsteht durch die Rotation des Kreiselrades in dem sonst ruhenden Wasser und heißt *Verdrängungs-Strömung*. Für diese Strömung muß ebenfalls noch das Potential aufgestellt werden. Die hier geltende Randbedingung zeigt Fig. 3. Aus dem Geschwindigkeits-Dreieck ergibt sich, daß die Komponente der Wassergeschwindigkeit normal zur Schaufel an jedem Punkte der Schaufel gleich sein muß der Normal-Komponente v_n der Schaufelgeschwindigkeit infolge der Rotation. Es ist also: $v_n = \omega |w| \cos \alpha$. Wenn wir diese Komponente an der Schaufel direkt auftragen, dann ergibt sich das in der Figur dargestellte Bild. Wir bilden nun diese v_n -Verteilung mit der Schaufel zusammen auf die z -Ebene ab. An jedem Punkte des Schaufel entsprechenden Null-Strahles (in der Figur ist angenommen, daß es die reelle Axe ist) erhalten wir dann eine Normal-Komponente c_n , die der Größe nach ist:

$$c_n = v_n \left| \frac{dw}{dz} \right| = \omega |w| \cos \alpha \left| \frac{dw}{dz} \right| = c_n(l)$$

Das Wesentliche ist dabei, daß die c_n -Verteilung in der z -Ebene eine *bestimmte* und *bekannte* Funktion des auf dem Null-Strahl gemessenen Parameters l ist. Diese Verteilung

Ersatz einer gegebenen Schaufelform durch ein Abbildungsprofil

Gegeben:	Ersetzt durch eine Schaufel mit:
Winkel	β_i, β_a $\beta_i' = \beta_i$ $\beta_a' = \beta_a$
Radialverhältnis	$p = r_i : r_a$ $p' = p$
Ueberdeckungsverh.	m $m' = m$
Schaufelform	beliebig [A] Grundform logarithm. Spirale [C]

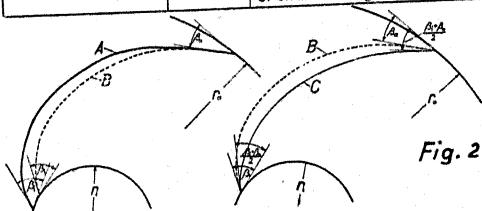


Fig. 2

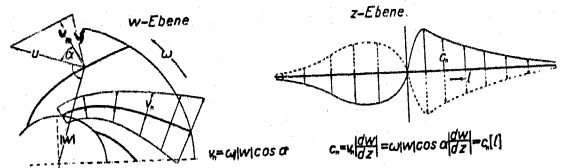


Fig. 3

der Normal-Komponenten auf dem Null-Strahl der z -Ebene wird jetzt durch eine Quell-Verteilung ersetzt. Wir bringen an der Stelle l eine Elementarquelle an von der Ergiebigkeit

$dq = z c_n(l) dl$. Das Potential dieser Quelle ist gleich: $d\Phi = \frac{1}{\pi} c_n(l) dl \lg(z-l)$. Da diese Quelle den Null-Strahl selbst zur Stromlinie macht, entsteht außer im Punkte l selbst nirgends auf dem Nullstrahl eine Normal-Komponente der Geschwindigkeit. Zwei beliebige Quellen auf dem Nullstrahl beeinflussen sich also in dieser Hinsicht nicht. Wir können den ganzen Nullstrahl mit Quellen von der Ergiebigkeit $z c_n(l) dl$ besetzen und erhalten somit als Potential für die Verdrängungs-Strömung in der z -Ebene:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n(l) \lg(z-l) dl$$

Dieses Integral ist schon im vorigen Jahr in einer russischen Arbeit von Herrn WALTHER, Moskau, angegeben worden. Das Integral läßt sich ohne grundsätzliche Schwierigkeiten für jeden Wert z berechnen, indem man in reellen und imaginären Anteil zerlegt. Jeder dieser Anteile stellt dann ein bestimmtes Integral über eine bekannte Funktion dar und kann — etwa durch Planimetrieren — ausgewertet werden.

3. Einführung der Betriebs-Bedingungen

Wir können jetzt die Potentiale für die Durchfluß- und für die Verdrängungs-Strömung zusammensetzen und die für den Kreisel-Maschinenbau wichtigen Bedingungen des stoßfreien Eintritts und des tangentialen Abfließens einführen. Infolge der Zirkulation um die Schaufeln, der Quelle in der Axe und der Rotation des Rades entstehen an den Schaufelenden unendlich große Geschwindigkeiten. Wir können aber die Wassermenge, die Zirkulation und die Drehzahl so wählen, daß sich die unendlich großen Geschwindigkeiten an beiden Schaufelenden gegenseitig aufheben. Wir erhalten damit zwei Bedingungsgleichungen, aus denen wir die Winkelgeschwindigkeit und die Zirkulation um die Schaufeln ausrechnen können, die nötig sind, um bei gegebener Wassermenge Q die Geschwindigkeiten an den Schaufelenden endlich zu machen.

4. Beispiel

Als praktisches Beispiel für das oben geschilderte Verfahren sind die in Fig. 4 dargestellten Räder nachgerechnet, die konstantes Ueberdeckungs-Verhältnis m haben. Dabei wurde ausgegangen von dem Rade mit $n = 6$ Schaufeln. In der ersten Kurve ist das Verhältnis

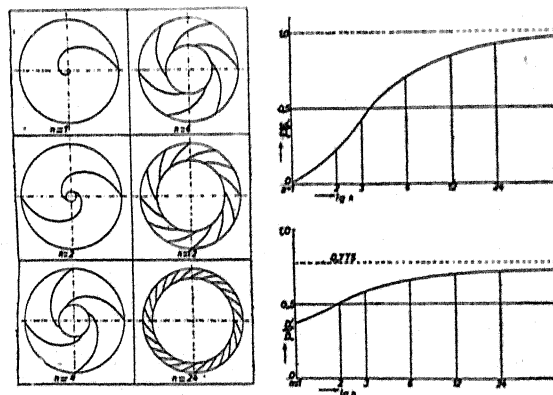


Fig. 4

der tatsächlich notwendigen Winkel-Geschwindigkeit ω_0' zu der nach Euler berechneten ω_0 bei stoßfreiem Eintritt dargestellt. Für eine Schaufel (die allerdings sehr nahe an die Axe

reicht) ist das Verhältnis außerordentlich klein und nähert sich mit wachsender Schaufelzahl dem Werte 1. In der zweiten Kurve ist das am Anfang erwähnte Verhältnis des tatsächlichen Drehmomentes D'_0 zu dem nach Euler berechneten D_0 aufgetragen. Dieses Verhältnis nähert sich nicht dem Werte 1, sondern einem kleineren, weil wegen des konstanten Ueberdeckungsverhältnisses m das Radien-Verhältnis p nicht konstant bleibt.

Das geschilderte Verfahren zur Gewinnung des Rotations-Potentials ist nicht auf die Abbildung auf eine gerade Linie und nicht auf die Rotation beschränkt. Man kann es in ganz ähnlicher Weise 1. bei einer Abbildung auf ein anderes Profil in der z -Ebene (z. B. Kreis) und 2. bei jeder beliebigen Bewegung eines Körpers (Translation und Rotation) anwenden.

Verschiedene Strömungserscheinungen

Von F. Prášil, Zürich

(Hiezu Tafeln XX—XXV)

Bei der Bedeutung, die derzeit die Hydrodynamik als eine der theoretischen Grundlagen der modernen Hydrotechnik erlangt hat, erschien es gerechtfertigt, photographische Aufnahmen von Strömungserscheinungen, die in der hydraulischen Abteilung des Maschinenlaboratoriums der E. T. H. gemacht wurden, dem internationalen Kongreß für technische Mechanik in Zürich (September 1926) teils in ruhenden, teils in kinematographischen Lichtbildern in einer derartigen Auswahl vorzuführen, daß einerseits die Möglichkeit der Herstellung instruktiver Bilder von verschiedenen Strömungsformen zur Anschauung gelangen, anderseits auf die Zugänglichkeit der Bilder für die mathematische Beschreibung und hiemit für die wissenschaftliche Untersuchung hingewiesen werden kann.

Soweit es nun der verfügbare Platz gestattet, wird im Folgenden über diese Vorführungen an Hand von Abdrücken der Bilder, vorerst aber über die Herstellung derselben berichtet.

Die Strömungen wurden entweder durch Einbau verschiedener Öffnungen und Leitwände in einem rechteckigen offenen Kanal mit einfach weißgestrichenem Boden ohne Politur oder zwischen zwei parallelen ebenen Platten und zwar einer Spiegelglasplatte und einer weißgestrichenen eisernen Grundplatte ohne besondere Politur erzeugt; die eingebauten Leitwände waren teils aus Holz, teils aus Blech, teils aus dünnem Kautschuk und ebenfalls ohne besondere Politur hergestellt.

Die Bodenströmungen wurden im offenen Kanal durch Einstreuen von Körnern aus Kaliumpermanganat, Oberflächenströmungen durch Aufstreuen von Aluminiumpulver, Strömungen in der Mittelebene des mit Glas gedeckten Kanalsystems durch Zuführung einer Lösung von Kaliumpermanganat in entsprechend verteilten Düsen sichtbar gemacht; die Zuführung geschieht für die Herstellung voller Stromlinien kontinuierlich, für die Herstellung von Bildern mit Zeitkurven, das sind Linien, die den zeitlichen Verlauf der Strömung erkennbar machen, intermittierend; die Strömungserscheinungen werden durch Momentaufnahmen teils in einer einfachen Kamera, teils in einer Kinokamera bildlich fixiert.

a) *Strömungen im offenen Kanal.*

Die Abb. 1 bis 3 stellen abstrakte Strömungen dar, deren Stromlinien mit denjenigen bekannter konformer Netze in Vergleich gebracht werden können und zwar Abb. 1 die Strömung von einer Quelle zu einer entfernt liegenden Senke mit dem apollonischen Netz, Abb. 2 die Strömung von Quelle zur nahen Senke mit dem Netz der reziproken Radien, Abb. 3 die durch eine Quelle gestörte Parallelströmung mit dem durch Ueberlagerung des kartesischen mit dem polaren Netz erzeugten Netz; bei solchen Versuchen wird der Wasserdurchfluß auf zirka 3 mm Tiefe eingestellt (im Vortrag wurde irrtümlich von 2—3 cm Tiefe gesprochen).

In gleicher Weise sind die durch Abb. 4 dargestellten Strömungen um eine Drosselklappe bei verschiedenen Geschwindigkeiten hergestellt. Die Strömung um einen ruhenden Zylinder Abb. 5 sowie um einen in Rotation versetzten Zylinder Abb. 6 zur Darstellung des Magnus-effektes sind mit kontinuierlichem Farbzufuß sichtbar gemacht.

b) *Strömungen unter Glas.*

Abb. 7 zeigt die Laminarströmung von innen nach außen zwischen Leitschaufeln in der Darstellungsweise nach HELE SHAW bei 0,5 mm Dicke der Stromschicht, Abb. 8 einige aufeinander folgende Bilder einer Kinaufnahme derselben Strömung, jedoch mit Zeitkurven, das sind die Umhüllenden der schattiert hervortretenden Flächen, die durch intermittierende Zuführung

von Farbflüssigkeit entstanden sind. Da die Zeitkurven mit den Stromlinien im Bild erscheinen, so ist bei Kenntnis der Zeitintervalle zwischen je zwei Zeitkurven aus der Verteilung der Zeitkurvenpunkte auf den einzelnen Strombahnen der Verlauf des Geschwindigkeitswertes längst denselben bestimmbar. Bei analytisch gegebener Strömungsform und Geschwindigkeitsverteilung können die Gleichungen der Zeitkurven bestimmt und deren Koordinaten berechnet werden; hierüber liegt in der «Technischen Hydrodynamik» des Verfassers (Verlag Julius Springer, Berlin) eine Studie vor. Abb. 9 zeigt in analoger Darstellung das Bild der laminaren Strömung durch einen Saugkanal, dessen zweidimensionale Strömungsform aus einem konformen Netz bestimmt wurde.

In Abb. 10 erscheinen Zeitkurven in laminarer Parallelströmung; aus denselben ist ebenso wie bei der Saugkanalströmung wohl eine Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit gegen die Ränder hin, aber nicht bis auf Null zu erkennen; dieser Versuch wurde zur Klärung der Frage des Haftens der Flüssigkeit an der Wand durchgeführt.

In einem, durch zwei im Abstand von 3 cm befindlichen parallelen Stirnwänden und einer kreiszylindrischen Wand, abgegrenzten polaren Strömungsfeld wurden Leitschaufeln in gleichen Bogenabständen eingebaut, Wasserzuführung am ganzen äußeren Umfang und zentrische Wasserabführung und, in halber Breite zwischen den parallelen Wänden über eine Schaufelteilung reichend, eine Anzahl verstellbarer Düsen zur Farbstoffzuführung angeordnet. Es wurden Leitschaufeln aus Blech von konstanter Dicke nach einer logarithmischen Spirale (Abb. 11–16) von 25° Neigung gegen die Kreise des polaren Netzes gebogen und geformte Leitschaufeln aus Holz mit krummer (Abb. 17, 18, 20, 21) und mit gerader (Abb. 19, 22) Profilachse verwendet; bei den verschiedenen Versuchsserien war die Wasserzuführung unter verschiedenen Winkeln von 90° abwärts eingestellt, die Richtung der Farbstoffzuführung derjenigen der Wasserzuführung angepaßt und teils kontinuierlich, teils intermittierend für Zeitkurvendarstellung Farbe zugeführt.

Die bei nicht tangentialer Zuströmung erwartete Wirbelsackbildung an der konkaven Seite der Blechschaufeln ist deutlich ersichtlich in den Abb. 11, 12, 14, 15 und 16 und der kinematographischen Aufnahme Abb. 17; bei den Versuchen mit tangentialer Zuführung stellte sich entsprechend Abb. 13 stets heftige Turbulenz im ganzen Strömungsgebiet ein, während in den anderen Fällen die Strömung außerhalb des Wirbelsackes geordnet erscheint; die punktierten Zeitkurven lassen die Geschwindigkeitsverteilung gut beurteilen. In den Abb. 18 bis 23 zeigen sich keine Wirbelsäcke an den Schaufeln, Abb. 19 zeigt die Strömung am Boden und in der Mittelebene und läßt in deren Verschiedenheit die Strömung als dreidimensional erkennen.

Im polaren Feld wurden noch Versuche zur Darstellung der Ausbildung der Turbulenz gemacht und zwar entsprechend Abb. 24, 25, 26 bei radialer, Abb. 27, 28, 29 bei schräger Zuführung; man erkennt einerseits die Zunahme der Turbulenz mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit, anderseits die Erhaltung der Form der Hauptbewegung auch bei schräger Zuströmung; Abb. 30 und 31 zeigen zum Vergleich die Ausbildung der Turbulenz im geraden Kanal mit rechteckigem Profil.

Die Versuche der Abb. 1–3 wurden von Herrn Dipl.-Masch.-Ing. E. T. H. Dr. H. Oertli, die andern Versuche von Herrn Dipl.-Masch.-Ing. E. T. H. O. Walter durchgeführt.

c) Versuche über Strömungen im bewegten Rad.

Herr Dr. Oertli hat für seine Dissertation¹⁾ Versuche zur Darstellung von Strömungen in einem rotierenden Kreiselrad durchgeführt. Die Kinoaufnahme der Relativbewegung des in

¹⁾ Untersuchung der Wasserströmung durch ein rotierendes Zellen-Kreiselrad. Verlag: Rascher & Cie., A.-G., Zürich.

einer offenen kreiszylindrischen Schale befindlichen Wassers zeigt Abb. 32 durch das auf die Oberfläche gestreute Aluminiumpulvers, die Schale war exzentrisch auf die Radscheibe des Kreiselrades aufgesetzt, das mittelst Riemenantrieb in Drehung erhalten war. Zu Beginn der Bewegung aus der Ruhe ist noch gleichmäßige Verteilung des Aluminiumpulvers vorhanden, dann ordnet sich dasselbe entsprechend der relativen Kreisbewegung in konzentrische Kreise und zeigt eine der Drehbewegung der Scheibe entgegengesetzte Richtung, später (nicht mehr auf der Abbildung ersichtlich) hört unter dem Einfluß der Wand- und Bodenreibung die Relativbewegung auf; bei raschem Stillstellen der Scheibe tritt wieder Drehung und später Beruhigung ein. Abb. 33 zeigt nun die Relativbewegung des in die Kanäle des sich drehenden Rades eingeschlossenen Wassers, wenn durch feste Zylinder an den Umlängen der Wasserdurchtritt verhindert ist, Abb. 34 zeigt die Relativbewegung beim Fehlen dieser Zylinder. Der erste Fall ist das Analogon zur Kreisschale, der zweite Fall entspricht der Drehströmung in und um das Rad und zeigt die durch Diskontinuitätsflächen an den Kanälen hergestellte Abgrenzung des inneren Wirbels. Die mathematische Beschreibung des eingeschlossenen relativen Wirbels ist für die Kreisschale leicht, im ersten Fall, wenn auch mit Rücksicht auf die Form des Raumumfanges umständlich, im Prinzip doch durchführbar, im zweiten Fall bildet die Bestimmung der Diskontinuitätsflächen ein äußerst schwieriges Randproblem. Ähnliche Versuche mit Öl haben ergeben, daß sich die Wirbelerscheinungen infolge der Viskosität nicht einstellen.

Bei den Aufnahmen der Relativbewegung waren natürlich der Aufnahmeapparat und das sich drehende Rad fest verbunden.

Die Darstellung der Strömung durch das in Drehung befindliche und als Zentrifugalpumpe arbeitende Kreiselrad ist aus der mit fest stehender Kinokamera aufgenommenen Abb. 35 ersichtlich: die mittlere Figur zeigt den nur mit Glas bedeckten Teil der oberen Radscheibe, in den oberen 5 Bildern sieht man die weiß erscheinende Abdeckung vor der Glasscheibe bei links-läufiger Drehung des Rades verschwinden, in den unteren 5 Bildern die Abdeckung hinter der Glasscheibe erscheinen; die Belichtung fand mit Wechselstrom statt, daher erscheint in jedem Einzelbild während des Stillstandes des Films jede Schaufel in vier Stellungen belichtet; die absolute Strömung erscheint deutlich mit radialer Einströmung und schräger Abströmung entsprechend der durch die Zuführung, die Schaufelform und die Radrichtung bedingten Ablenkung des Wassers im Rad. An der Lage des weißen Kreuzes gegen die Radschaufeln kann man die Drehung des Rades verfolgen.

Der Vortragende wird befriedigt sein, wenn aus den Vorführungen die Anregung zur Fortsetzung der Versuche und hiemit zur weiteren Entwicklung der Experimentellen Hydrodynamik erwachsen wird.

Ueber die Labilität der Potentialströmungen

Von H. Föttinger, Charlottenburg

I. Die durch die Potentialgleichungen von LAPLACE-POISSON $\Delta\varphi = 0$ bzw. $= \rho$ beschriebenen Elektrizitäts-, Wärme- und «Sickerströmungen» zäher Medien durch Filter- oder Sandporen behalten bekanntlich die exakte Potentialform auch bei Richtungsumkehr unveränderlich bei; die ebenso definierten freien Strömungen nahezu reibungsloser Flüssigkeit neigen dagegen zur Formveränderung, Strahlablösung, Wirbelbildung, Hin- und Herspringen, Nichtumkehrbarkeit und Turbulenz. Beispiele sind 1. der 1887 von KELVIN dargestellte Vorgang (Abb. 1) der Ablösung, Rückströmung und Wirbelbildung an Kugeln etc., 2. die nicht umkehrbare Düsenströmung (Abb. 2); 3. die eigenartigen Transversalschwingungen örtlich zusammen-

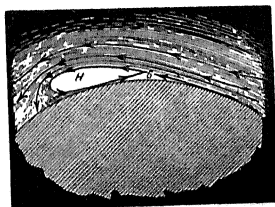


Abb. 1.

Ablösung und Wirbelbildung nach Lord Kelvin (1887).

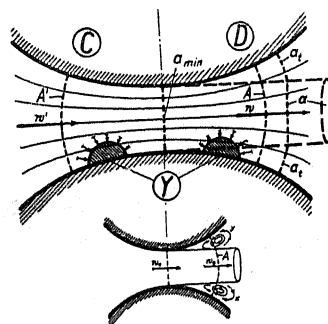


Abb. 2.

Nicht umkehrbare Düsenströmung.

gepreßter dünnwandiger Schläuche, 4. die Umbildung der quertrieblosen «Anfahrströmung» an Flügeln und Schaufelgittern in die oft zehnfache Energie enthaltende «Dauerströmung» mit Quertrieb (s. Lit. 1, 3, 2, 4).

II. Für die Umbildungen hat man bisher nur *Dissipationseffekte* haftbar gemacht: die *Reibung* im Gesamtfeld (STOKES) oder in den Wandschichten (PRANDTL) und das *Zerreißen* an Kanten durch negative Drücke (HELMHOLTZ), ohne sich viel um den Widerspruch zu kümmern, daß Dissipationen sonst dämpfend, stabilisierend, kinetische Energie mindernd zu wirken pflegen.

Der Vortrag sucht frühere Aeufferungen des Verfassers zusammenzufassen (Lit. 2—7) und eine bisher unbeachtete *allgemeine Ursache* jener Umbildungen aufzudecken: daß nämlich die *Potentialströmungen* träger Flüssigkeiten auch *ohne Dissipation* ihrem Wesen nach *labil* sind und daher durch geringe örtliche Steuereffekte «von selbst», getrieben durch die Systemenergien, in stabilere Formen mit größerer kinetischer oder schneller sinkender potentieller Energie übergehen.

III. **Kinematisches.** Ausgang der Betrachtung sei stets die *stationäre inkompressible Potentialströmung* und zwar ein Stromfadenbündel vom Fluß Ψ (cbm/sec), Gesamt- (Kanal-) Querschnitt A und mittlerer Geschwindigkeit $w = \Psi : A$. VA sei klein gegen die Krümmungsradien. Bei voller Querschnittserfüllung lautet die Kontinuitätsgleichung $\Psi = \text{const.} = Aw = A'w'$...

Bei freier Strömung träger Medien ist nun, im Gegensatz zur Sickerströmung, zwischen *kon-* und *divergenten* Bereichen C, D und zwischen «Strom- oder Strahlquerschnitt» a und «Totquerschnitt» a_t (Abb. 2) zu unterscheiden.

$$A = a + a_t$$

In C tritt unter dem Zwang des Druckpotentials einerseits, der Wände andererseits, unbedingt Beschleunigung ein. Durch Strömungen gebildete Totzonen Y (Abb. 2) würde das Druckgefälle sofort stromabspülen; daher $a_t = 0$; $A = a$; $w = \Psi/A = \Psi/a$; $\frac{dw}{dt} = w \frac{dw}{ds} > 0$.

In D dagegen, stromab von $A_{min} = a_{min}$, fehlt der den Transportstrom Ψ an die Wände heranholende Zwang, Totzonen Y werden durch den *stromauf* gerichteten Druckunterschied zurückgespült, akkumuliert und pendelnd festgehalten, daher dort $a_t > 0$; $A > a > a_{min}$; $w_a = \Psi/a > w_A = \Psi/A$. Grenzfälle sind der frei, ohne Verzögerung durchschießende Strahl, wobei $a = a_{min} = A_{min}$; $w_{max} = \Psi : a_{min}$ (z. B. freier Ausfluß), und die sich wirbelfrei verzögernde, der Wand anschmiegende Potentialströmung mit $a_t = 0$; $a = A$; $w_{min} = \Psi : A$, wie in Diffusoren und an fischförmigen Körpern angestrebt. In D ist daher außer w auch $\frac{dw}{dt}$ vieldeutig: $\frac{dw}{dt} \geq 0$. Hierauf beruht grundlegend die Auswirkung der ∞ Freiheitsgrade träger Fluida in Form *stärkster Neigung zur Labilität und Turbulenz* in den Verzögerungszonen D .

IV. Kinetisches *). Die potentielle Energie ΣV des Gesamtsystems bestehe in gehobenen Gewichten, gespannten Federn oder Gasen, bewegten Preßkolben usw. Im flüssigen Teil wird Arbeit teilweise durch die Normaldrucke («Pressungs», besser «Verdrängungsarbeit») übertragen, die zwar bei fester Stromform örtlich fest und rotorfrei verteilt sind, bei Störungen aber unstetig und rotorhaft (Flächenrotor) sich ändern können und daher wesentlich von der Schwere verschieden sind.

Die *kinetische Energie* ΣT des Systems liege weit überwiegend im flüssigen Teil. *Dissipative* Kräfte seien in erster Näherung vernachlässigbar. Dann gilt für jede Umwandlung das *Energieprinzip* $\Sigma V + \Sigma T = \text{const.}$

Ältere naive Beobachtungen führten uns vor etwa 25 Jahren auf eine charakteristische Aehnlichkeit mit *Knickvorgängen* (Abb. 3). Das ursprüngliche Druckfeld in D stützt sich gewölbeartig teils auf die Wände, teils auf die sich verzögernden Impulsströme, wie der Ball auf die Fontäne. Bleibt die ideale Stützung wegen irgendeiner «Störung» (Abs. VII) aus, so

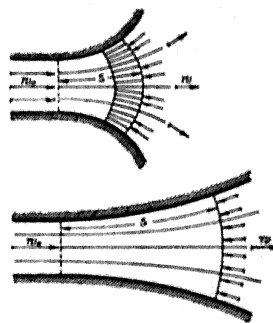


Abb. 3a und 3b.
Aehnlichkeit mit Knickvorgang.

«knickt» das dynamische Druckgewölbe kinetisch und substantiell ein. Die Verdrängungsarbeit der Strömung bei D wird gemindert und bleibt im *Grenzfall* als *Zuwachs der kinetischen Energie* ΣT im Feld D als Wirbel stecken. Bei konstanterhaltenem Fluß Ψ nimmt die potentielle Energie ΣV des Gesamtsystems beschleunigt ab: der beschleunigte Uebergang in *stabilere* Formen wird nur durch *Dissipationen*, etwa einsetzenden ungeordneten Impulsaustausch begrenzt.

*) Die Einleitung dieses Abschnitts ist mit Rücksicht auf eine Diskussionsfrage von Herrn LEVI-CIVITA etwas ausführlicher als im Vortrag dargestellt.

Die Ingenieure kennen lange das Mittel zur Erhöhung der «Knicksicherheit» solcher Druckfelder in der Vermehrung der «Gewölbestärke» s durch Verlängerung des «Diffusors», entsprechend einer Verringerung der Gewölbespannweite bei gleichem Axialweg.

V. Analytisches. Zur Gewinnung allgemeinsten Aussagen seien statt der klassischen Methode der kleinen Schwingungen die Extremumsätze von DELAUNAY, BERTRAND und KELVIN benutzt. Sie lauten zusammengefaßt: «Bei impulsiver Erregung eines Systems aus der Ruhe heraus (z. B. Potentialströmung) ist die kinetische Energie ein absolutes Maximum, wenn die Impulse gegeben sind, dagegen ein *absolutes Minimum*, wenn die Geschwindigkeiten an den Angriffspunkten der Impulse vorgeschrieben sind.» (Beweis s. Lit. 8 und 9.) Die letztere Bedingung des *Kelvinschen Minimumtheorems* kann bei Flüssigkeiten dahin gedeutet werden, daß der Fluß $\Psi = \int w_n dA$ vorgeschrieben ist. Da die Wandschichten erst später akkumulierend abgebremst werden, gilt das Theorem auch für die Initialströmung reibender Medien. Bei vorgeschriebenem Fluß Ψ ist also für jede Potentialströmung $T = \int \frac{dm}{2} w^2 = \text{absol. Min.}$

Da T nach Voraussetzung praktisch $= \Sigma T$ des Systems (§ IV), so folgt aus dem Energieprinzip $\Sigma V + \Sigma T = \text{const.}$

$\Sigma V = \text{absol. Max.}$, d. h. das anfängliche System der Potentialströmung ist *vollständig labil*; jeder denkbaren anderen Form gleichen Flusses Ψ , aber anderer Geschwindigkeitsverteilung, ist größere ΣT und kleinere ΣV , im Sinne stärkeren Verbrauchs an potentieller Energie und selbsttätigen Strebens nach Uebergang in stabilere Formen zugeordnet (Lit. 8 u. 9).

Das *Kelvin-Theorem* schließt das Paradoxon ein, daß neu hinzukommende Wirbel- und Totbereiche, bei konstanterhaltenem Fluß Ψ die kinetische Energie T des Stromfeldes auf Kosten potentieller Energie des Gesamtsystems steigern.

VI. Der Mechanismus der Labilität besteht in örtlichen Tendenzen zur Bildung von *Saughohlräumen* durch zentrifugale Ablösung (s. KELVIN-Bild, Abb. 1). Verbindet man nach dem «Anfahren» zwei Stellen gleichen Druckes eines beliebigen konvergent-divergenten Stromfadenbündels (Abb. 4 und 5) durch einen Schlitz, so enthält dieser stagnierendes Medium höheren Druckes als an der gesamten Außenwand (Stromseite) des abgespaltenen Segments. Die Resultierende P der Oberflächendrucke auf das Segment ist daher stets in die Strömung hinein gerichtet, die Außenströmung sucht das bespülte Segment zentrifugal «abzusaugen».

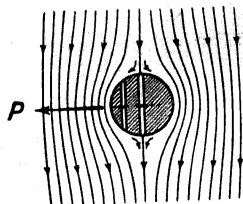


Abb. 4.

Konvergent-divergente Strömung an einer Zylinderwand.

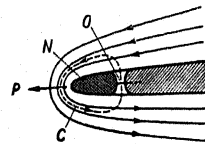


Abb. 5.

Potentialströmung um Plattenrand.

Das gilt aber auch für jeden an der Wand des Segments liegenden *Flüssigkeitsfaden*, der sich vermöge seiner Trägheit sofort ablöst, sobald Gelegenheit zur Auffüllung des zwischen Wand- und Ablöseströmung entstehenden Hohlraumes geboten ist. Man kann vom «Abpumpen» des Druckes durch die Wandströmung sprechen. Besonders deutlich wird dies an umströmten plattenartigen Körpern (Abb. 5). (Vgl. Lit. 4.)

Bei der Kavitation füllen entbundene Gase oder Dämpfe, beim Ausflußstrahl eindringende Luft, bei der Wandreibung Grenzschichtmaterial oder Totwasser den Saugraum aus, der von fundamentaler Bedeutung für die Labilität ist. (Vgl. auch I, 1—4.)

VII. Auslöse- oder Steuereffekte für die Einleitung der Wandlungen (s. Lit. 4) können, entsprechend der absoluten Labilität aller, auch nur örtlich divergenten Potentialströmungen, durch die verschiedensten Vorgänge bedingt sein, z. B. durch alle Abweichungen von den Bedingungen des *Lagrangeschen Satzes* über die Erhaltung des Geschwindigkeitspotentials. Genannt seien nichtpotentielle, willkürliche und veränderliche Kräfte, gestörte Drucksysteme (Abs. IV), Wandreibung, Kapillarität, willkürliche Dichteänderung durch Erwärmung, Gasabscheidung oder -Lösung, Verdampfung oder Kondensation, Zuführung von Luft, Dampf, stagnierender oder turbulenter Flüssigkeit, Verflüssigung oder Wegnahme von Wänden, Einfügung von Wänden oder Membranen, Schiebern, etwa durch Erstarren von Flüssigkeit, kurz alle Effekte, welche *ungleiche Strömungsenergie* und *Wirbelung* herbeiführen.

Da die Bildungsart der Wirbel- und Totbereiche an sich unwesentlich und vielseitig möglich ist, so liefert die Theorie auch grundlegende Aussagen bei *Reibungs- und Turbulenzströmungen*. Z. B. schafft jeder, nahe einer Wand entstandene Wirbel (Lit. 3, Abb. 10 und 13) zwei labile Stauzonen, eine vor, eine hinter sich, an denen neue Wirbelablösungen zu erwarten sind, im Sinne vermehrter Turbulenz. Vorzugsweise sind überhaupt *divergente* Zonen die Hauptquellen der Turbulenz.

VIII. Zusammenfassung. Jede inkompressible, durch schnelle Impulse, also *monotonen Druckabfall* erregte Initial- oder Potentialströmung ist vollkommen eindeutig gestaltet. Im Augenblick des Stationärwerdens wird sie jedoch zugleich *labil* in den divergenten, der Verzögerung raumgebenden Zonen. *Stabil* bleibt nur der singuläre, «*absolut konvergente*» Strömungstyp, bei dem das spätere, stationäre Druckgefälle ausnahmslos die Richtung des monotonen Anfahrdruckabfalls beibehält, also nur konvergente Stromfäden und Beschleunigung vorkommen.

Zur Erkenntnis dieser Labilität war Verfasser schon vor 2½ Jahrzehnten in naiver Weise (vgl. Abs. IV) gelangt. Die präzise Konstruktionsvorschrift der «*absolut konvergenten Stromfäden*» hat ihm seit 1903 als Leitmotiv bei der Durchbildung der «*Turbotransformatoren*» (Lit. 7) gedient, deren Wirkungsgrade seit 15 Jahren die Scheitelwerte des von der wissenschaftlichen Hydraulik erreichten *Energieumsatzes* darstellen dürften. (91 % bei der «*Uebersetzungs*»type und 97—99 % bei der «*Kupplungs*»type für die mechanisch → hydraulisch → mechanische *Doppelumsetzung*.)

LITERATUR.

1. SIR W. THOMSON, «On the formation of coreless vortices». Proc. Royal Soc. 1887, S. 83.
2. FÖTTINGER, «Ueber die physikalischen Grundlagen der Turbinen- und Propellerwirkung» (Umbildung der zirkulationslosen Anfahrströmung) Verhandlungen von Vertretern der Flugwissenschaft in Göttingen 1911. — Ausführlich: Zeitschr. f. Flugtechnik und Mot. 1912, S. 233 und 245.
3. » «Neue Grundlagen f. d. theor. und exper. Beh. des Propellerproblems». Jahrb. d. Schiffb. Ges. 1917/18, S. 397 ff.
4. » Bemerkgn. über die tatsächl. Entstehung der Zirkulationsströmung um Flügel etc. «Ber. u. Abhdgn. der Wiss. Ges. f. Luftfahrt», 4. Heft, 1921, S. 64.
5. » Antrittsvorlesg. Berlin «Ueber Fortschritte der Strömungslehre im Masch.- und Schiffb.» Jahrb. d. Schiffbautech. Ges. 1924, S. 295 ff.
6. « «Kavitation und Korrosion» S. 34 ff. im Buch «Hydraulische Probleme» 1925/26; ebendort S. 107 ff.
7. » «Ueber eine neue Lösung des Schiffsturbinen-Problems». Jahrb. d. Schiffb. Ges. 1909/10, S. 157 ff.
8. LD. KELVIN & TAIT, Natural Philosophy 1903, Bd. 1, S. 285 u. 286.
9. LAMB-FRIEDEL, Hydrodynamik 1907, S. 58.

Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem

Von N. Zeilon, Lund
(Hiezu Abb. 2—4 auf Tafel XIX)

Die folgende Fragestellung gehört dem Gedankenkreise der hydrodynamischen Theorie OSEENS an, indem sie Bewegungszustände der reibungslosen Flüssigkeit durch Lösung der in geeigneter Weise linearisierten Differentialgleichungen bei nachfolgendem Grenzübergang ($\mu \rightarrow 0$) zu beschreiben sucht. Mit Beschränkung, der Einfachheit wegen, auf zweidimensionale Bewegung, läßt sich der Grundgedanke der Oseenschen Theorie folgendermaßen in verallgemeinerter Fassung aussprechen. Ich gehe von den bekannten Gleichungen der stationären Bewegung aus und nehme an, daß durch

$$u = u_0 + u', \quad v = v_0 + v',$$

die gesamte Geschwindigkeit auf eine bekannte «eingeprägte» Strömung (u_0, v_0) und eine zu bestimmende Störungsströmung verteilt ist. Die Annahme, daß die quadratischen Störungsglieder

$$u' \overline{w}, \quad v' \overline{w}$$

gegenüber den halbquadratischen

$$u_0 \overline{w}, \quad v_0 \overline{w}$$

vernachlässigt werden dürfen, führt auf die bezüglichen linearisierten Gleichungen.

Es liegt nahe, als eingeprägte Primärströmung eine laminare Bewegung einzuführen. Setzen wir also

$$u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_0 = +\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Delta \psi = 0.$$

Durch Elimination aus den Bewegungsgleichungen erhalten wir eine fundamentale Gleichung von der Form

$$\rho \left(u_0 \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \right) = \mu \cdot \Delta \overline{w}, \quad \dots \dots \dots (1)$$

Wenn $\mu = 0$ gesetzt wird, kommt sogleich

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \overline{w}}{\partial x}, & \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \end{array} \right| = 0, \quad \text{oder} \quad \overline{w} = f(\psi),$$

Wir können somit schließen, daß, von möglichen Diskontinuitäten ($\Delta \overline{w} \rightarrow \infty$) abgesehen, die Lösung des linearisierten Gleichungssystems außer einer laminaren Strömung auch eine turbulente Strömung enthalten kann, derart daß der Wirbel auf gewissen Stromlinien der eingepprägten Strömung mit konstanter Intensität verteilt ist.

Dieses Resultat wird durch die asymptotische Diskussion der Gleichung (1) mit den zugehörigen Grenzbedingungen bestätigt.

Wir setzen, um die Kontinuitätsgleichung zu befriedigen:

$$u' = -\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad v' = +\frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

Es findet dabei die bedeutende Vereinfachung statt, daß wir auf eine schon bekannte Diskussion zurückzukommen.

Es sei

ψ = Imaginarteil von $(\varphi + i\psi)$.

Auf die Koordinaten φ, ψ transformierend erhalten wir¹⁾

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi, \psi}\right) \Delta_{x, y} \Theta = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi, \psi}\right) \bar{w} = 0, \quad \dots \dots \dots (2)$$

Diese Gleichung für \bar{w} ist, von der Koordinatenwahl abgesehen, mit derjenigen Gleichung identisch, deren asymptotisches Verhalten in OSCEN'S Theorie Wirbelbildung und Kielwasser bestimmt. In der Grenze für $\mu = 0$ kommt betreffend die Randbedingungen prinzipiell dasselbe Resultat heraus. Die Randkurve wird in zwei Bereiche geteilt, einer «hydrodynamischen Vorder-» bzw. «Rückseite» entsprechend. An der Vorderseite (*Sa*) gleitet die Flüssigkeit einfach in reiner Potentialströmung vorbei, während an der Rückseite (*Sp*) die Wirbelverteilung so zu bestimmen ist, daß, wenn möglich, die Flüssigkeit daselbst am Körper haftet.

Die Herleitung dieses Resultates ist aus den Eigenschaften der Grundleistung von (2) leicht verständlich. Wenn (φ_0, ψ_0) einen willkürlichen Punkt der Randkurve bezeichnet, so wird die gesuchte Lösung \bar{w} mit Hilfe der Funktion

$$F(\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x(\varphi - \varphi_0) + y(\psi - \psi_0))}}{\mu(x^2 + y^2) - i\rho x} dx dy \\ = e^{-\frac{\rho}{2\mu}(\varphi - \varphi_0)} \cdot K_0\left(\rho \frac{K}{2\mu}\right); \quad K = \sqrt{(\varphi - \varphi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2},$$

wo K_0 eine Hankelsche Funktion von imaginärem Argument bedeutet, in gewöhnlicher Weise durch die Greensche Formel dargestellt. Für $\mu \rightarrow 0$ findet man, daß F überall gegen Null konvergiert außer auf der durch

$$\psi = \psi_0, \quad \varphi - \varphi_0 < 0,$$

definierten singulären Kurve, wo F derart unendlich wird, daß das Greensche Randintegral einen entsprechenden endlichen Betrag liefert.

Durch jeden Punkt (ψ_0, φ_0) hat man also die betreffende Stromlinie $\psi = \psi_0$ zu ziehen; die Gesamtheit aller Punkte der Flüssigkeit, für welche $\varphi > \varphi_0$ ist, bestimmt die Form und Ausdehnung des der hydrodynamischen Rückseite angeschlossenen Wirbelbereiches.

Die Art des neuen potentialtheoretischen Problems ist damit auch festgelegt. Nach dem Gesetz

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Delta_{x, y} \Theta}{\partial \varphi} = 0, \quad \Delta_{x, y} \Theta = f(\psi),$$

soll auf den genannten singulären Kurven eine Wirbelbelegung mit zugehöriger Strömung, d. h. die unbekannte Funktion \bar{w} und die damit verbundene Strömungsfunktion Θ , so bestimmt werden, daß

$$(u_0 + u') \cos(n, x) + (v_0 + v') \cos(n, y) = 0 \text{ an } Sa; \\ u_0 + u' = v_0 + v' = \text{Vorgeschriebenen Werten an } Sp; \\ u' = v' = 0 \text{ im Unendlichen}$$

wird.

¹⁾ Siehe BOUSSINESQ, Journal de Liouville (6) 1, S. 285, 1905 und BURGERS, Akad. Amsterdam, Bd. 23, S. 1082, 1920/21.

Nur ein paar Worte über die Frage der Existenz und Berechnung einer den obigen Forderungen genügenden Funktion Θ . Wir nehmen an, das Problem sei durch konforme Abbildung auf den Fall des Kreises reduziert worden. Wir belegen dann die genannten Stromkurven mit kontinuierlich verteilten Wirbelzentren von einer nur von ψ abhängigen Dichte. Durch Spiegelung läßt sich zunächst das so bestimmte Wirbelfeld durch eine Potentialbewegung derart komplettieren, daß die ψ -Komponente der Geschwindigkeit überall am Kreise verschwindet. Es läßt sich sodann leicht ein gemischtes Potential feststellen, das die Normalgeschwindigkeit des Wirbelfeldes an der Vorderseite annulliert und an der Hinterseite die vorgeschriebene ψ -Geschwindigkeit besitzt. Die Bestimmung der gesamten übriggebliebenen φ -Geschwindigkeit an der Hinterseite ergibt für die Wirbeldichte eine Integralgleichung mit höchstens logarithmisch unendlichem Kerne. Das Problem ist damit im allgemeinen lösbar.

Es ist klar, daß die Wahl der eingepprägten Strömung gewissermaßen willkürlich ist und selbstverständlich den natürlichen Voraussetzungen des bezüglichen Problems gemäß getroffen werden muß. Ich erwähne als Beispiel den Fall des in einem gleichmäßigen Flüssigkeitsstrom rotierenden Zylinders («Magnuseffekt»), wo man als natürlichen Ansatz für die Primärströmung am einfachsten

$$\varphi + i\psi = A(x + iy) + iB \log(x + iy)$$

annimmt. Die Abb. 1 unten (für $\frac{B}{A} = 0; 2; 3$) zeigt, wie der Wirbelbereich, der in der Oseen'schen Theorie des stillstehenden Zylinders der Strömungsrichtung parallel verläuft und geradlinig begrenzt ist, jetzt durch die Rotation deformiert und abgelenkt erscheint.

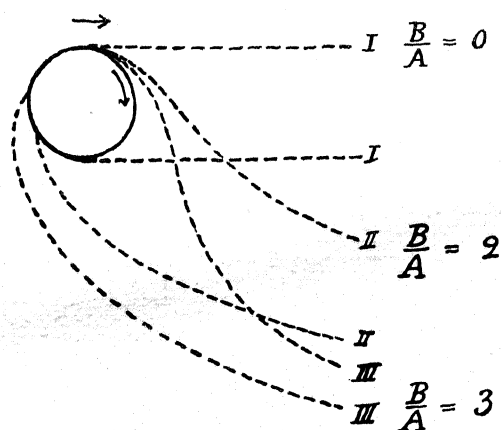


Abb. 1.

Der Vergleich mit den nach zunehmender Drehgeschwindigkeit geordneten Aufnahmen Abb. 2—4 (Tafel XIX) zeigt, daß der verwendete Ansatz sich den experimentellen Verhältnissen gut anpaßt. Insbesondere bemerkt man, daß die charakteristische Weise, in der das Wirbelgebiet vorne am Zylinder hinaufgesaugt und sogleich in einiger Entfernung allmählich schmaler wird, ihr deutliches experimentelles Gegenstück besitzt. Es ist wohl kaum nötig, hervorzuheben, daß die explizite Durchführung der hier skizzierten Theorie des Magnuseffekts sowohl einen Auftrieb wie auch einen Widerstand ergeben wird.

Zur Bestimmung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstandstheorie

Von N. Zeilon, Lund

Die Lösung des OSEENSCHEN stationären Bewegungsproblems ergibt z. B. im Falle des Kreiszylinders ein mit der Erfahrung gut übereinstimmendes durchschnittliches Strömungsbild. Der Physiker wird aber an zwei Umständen Anstoß nehmen. Erstens fällt der Widerstand viel zu groß aus, zweitens wird der Druck beim Passieren des Wirbelschwanzes unstetig.

Setzen wir wie gewöhnlich

$$u = u_0 + u', \quad v = v',$$

wo u_0 die konstante Strömungsgeschwindigkeit bedeutet, so folgt aus

$$\begin{aligned} -\rho v \bar{w} &= -\frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ +\rho u \bar{w} &= -\frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v, \end{aligned}$$

bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder sofort

$$q = -\rho u_0 \int \bar{w} dy$$

während exakt

$$q = \rho \int \bar{w} [v' dx - (u_0 + u') dy]$$

sein sollte. Es ist somit klar, daß die Druckbestimmung fehlerhaft wird, sobald der Ausdruck

$$\int \bar{w} (v' dx - u' dy)$$

bedeutende Werte annimmt. Nehmen wir besonders die Druckverteilung längs der Oberfläche des Körpers, so ist dort in der OSEENSCHEN Lösung entweder

$$\bar{w} \quad \text{oder} \quad v' = 0,$$

Somit wird eine unrichtige Druckbestimmung dadurch entstehen, daß das quadratische Produkt $u' \bar{w}$ nicht überall vernachlässigt werden kann. Dieses Produkt nimmt aber in jener Lösung nahe der Grenze des Wirbelbereiches große Werte an, insbesondere wird beim Eintritt in den Wirbelbereich \bar{w} derart unendlich, daß q mit einem endlichen Betrag diskontinuierlich bis zu jenem übertriebenen Saugdruck abfällt, der für den zu großen Widerstandskoeffizienten hauptsächlich verantwortlich ist. Das fehlerhafte Schlußresultat ist eben in leichtverständlicher Weise die natürliche Folge davon, daß die Differentialgleichungen in einem kritischen Gebiet in allzu grober Weise verletzt worden sind.

Ein charakteristisches Ergebnis der Oseenschen Theorie ist die Einteilung des Körpers in eine hydrodynamische «Vorder»- und «Rückseite». Vieles (z. B. die experimentelle Tatsache des nahezu konstanten Druckes an der Rückseite des Körpers) deutet darauf hin, daß die damit zusammenhängenden verschiedenartigen Grenzbedingungen (Gleitung der Flüssigkeit an der Vorderseite, Haften an der Rückseite) der Erfahrung gut entsprechen. Es ist sowohl physikalisch wie mathematisch klar, daß der Widerstand in dem Transport von Wirbeln von der Hinterseite nach rückwärts seine Ursache hat. Daß überhaupt eine «reibungslöse» Flüssigkeit einen endlichen Widerstand aufweisen kann, rührt davon her, daß an der Körperoberfläche die Wirbelkräfte noch bei verschwindender Reibung eine endliche Arbeit ausführen. Diese Tatsache findet eben in dem fundamentalen Grenzübergang der Oseenschen Theorie ihren klaren Ausdruck.

Nehmen wir jetzt die Lösung des eigentlichen Oseenschen Problems als erste Näherung des Widerstandsproblems an, so erscheint zunächst der Druck, d. h. die Funktion q , als in der

gewählten Approximation eindeutig bestimmt. Es ist aber leicht einzusehen, daß diese Eindeutigkeit gewissermaßen scheinbar ist, nicht nur in dem Sinn, daß der Druck nur approximativ bestimmt wird.

Schreiben wir

$$v = v', \quad u = u_1(y) + u',$$

wo $u_1 = u_0$ außerhalb des Wirbelbereiches, so können wir, dem Grundprinzip der Oseenschen Theorie gemäß, ebenso gut $u_1(y)$ als eine modifizierte Primärströmung betrachten. Wenn aber jetzt die quadratischen Glieder $u' \bar{w}$, $v' \bar{w}$ vernachlässigt werden, so kommt nach Elimination von q

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \rho u_1 \bar{w} &= -\frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0\right) \\ \rho u_1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \mu \Delta v, \end{aligned}$$

was für $\mu \rightarrow 0$, von Singularitäten abgesehen, auf die fundamentale Gleichung der Oseenschen Theorie

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0, \quad \dots \dots \dots (1)$$

führen muß. Dementsprechend wird man jetzt finden

$$q \rightarrow \rho \int u_1 \bar{w} dy, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

was binnen des Wirbelbereiches eine ganz verschiedene Druckbestimmung bedeutet, obschon das allgemeine Strömungsbild durch die Gleichung (1) bestimmt ist und somit auf den Oseenschen Typus zurückkommt.

Die Druckbestimmung im Wirbelschwanz ist somit bei irgend einer gewählten Näherung wesentlich unbestimmt; um definitive Druckwerte zu bekommen, müssen wir noch durch irgend eine supplementäre Hypothese eine besondere, geeignete Primärströmung auswählen. Mit Bezugnahme auf die vollständigen Differentialgleichungen erscheint es natürlich, die Auswahl so zu treffen, daß in der Nähe des Körpers diese vollständigen Gleichungen so gut wie möglich befriedigt werden. D. h. wir setzen

$$u_1(y) = u_s$$

wo u_s die totale Geschwindigkeit an der Körperoberfläche bedeutet. Nach diesem Prinzip, bei Benutzung der Oseenschen Strömung ist aber an der ganzen Rückseite

$$u_s = 0,$$

woraus würde folgen

$$dq = 0, \quad q = \text{const.},$$

was ja nach der für jede Stromlinie gültige Beziehung

$$dq = \mu (\Delta u dx + \Delta v dy)$$

für $\mu \rightarrow 0$ plausibel ist. Der absolute Wert des Kielwasserdruckes würde aber noch unbestimmt bleiben, weil in den kritischen Punkten, als einzigem Sitz der Wirbelablösung, $\bar{w} = \infty$ und u_s diskontinuierlich, somit als unbestimmt zu betrachten wäre. Man erzielt bestimmte Werte durch Annahme von kleinen, den kritischen Punkten angeschlossenen Gleitungsintervallen. Dem-

entsprechend wird die Oseensehe Strömung durch eine geeignet gewählte naheliegende Strömung ersetzt, bei der der Druckübergang stetig beim Passieren der Gleitungsintervalle erfolgt. Wenn schließlich die Ausdehnung der Gleitungsintervalle nach Null konvergiert, läßt sich durch Grenzübergang auf eine der Oseensehen Strömung entsprechende Druckbestimmung schließen.

Gehen wir umgekehrt davon aus, es handle sich darum, eine möglichst exakte Lösung der vollständigen Gleichungen in der Nähe des Körpers zu erhalten. Bei Annahme von sehr kleinen Gleitungsintervallen und vollständigem Haften der Flüssigkeit an der übrigen Rückseite würde man immer entweder v' sehr klein oder ∞ haben. Die durch Elimination von q hervorgehende vollständige Gleichung

$$\rho \left[u, \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v', \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right] = \mu \Delta \bar{w},$$

würde somit in der Nähe des Körpers mit sehr guter Näherung in

$$\rho u_s(r) \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = \mu \Delta \bar{w} \quad (2)$$

übergehen. Aus (2) folgert man aber unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, daß die längs dem Körper gültige Beziehung

$$q = -\mu / (\Delta u \, dx + \Delta v \, dy) \\ \text{in } q = -\rho / u_s(r) \bar{w} \, dr$$

für $\mu \rightarrow 0$ übergeht.

Die explizite Ausführung des oben geschilderten Vorgangs kann in wenigen Worten abgefertigt werden. Die besondere Art, Gleitungsintervalle einzuführen, ist mehr oder weniger gleichgültig; das unten angeführte Resultat bezieht sich auf folgende Anordnung: Der Zylinderumfang erstrecke sich, in Bogen gerechnet, vom vorderen Staupunkt aus von 0 bis 2π und es wird angenommen, daß die Flüssigkeit längs des Zylinders zwischen $2\pi - \alpha$ bis α gleitet, dabei werden die Gleitungsintervalle von den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ bis α und $2\pi - \alpha$ bis $\frac{3\pi}{2}$ begrenzt. Um zu erzielen, daß die Gleitung der Flüssigkeit allmählich gegen Null retardiert wird, nehmen wir in den genannten Intervallen eine gewisse konstante Wirbelverteilung an. Es sei m. a. W. eine gewisse geradlinige Strömung u vorhanden, derart, daß am Zylinder

$$u_s = \text{const.} = -1, \quad -\frac{3\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \\ u_{s,1} = -1 + \frac{\cos \vartheta}{\cos \alpha}, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < \alpha, \\ u_{s,2} = 0, \quad 2\pi - \alpha < \vartheta < \frac{3\pi}{2}, \\ u_{s,3} = 0, \quad \alpha < \vartheta < 2\pi - \alpha.$$

Dann wird folgendes Potentialproblem gelöst:

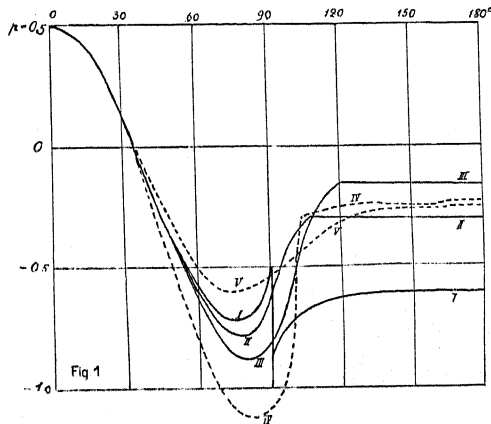
$$\Phi = u' + v'$$

wird bestimmt derart, daß

$$u' \cos \vartheta + v' \sin \vartheta + u_{s,1} \cos \vartheta = 0, \quad -\alpha < \vartheta < \alpha, \\ v' = 0, \quad \alpha < \vartheta < 2\pi - \alpha; \\ u' = v' = 0, \quad \text{im Unendlichen.}$$

Um zwischen α und $2\pi - \alpha$ Haftung zu erzielen, wird noch nachher eine geradlinige turbulente Strömung nach dem Schema von OSEEN überlagert.

Die Lösung läßt sich nach bekannten Prinzipien konstruieren und ohne Schwierigkeit berechnen. Man sieht leicht, daß für α nahe $\frac{\pi}{2}$ die erhaltene Strömung der ursprünglichen Oseenschen Strömung sehr nahe liegt, daß aber jetzt der Wirbel überall endlich bleibt und mit einem überall stetigen Geschwindigkeitsverlauf hinter dem Zylinder verbunden ist.



Die beigelegte Figur gibt das Resultat der über den Gleitungsintervallen ausgeführten Druckberechnung an. Die Kurven haben folgende Bedeutung:

- I. Druckverteilung am Zylinderumfang bei direkter Lösung des Oseenschen Problems.
- II. Druckverteilung mit Gleitung, $\alpha = 108^\circ$.
- III. „ „ „ „ $\alpha = 126^\circ$.
- IV. Experimentelle Druckverteilung, nach EISNER, für hohe REYNOLDS'sche Zahl.
- V. „ „ „ nach LAFAY.

Die Vergleichung der Kurve I mit den Kurven II und III zeigt, daß die lästige Druckdiskontinuität nunmehr verschwunden ist, und daß ferner der große Unterdruck der Kurve I durch einen mäßigeren, im Haftungsbereich konstanten und mit zunehmender Ausdehnung der Gleitungsintervalle abnehmenden Saugdruck ersetzt wird.

Die Kurven II und III schließen sich ersichtlich sehr gut der experimentellen Kurve an, sowohl ihrem allgemeinen Typus nach wie auch quantitativ. Durch mechanische Integration der Kurven schließt man sofort auf den resultierenden Druck, d. h. auf den Widerstandskoeffizienten. Sowohl theoretisch wie experimentell zeigen die Kurven einen sehr kleinen positiven Ueberdruck an der Vorderseite des Zylinders. Der Widerstand hängt somit (im Gegensatz zur HELMHOLTZ-DIRICHLETSchen Diskontinuitätsflächentheorie) fast ausschließlich von dem hinteren Saugdruck ab.

Der experimentell gefundene Widerstand ist sowohl nach EISNER wie nach LAFAY zwischen den theoretischen Widerständen nach II und III enthalten.

Die Verringerung des Widerstandes bei erhöhter Gleitung deutet auf die Möglichkeit einer zwanglosen Erklärung des mit steigender Reynolds'scher Zahl abnehmenden Widerstandskoeffizienten. Es mag in diesem Zusammenhang bemerkt werden, daß der Widerstandskoeffizient der reinen Oseenschen Bewegung (mit Haftung an der ganzen Rückseite) nach den entwickelten Prinzipien als Grenzfall berechnet, sich auf etwa 0,5 (in absolutem Maß) erhebt. Dieser Wert deckt sich etwa mit dem Koeffizienten unmittelbar vor dem bei etwa $R = 10^6$ entstehenden Widerstandsabfall.

Sur la méthode chronophotographique de détermination des vitesses dans les fluides liquides

Par C. Camichel, Toulouse

(Voir fig. 1, Planche XXVI)

La méthode consiste à éclairer pendant des temps bien déterminés, des particules d'aluminium et de photographier leurs trajectoires supposées planes.

Les photographies obtenues sont observées avec un micromètre muni d'un réticule. La figure 1 (Planche XXVI) représente la répartition des vitesses dans le plan median d'un ajustage ayant 4 cm. \times 4 cm. comme section droite; la vitesse moyenne étant 1 mètre par seconde.

On peut, par cette méthode, déterminer les vitesses, les accélérations, les surfaces équipotentielles de vitesse quand elles existent, le vecteur tourbillon etc. . . . étudier les phénomènes permanents et transitoires. Pour déterminer l'origine du temps, on emploie un disque denté portant des ouvertures longues ou courtes, réalisant une sorte d'alphabet morse qu'on imprime dans le liquide. L'appareil comprend aussi un cinéma dont le mouvement est synchronisé avec le disque denté portant l'alphabet morse. Pour les trajectoires gauches, il faut prendre simultanément deux photographies.

La méthode permet de déterminer les vitesses jusqu'à des distances de 0,3 mm. des parois.

L'exactitude de la méthode a été vérifiée par divers procédés:

1. Par comparaison directe avec les débits mesurés par jaugeage; on a d'ailleurs en prenant diverses concentrations de la poudre d'aluminium, vérifié que sous la même charge, le débit dans un tube est indépendant de la concentration en poudre d'aluminium.

2. En étudiant le mouvement de l'eau au voisinage d'un piston ayant un mouvement alternatif pour des périodes diverses allant jusqu'à $\frac{1}{20}$ de seconde et une amplitude de 3 centimètres.

3. En utilisant des vérifications indirectes parmi lesquelles on peut citer:

Détermination directe et indirecte des composantes du vecteur tourbillon. — Etude d'un tube tourbillon, séparation d'une zone centrale rotationnelle et d'une zone irrotationnelle. — Surfaces de discontinuité du vecteur tourbillon.

Application du principe des images à l'écoulement d'un orifice en mince paroi placé au voisinage d'une paroi verticale.

Tarage du tube de Pitot pour des vitesses descendant jusqu'à 5 cm. p/s.

Classification des phénomènes qui se passent à l'aval d'un corps immergé dans un milieu visqueux.

Application de la similitude de Reynolds pour l'eau et des liquides dont le coefficient cinématique de viscosité ν est égal à 300 fois celui de l'eau.

Vérification de la formule:

$$\frac{W}{\nu} = \frac{W'}{\nu'}$$

W , W' désignant les vitesses réalisées au même point d'un ajustage où l'on fait écouler, successivement les 2 liquides dont les coefficients cinématiques de viscosité sont ν et ν' , en réglant par l'observation des points singuliers, les formes des trajectoires pour qu'elles soient les mêmes.

Enfin la méthode employée permet la solution expérimentale de problèmes mathématiques dont l'analyse est impossible.

Ein hydrodynamischer Unitätssatz

Von G. Hamel, Berlin

Herr A. WEINSTEIN hat unter demselben Titel in der Mathematischen Zeitschrift¹⁾ folgenden Eindeutigkeitssatz bewiesen:

In der x, y -Ebene finde eine zur x -Achse symmetrische, stationäre Potentialströmung einer inkompressiblen Flüssigkeit statt. ω_1, ω_2 seien gegebene, feste Wände, zwischen denen die Flüssigkeit ausströmt, λ_1, λ_2 seien die freien nicht gegebenen Strahlgrenzen.

Die Maße seien so normiert, daß an λ_1 und λ_2 die Geschwindigkeit 1 sei, daß ferner die Strahlbreite im Unendlichen π sei. Unter diesen Angaben besteht Eindeutigkeit im kleinen, d. h. es gibt keine Nachbarbewegungen, die denselben Bedingungen genügen, wenn über die Krümmung des freien Strahles eine gewisse einschränkende Bedingung (3)²⁾ gemacht wird.

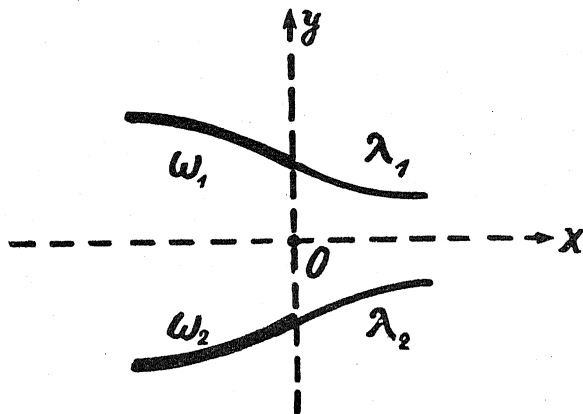


Abb. 1.

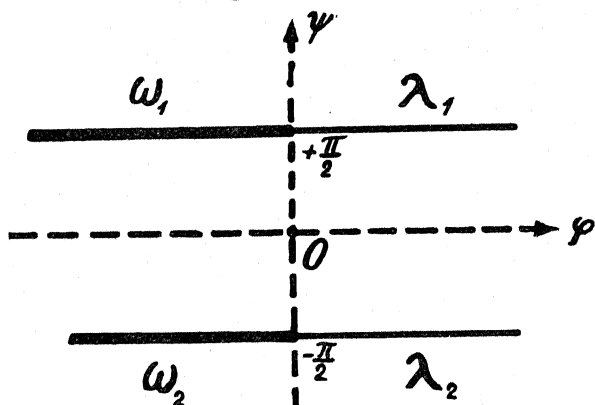


Abb. 2.

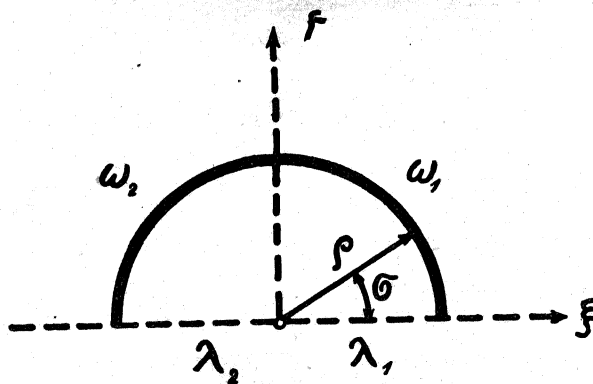


Abb. 3.

Es sei $z = x + iy$, $f = \varphi + i\psi$, wo φ das Potential, ψ die Stromfunktion, $w = \frac{df}{dz}$ und $\omega = i \ln w = \vartheta + i\tau$, sodaß ϑ den Winkel bedeutet, den die Richtung der Strömung mit der x -Achse bildet, τ den Logarithmus des Betrages der Geschwindigkeit.

Ferner sei die f -Ebene durch

$$izf = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \dots \dots (1)$$

konform auf die $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\sigma}$ -Ebene abgebildet, sodaß dem Stromstreifen der Breite π der obere halbe Einheitskreis der ζ -Ebene entspricht. Den festen Wänden entspricht die Peripherie des Halbkreises, den freien Strahlrändern das Stück der reellen Achse, $-1 \leq \xi \leq +1$, und zwar dem oberen freien Rand das positive Halbstück.

Die von Herrn WEINSTEIN abgeleitete Bedingung lautet:

$$\left| \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right| < \frac{2}{\pi} \text{ für } \eta = 0 \text{ und } 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3)$$

Diesen Unitätssatz wendet Herr WEINSTEIN auf den CISOTTI'schen Fall an, in dem jede der festen Wände ein Polygon ist und

¹⁾ Mathematische Zeitschrift, Bd. 19, 1924, S. 265—275.

²⁾ Die von mir ohne Striche bezeichneten Formeln tragen dieselben Nummern wie die des Herrn Weinstein.

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} \sum_{h=1}^{2n} (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \log \sqrt{\frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \overline{\zeta}_h \zeta}},$$

wobei

$$\begin{aligned} \vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_n < 0, \quad \vartheta_{2n+2-h} = -\vartheta_h \text{ für } h = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{\vartheta_{h+1} - \vartheta_h}{\pi} = \beta_h < 1, \quad \zeta_h = e^{i\vartheta_h} = \xi_h + i\eta_h, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \frac{\pi}{2} \\ \text{und } \sigma_{2n-h+1} = \pi - \sigma_h \text{ für } h = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Herr Weinstein findet die Unitätsbedingung

$$-\vartheta_1 \left(\eta_{11} + \frac{1}{\eta_{11}} \right) < 1, \quad (3) \dots \dots \dots (14)$$

Im folgenden soll nun:

Erstens die Bedingung (3) zu

$$\left| \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right| < \frac{\pi}{1,11} \quad (3')$$

verschärft werden, zweitens die Bedingung (14) wesentlich modifiziert, indem sich für ϑ_1 eine von η_{11} unabhängige Grenze angeben läßt:

$$-\vartheta_1 = \frac{\pi}{\left(2,3 + \frac{2,32}{\pi} \right)} \approx 1.$$

Die Methode besteht in der Zurückführung des Problems auf eine lineare Integralgleichung, wodurch schärfere Abschätzungen ermöglicht werden.

§ 1. Die Integralgleichung

Nach Weinstein führt die Aufgabe auf folgendes Problem der Potentialtheorie:

Zu beweisen ist, daß eine harmonische Funktion $\mathfrak{z}\psi$, die Variation von ψ , die also in jedem der geschilderten Bereiche der Laplace'schen Gleichung

$$\Delta \mathfrak{z}\psi = 0$$

genügt, und am festen Rande ω_1, ω_2 die Bedingung

$$\mathfrak{z}\psi = 0, \quad (5)$$

am freien Rande λ_1, λ_2 aber die Bedingung

$$\frac{\partial(\mathfrak{z}\psi)}{\partial \psi} - \epsilon \mathfrak{z}\psi = 0 \quad (7)$$

mit

$$\epsilon = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}$$

befriedigt, identisch null sein muß, wenn ϵ eine gewisse Ungleichheit erfüllt. Also ein gemischtes Randwertproblem: auf einem Teil K_1 des Randes K ist $\mathfrak{z}\psi = 0$, auf dem anderen Teil K_2 besteht die linear homogene Gleichung (7) zwischen $\mathfrak{z}\psi$ und der Normalableitung

$$\frac{\partial(\mathfrak{z}\psi)}{\partial \psi} = \frac{(\partial \mathfrak{z}\psi)}{\partial n}, \text{ wo } n \text{ für } \omega_1 \text{ die äußere Normale bedeutet. Aus Symmetriegründen kann}$$

man sich auf die obere Hälfte der φ, ψ -Ebene, bzw. die rechte Hälfte der ξ, η -Ebene beschränken, wenn man für $\psi = 0, -\infty < \varphi < +\infty$ noch die Randbedingung (5) hinzufügt.

Die Aufgabe können wir nun nach HILBERT³⁾ auf eine lineare Integralgleichung für die Werte $\mathfrak{z}\psi$ auf λ_1 zurückführen. Kann man beweisen, daß $\mathfrak{z}\psi$ auch auf λ_1 null sein muß, so ist es identisch null.

³⁾ In der Abhandlung hat sich ein kleiner Rechenfehler eingeschlichen.

⁴⁾ «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen», Kap. IX.

Es sei G eine harmonische Funktion, die sich im inneren Punkte Q wie $\log \frac{1}{r}$ verhält, sonst regulär ist, und am Rande R_1 null ist, während sie am Rande R_2 die Normalableitung $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ habe. Die Existenz dieser Funktion wird durch explizite Bildung sicher gestellt. Dann folgt aus dem Green'schen Satze:

$$2\pi \delta \psi_Q = \int \left(\frac{\partial \delta \psi_0}{\partial n} G_0 - \delta \psi_0 \cdot \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) ds$$

wegen der Randbedingung für $\delta \psi$ und G

$$2\pi \delta \psi_Q = \int_{R_2} C_0 \delta \psi_0 G_0 ds$$

Da G am Punkte Q nur logarithmisch unendlich wird und sonst auf dem Rande ganz regulär verläuft, können wir in der vorstehenden Formel Q auf den Rand rücken lassen und erhalten die gesuchte lineare Integralgleichung

$$2\pi \delta \psi_0 = \int_{R_2} c_0 \delta \psi_0 G_0 ds.$$

Der Index 0 soll den Randpunkt bezeichnen.

§ 2. Herstellung der Green'schen Funktion

Um G herzustellen, bilden wir das vorgelegte Gebiet auf das erste Viertel einer neuen komplexen Ebene, der r, s -Ebene so ab, daß das Bild von R_1 auf die positiv reelle Halbachse, das von R_2 auf die positiv imaginäre Halbachse falle.

Habe Q in dieser Ebene die Koordinaten a, b , so findet man durch Spiegelung

$$G = \frac{1}{2} \ln \frac{[(r+a)^2 + (s+b)^2][(r-a)^2 + (s+b)^2]}{[(r+a)^2 + (s-b)^2][(r-a)^2 + (s-b)^2]}$$

Die Abbildung auf die φ, ψ -Ebene geschieht durch

$$r + is = \sqrt{1 + e^{2(\varphi + i\psi)}}.$$

$\psi = 0$ entsprechen dabei die Werte $r = +\sqrt{1 + e^{2\varphi}} \geq 1, s = 0; \lambda_1$ oder $\psi = \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < \infty$

entsprechen die Werte $r + is = \sqrt{1 - e^{2\varphi}}$ oder $r = 0, s = +\sqrt{e^{2\varphi} - 1}, \omega_1$ oder $\psi = \frac{\pi}{2},$

$-\infty < \varphi \leq 0$ entsprechen die Werte $r + is = \sqrt{1 - e^{2\varphi}}$ oder $r = +\sqrt{1 - e^{2\varphi}} \leq 1$ und $s = 0$.

Rechnet man nun in ξ, η um und geht auf den Rand λ_1 d. h. $0 \leq \xi \leq 1$ und $\eta = 0$, während dem Punkte $Q(a, b)$ die Koordinaten α, β , also auf dem Rand $\beta = 0, 0 \leq \alpha \leq 1$ entsprechen mögen, so erhält man durch elementare Rechnung

$$G_0 = \ln \frac{(\xi + \alpha)^2 (1 - \alpha \xi)^2}{(\xi - \alpha)^2 (1 + \xi \alpha)^2}.$$

Man beweist leicht, daß

$$G_0 \geq 0 \text{ ist.}$$

Da noch $c ds = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\xi$ ist, erhält man die Integralgleichung

$$2\pi \delta \psi_0(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \delta \psi_0(\xi) \cdot \ln \frac{(\xi + \alpha)^2 (1 - \alpha \xi)^2}{(\xi - \alpha)^2 (1 + \xi \alpha)^2} d\xi$$

Ist der freie Strahlrand so gekrümmt, wie die Zeichnung angibt, so ist $\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} < 0$, aber wegen

$$c = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0, \psi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\xi(1+\xi^2)}{1-\xi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \quad 0 < \xi < 1, \eta = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$ positiv

§ 3. Abschätzung

Wegen des Vorzeichens von G_0 , d. h. des Logarithmus gilt nun folgende einfache Abschätzung:

$$2\pi \left| \delta \psi_0 \right| < \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\max} \left| \delta \psi_0 \right|_{\max} \int_0^1 \ln \frac{(\xi + \alpha)^2 (1 - \alpha \xi)^2}{(\xi - \alpha)^2 (1 + \xi \alpha)^2} d\xi$$

Das Integral läßt sich elementar berechnen zu

$$-2 \left\{ 2\alpha \ln \alpha + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \ln(1-\alpha^2) \right\} > 0 \text{ für } 0 < \alpha < 1.$$

Mithin kommt man unter der Annahme $\left| \delta \psi_0 \right|_{\max} \neq 0$ zu einem Widerspruch, wenn

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\max} < \frac{\pi}{\left| 2\alpha \ln \alpha + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \ln(1-\alpha^2) \right|_{\max}}$$

Das Maximum des Nenners errechnet sich aber leicht zu 1,11, womit die hinreichende Bedingung

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right| < \frac{\pi}{1,11} \quad \dots \quad (3')$$

bewiesen ist.

§ 4. Der Fall von Cisotti

In dem Falle Cisotti's ist

$$\omega = i \sum_{h=1}^{2n} \beta_h \log i \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \bar{\zeta}_h \zeta}$$

mit

$$\beta_h = \frac{\vartheta_{h+1} - \vartheta_h}{\pi} < 1 \text{ und } \vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_n < 0, \vartheta_{n+1} = 0,$$

$$\vartheta_{2n+2-h} = -\vartheta_h \text{ für } h = 1, 2, \dots, n,$$

$$\zeta_h = e^{i\sigma_h} = \xi_h + i\eta_h, 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$\sigma_{2n-h+1} = \pi - \sigma_h \text{ für } h = 1, 2, \dots, n.$$

Die verlangte Symmetrie besteht.

Da $\omega = \vartheta + i\tau$, ergibt elementare Rechnung

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi) &= - \sum_{h=1}^n \beta_h \gamma \ln \frac{(1-\xi^2) \sin \sigma_h + i(2\xi - \cos \sigma_h)(1+\xi^2)}{1+\xi^2 - 2\xi \cos \sigma_h} \\ &= - \sum_{h=1}^{2n} \beta_h \operatorname{arctg} \frac{2\xi - \cos \sigma_h(1+\xi^2)}{(1-\xi^2) \sin \sigma_h} \end{aligned}$$

An der Austrittsstelle, d. h. für

$$\xi = 1 \text{ folgt } \vartheta = - \sum \beta_h \frac{\pi}{2} = - \frac{1}{2} (\vartheta_{2n+1} - \vartheta_1) = \vartheta_1$$

woraus die Bedeutung von ϑ_1 folgt.

Ferner ist für $\eta = 0$ unter Benutzung der Symmetrie

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = -2 \sum_{h=1}^n \beta_h \sin \sigma_h \left(\frac{1}{1 + \xi^2 - 2 \xi \cos \sigma_h} + \frac{1}{1 + \xi^2 + 2 \xi \cos \sigma_h} \right)$$

Alle σ_h liegen hier im ersten Viertel.

Daher lautet die Integralgleichung im CISOTTI'schen Falle

$$2 \pi \delta \psi_0 = 2 \int_0^1 \delta \psi_0 \cdot \ln \frac{(\xi + \alpha)^2 (1 - \xi \alpha)^2}{(\xi - \alpha)^2 (1 + \xi \alpha)^2} \cdot \sum_{h=1}^n \beta_h \sin \sigma_h \left\{ \frac{1}{1 + \xi^2 - 2 \xi \cos \sigma_h} + \frac{1}{1 + \xi^2 + 2 \xi \cos \sigma_h} \right\} d\xi.$$

Da sowohl der Logarithmus wie alle β_h und alle σ_h positiv sind, kann man nach dem Mittelwertsatz setzen:

$$2 \pi \delta \psi_0 = 2 (\delta \psi_0)_m \int_0^1 \ln \frac{(\xi + \alpha)^2 (1 - \xi \alpha)^2}{(\xi - \alpha)^2 (1 + \xi \alpha)^2} \cdot \sum_{h=1}^n \beta_h \sin \sigma_h \left(\frac{1}{1 + \xi^2 - 2 \xi \cos \sigma_h} + \frac{1}{1 + \xi^2 + 2 \xi \cos \sigma_h} \right) d\xi$$

und man hat bei $\delta \psi \equiv 0$ einen Widerspruch, sobald das Integral für alle α kleiner als π ist.

Das Integral muß nun abgeschätzt werden. Als analytische Funktion von ξ hat der Integrand die logarithmischen Singularitäten $\pm \alpha$, $\pm \frac{1}{\alpha}$, ferner die Pole $e^{\pm i \sigma_h}$. Der Logarithmus ist in dem Integrationsintervall reell zu nehmen. Die zweiten Integraltteile

$$\int_0^1 \ln() \cdot \frac{1}{1 + \xi^2 + 2 \xi \cos \sigma_h} d\xi$$

machen keine Schwierigkeiten, sie sind kleiner als

$$\int_0^1 \ln() \cdot d\xi < 2 \cdot 1,11.$$

Schwieriger sind die ersten Teile $\int_0^1 \ln() \cdot \frac{\sin \sigma_h}{1 + \xi^2 - 2 \xi \cos \sigma_h} d\xi$ abzuschätzen, wenn man eine von σ_h unabhängige Grenze haben will.

Nun erkennt man zunächst leicht durch die Substitution von ξ statt $\frac{1}{\xi}$, daß

$$\int_0^1 = - \int_1^\infty$$

Dieses letzte Integral aber kann man nun auf einem anderen Wege ins Unendliche erstrecken, der zwischen den singulären Stellen $\frac{1}{\alpha}$ und $e^{i \sigma_h}$ hindurchgeht, etwa auf dem Strahl, der vom Punkte $\xi = 1$ unter dem spitzen Winkel γ gegen die positiv reelle Halbachse ins Unendliche geht.

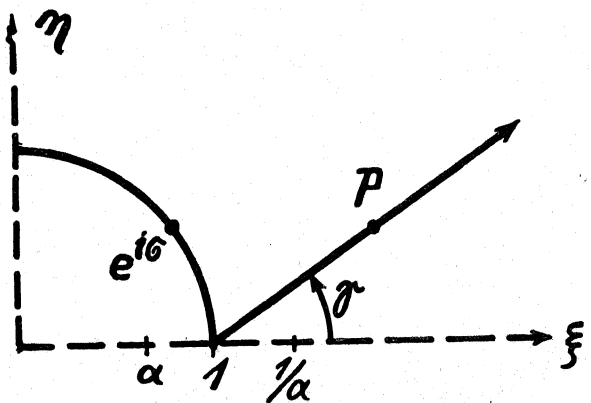


Fig. 4.

Als Substitution empfiehlt sich

$$\xi = 1 + 2 \sin \frac{\sigma}{2} \cdot e^{i\gamma t},$$

wo t reell von 0 bis ∞ läuft.

Das so entstehende Integral von 0 bis ∞ zerlege man in die Integrale von 0 bis 1 und von 1 bis ∞ . Das letztere führt man durch Ersatz von t durch $\frac{1}{t}$ wieder auf eines von 0 bis 1 zurück. Man erhält so das eine Integral der Form

$$= \frac{1}{\sin \frac{\sigma}{2}} R \int_0^1 \frac{e^{i\gamma t} dt}{t^2 e^{2i\gamma} + 1 + 2 t e^{i\gamma} \sin \frac{\sigma}{2}} \ln \left\{ \frac{1}{t} \right\} dt$$

Der Logarithmus enthält vier Faktoren im Zähler und im Nenner. Man kann ihn leicht abschätzen, sowohl den reellen, wie den imaginären Teil, dabei braucht man folgendes: Bezeichnet P einen Punkt des Strahles, A, B, C, D die Punkte $\frac{1}{\alpha}, -\alpha, \alpha, \frac{1}{\alpha}$, so findet man für alle α zwischen 0 und 1

$$\frac{PC \cdot PA}{PB \cdot PD} < \frac{4}{\sin \gamma}.$$

Der erste Faktor unter dem Integral hat aber positiven Realteil und positiven Imaginär-Teil. Infolgedessen kann man das Integral nach dem Mittelwertsatz leicht abschätzen. Für γ wählt man einen geeigneten Wert, etwa $\frac{\pi}{4}$.

Meine Rechnungen, die ich unmöglich ausführlich veröffentlichen kann, ergeben so das ganze Integral kleiner als

$$\sum_1^{\pi} \beta_4 (2, 3\pi + 2, 22 \sin \sigma_4) < \sum_1^{\pi} \beta_4 (2, 3\pi + 2, 22) = (2, 3\pi + 2, 22) \cdot \left(-\frac{\theta_1}{\pi}\right).$$

Mithin besteht die Eindeutigkeit im Kleinen, wenn

$$-\theta_1 < \frac{\pi}{2, 3 + \frac{2, 22}{\pi}} \approx 1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Sur les lois de fréquence des tourbillons alternés détachés à l'arrière d'un obstacle mobile

Par H. Bénard, Paris

(Voir Planche XXVII pour fig. 3)

J'ai commencé à m'occuper des tourbillons alternés, à Lyon, en 1904, à une époque où personne ne les avait encore décrits.

Le succès avec lequel, dans mon premier travail important, sur les *tourbillons cellulaires*, dûs à la convection de la chaleur à travers une nappe liquide horizontale¹⁾, j'avais employé les belles méthodes de l'optique et en particulier celle de FOUCAULT pour définir la forme d'une surface liquide non plane, présentant tout un relief compliqué entre deux cotes distantes de moins de 1μ , m'amena à chercher l'application de méthodes analogues à l'étude expérimentale de certains problèmes d'hydrodynamique.

C'est avec ce dessein que je commençai à remuer une cuiller à café à la surface d'un cristalliseur, plein d'eau chargée d'encre, pour répéter les expériences de HELMHOLTZ sur les «tourbillons du café au lait». Mais je variaï beaucoup la forme de l'obstacle. Ayant pris, par exemple, la lame verticale d'un couteau à dessert, je *découvris*, à ma grande surprise, les magnifiques tourbillons alternés, alignés sur deux files, que beaucoup de personnes peuvent voir tous les jours sans les remarquer.

Il me paraît inutile de citer les nombreux exemples familiers de tourbillons alternés produits soit par un courant d'eau et un obstacle immobile, soit par une nappe d'eau tranquille et un obstacle déplacé avec une vitesse uniforme à travers cette nappe; si j'y fais allusion, c'est pour montrer combien me paraît justifiée l'opinion qu'a bien voulu m'écrire récemment un physicien anglais, E. G. RICHARDSON, dont je parlerai plus loin: «Un nombre considérable de personnes ont dû voir les tourbillons alternés avant vous . . .» Je ne cite pas la suite d'où il résulte que mon originalité a consisté uniquement à vouloir les mesurer, ce que j'admettrai volontiers.

Donc, je me mis de suite à réaliser un appareil très soigné dans les moindres détails, assurant la précision la plus grande des mesures d'ordre géométrique, cinématique, etc., de la température et de la viscosité du liquide, l'uniformité du mouvement de l'obstacle, etc.

Cet appareil, construit et mis au point en 1906, fut d'abord disposé pour obtenir des photographies isolées des tourbillons rendus visibles par la méthode optique des rayons aberrants ou du relief exagéré de Foucault; l'obstacle lui-même se chargeait, dans sa course, de déclencher le déclic (d'une souris) qui venait presser la poire de l'obturateur: chaque course me fournissait un seul cliché, dont l'époque était réglable, le déclic étant mobile sur une glissière graduée.

Un des gros ennuis que j'ai eus avec les clichés fixes fut de *situer* exactement l'obstacle dans chacun d'eux, car rien ne le révèle, sinon qu'il a sa proue quelque part derrière les rides capillaires photographiées, et sa poupe quelque part en avant des premiers tourbillons; mais la longueur *vide* sur la photographie étant notablement supérieure à celle de l'obstacle, la position exacte de ce dernier doit être calculée à l'aide d'artifices spéciaux. Je n'ai obtenu de renseignements satisfaisants qu'en photographiant un bâtonnet lumineux de brûleur Nernst entraîné en même temps que l'obstacle.

¹⁾ *Revue générale des Sciences*, décembre 1900; *Annales de Ch. et de Phys.* 1901; *Journal de Phys.* 1901 et années suivantes, etc.

Heureusement j'ai songé très vite à utiliser le merveilleux appareil dont LOUIS LUMIÈRE venait de doter le monde et la science: le cinématographe Lumière Carpentier, peu encombrant, facile à faire marcher au moteur, muni de petites bobines de 17 m. de film à perforation Lumière (depuis lors abandonnée). Le phénomène étant très éphémère (au bout de 2 secondes, les tourbillons sont en général amortis, au moins avec les dimensions d'obstacles et les vitesses que j'employais), la consommation de pellicule était restreinte et une même bobine suffisait pour un assez grand nombre de courses. C'est avec ce matériel que j'ai obtenu en 1908—1909, dans une cave de la Faculté des Sciences de Lyon, la série de documents incomparables sur lesquels j'ai travaillé ensuite pendant un nombre respectable d'années — il y a eu des interruptions — car le dépouillement micrométrique des films a comporté plus de 20,000 pointés, pour les tourbillons seulement, effectués sur 133 films. Les principaux dispositifs optiques et mécaniques de l'appareil ont été décrits dans mes deux Notes aux *Comptes-rendus* de 1913.

Je rappellerai seulement que chacune des cuvettes concaves de la surface libre donne par réflexion une petite image d'un segment de cercle lumineux, situé à l'infini dans la direction verticale, et limité par une corde perpendiculaire à la direction de translation de l'obstacle.

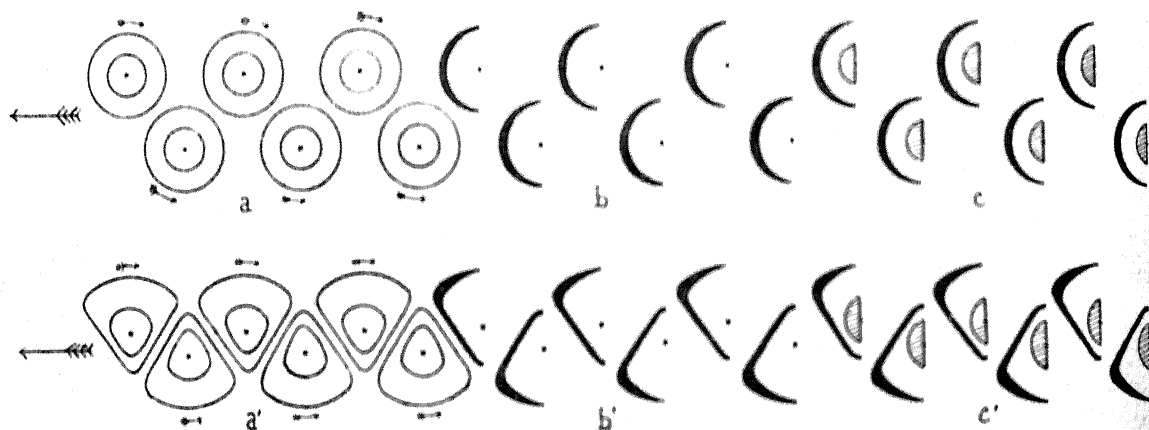


Fig. 1.

Le dessin supérieur *a b c* se rapporte au cas où les tourbillons resteraient de révolution;

le dessin inférieur *a' b' c'* au cas réel où les tourbillons se déforment mutuellement.

a a': courbes de niveau de la surface libre;

b b': effet obtenu, en négatif, par la méthode des rayons aberrants, la lumière étant supposée venir de l'arrière;

c c': à l'effet précédent, on a superposé les petites images parasites, en demi-teinte, d'un segment de cercle lumineux situé à l'infini, dans la direction zénithale.

Dans les parties *a b a' b'*, les points isolés indiquent les axes centraux des tourbillons (ombilics de la surface libre).

Cette corde fournit ainsi des repères rectilignes parfaitement nets, qui, pointés à 50 μ près sur le film, indiquent à 0,02 mm. près, en vraie grandeur, l'emplacement de chacun des tourbillons, à l'époque, exactement connue, où chaque image a été impressionnée. De plus, les déformations de ces petits segments de cercle renseignent sur la forme des dépressions qui les ont fournis.

Je reviens à l'histoire des *tourbillons alternés*. Dans ma première Note de 1908, je n'ai cité que mon maître M. BRILLOUIN, qui, dans ses *Leçons sur la Viscosité*, parues en 1907, indique que «la distribution longitudinale des tourbillons doit être périodique dans le régime hydraulique, au lieu d'être uniforme comme dans le régime de Poiseuille»; et aussi O. REYNOLDS, à cause d'une figure sans commentaire dans le texte, publiée dans son article célèbre de 1883 aux *Philosophical Transactions*: le cas de Reynolds est d'ailleurs différent, car il s'agit de l'écoulement d'un liquide en régime turbulent dans un tube à section circulaire.

En réalité, c'est A. MALLOCK, dont j'ignorais l'article paru en 1907 aux *Philosophical Transactions*, qui a vu et dessiné le premier les tourbillons alternés dans les liquides. Il n'a fait aucun essai de mesures relatives aux lois de la période, mais par contre, fait important, il a été, le premier, avant KRÜGER, avant LORD RAYLEIGH, à avoir vu que là était l'explication des sons éoliens rendus par une corde dans un courant d'air.

En 1908, je publiai mes deux premières Notes sur les tourbillons alternés aux *Comptes rendus*. Elles furent rédigées un peu vite: la figure contenait un lapsus de dessin (sens de rotation de quelques tourbillons inversé), qu'un erratum ultérieur rectifia²⁾. Il me paraît plus grave de n'avoir pas pris le temps d'examiner mes films et de découvrir qu'ils avaient enregistré avec une très grande précision l'entraînement à vitesse uniforme, mais faible, v , des tourbillons détachés derrière l'obstacle, et que leur emplacement ne devenait pas du tout stationnaire. Par contre, les quatre lois fondamentales de l'équidistance, ou distance longitudinale e entre deux tourbillons consécutifs de la même file, déduites des mesures provisoires effectuées sur les clichés fixes, étaient nettement énoncées en des termes auxquels je n'ai eu que peu de chose à modifier depuis. J'ai eu seulement à les préciser, sauf que la première:

L'équidistance pour un obstacle donné ne dépend pas de la vitesse V de cet obstacle, était une grossière approximation, intéressante à donner comme premier renseignement, mais qui n'a pas résisté aux mesures plus précises effectuées sur les films.

La seconde, au contraire:

L'équidistance (et par suite la fréquence N des tourbillons) ne dépend pas de la dimension longitudinale de la lame, a été vérifiée rigoureusement.

La troisième:

L'équidistance croît dans le même sens que l'épaisseur transversale (approximativement comme la racine carrée),

et la quatrième:

L'équidistance croît dans le même sens que la viscosité, mais bien plus lentement, n'avaient d'autre prétention que de donner un renseignement provisoire: elles ont été confirmées en gros, mais précisées.

En 1913, j'ai reproduit aux *Comptes-rendus* quelques exemples de mes films et décrit la méthode graphique qui m'a permis de calculer les valeurs de v et de e pour chaque course; les règles pratiques adoptées reviennent à chercher le système de droites parallèles et équidistantes qui représente au mieux les observations, le temps étant porté en abscisse et la coordonnée longitudinale de chaque tourbillon en ordonnée.

Je décrivais comme suit la marche des tourbillons:

Les tourbillons, formés tous très sensiblement sur le plan médian, sont d'abord entraînés avec la même vitesse que l'obstacle, mais ils prennent aussitôt un mouvement ralenti, en même temps qu'ils s'écartent à droite et à gauche; ils atteignent très vite leur écartement

²⁾ J'ai insisté sur mes premières Notes publiées en 1908 parce que, dans leur célèbre Mémoire de 1912 au *Physik. Ztsch.*, von KÁRMÁN et RUBACH, ne les citent qu'en ce qui concerne un détail descriptif relatif à la *zone vibrante*: la partie quantitative semble leur avoir complètement échappé.

En janvier 1911, dans le journal *l'Aérophile*, D. RIABOUCHINSKY, sans avoir connu mon travail, publia de son côté une belle expérience montrant la périodicité des tourbillons.

Ici se place le mémoire de KÁRMÁN et RUBACH, déjà cité (1912); puis la réalisation des tourbillons dans les gaz, par VON DEM BORNE (1912), puis de nombreux travaux allemands et anglais sur les sons éoliens, les sons de bâton, les sons de sifflet, tous expliqués par les tourbillons alternés.

transversal limite, leur équidistance longitudinale limite, et leur vitesse limite, qu'ils garderont ensuite, tant qu'ils ne seront pas trop amortis: en vieillissant, en effet, ils deviennent évidemment de plus en plus sensibles aux fluctuations accidentelles inévitables et l'équidistance, en particulier, est de moins en moins bien définie (voir la fig. 2).

Le dépouillement a été effectué sur la totalité des 133 films.

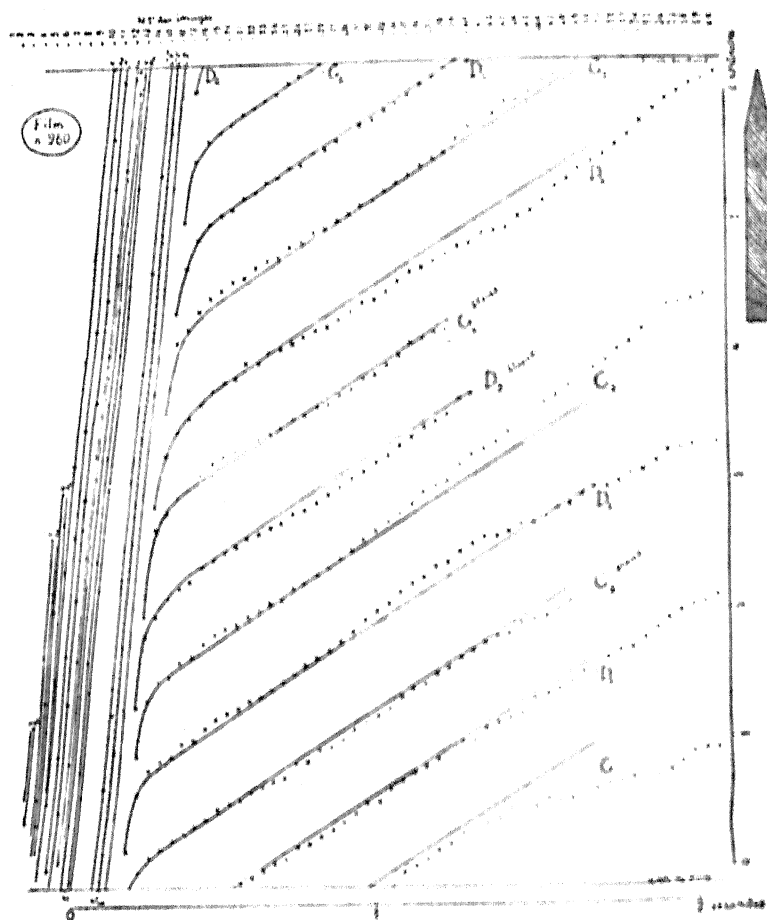


Fig. 2.

Graphique résumant les mesures effectuées sur le film 260. Les droites parallèles de gauche sont les graphiques des divers accidents de la partie de la surface libre qui a un plan de symétrie vertical et est entraînée avec la vitesse V de l'obstacle: en particulier, celui de la poupe est confondu avec $G' D'$, et celui de la proue avec G'' . La section de l'obstacle est dessinée sur le côté droit à la même échelle que les espaces parcourus.

Plus tard, conformément à ce que je crois la saine méthode, je n'ai tenu aucun compte de ceux qui étaient entachés d'une suspicion expérimentale quelconque notée au cours des expériences, même quand ils étaient en apparence très beaux. J'ai retenu finalement 71 excellents films, obtenus avec des lames à faces parallèles, en laissant de côté, pour le moment, quelques autres obtenus avec d'autres formes d'obstacles. Les résultats ont été publiés cette année (1926) en quatre Notes parues aux *Comptes rendus*.

Loi de la fréquence N résumant tous les résultats, fluctuations de N et justification de la méthode statistique

Les obstacles étaient tous des lames à faces parallèles verticales, très soigneusement travaillées (à quelques 0^{mm} , ou près), mues parallèlement à ces faces. Toutes avaient un plan

de symétrie vertical, l'avant étant soit un dièdre aigu, soit un cylindre ogival raccordé tangentiellement aux faces planes latérales. D'ailleurs, les formes de l'avant et de l'arrière n'ont paru avoir aucune influence sur N .

L'épaisseur D des lames a varié de 0^{cm}, 1 à 0^{cm}, 8; leur longueur L , de 1 à 4^{cm}; le rapport $\frac{L}{D}$, de 2,5 à 40; les vitesses V de l'obstacle, de 9 à 22^{cm} par seconde; la viscosité cinématique ν des quatre liquides employés, de 7.10^{-3} à 54.10^{-3} unité C. G. S.

L'ensemble des résultats, dans le domaine de variations indiqué, est bien représenté par la formule, à trois constantes numériques:

$$N = \frac{0,430}{D + 0,307} (V - 166 \nu) \quad (\text{en C. G. S.}),$$

que l'on peut encore écrire:

$$N = \frac{l_1 V - \nu}{l_2 (D + l_3)}$$

les trois constantes numériques l_1, l_2, l_3 étant homogènes à des longueurs et respectivement égales, en centimètres, à

$$6,02.10^{-3}; \quad 14,01.10^{-3}; \quad 0,307.$$

On voit que dans le plan (V, N) , pour des lames de même largeur et des liquides différents, on obtient des droites parallèles; que pour un liquide donné et des lames de largeurs D différentes, on obtient des droites concourant en un point de l'axe des V d'abscisse proportionnelle à ν ; enfin, que la longueur L de l'obstacle n'intervient pas, résultat déjà annoncé par moi en 1908, et qui s'est trouvé rigoureusement confirmé.

Les écarts: N observé — N calculé, n'ont jamais dépassé ± 1 vibration par seconde et sont inférieurs à 0,5 vibration par seconde dans les $\frac{2}{3}$ des cas. Toutefois, N ayant varié de 3 à 20, on eût pu espérer encore mieux, car des précautions minutieuses avaient assuré l'uniformité des conditions, en particulier celle de la vitesse V , et aussi la pureté, l'homogénéité et l'immobilité préalable du liquide; la précision de toutes les mesures de longueur, de temps, de densité et même de viscosité, avait été égale à $\frac{1}{200}$ dans les cas les plus défavorables, et le plus souvent encore bien meilleure³⁾.

Or il est évident, même sur les meilleures épures, qu'il subsiste entre les valeurs successives de e et, par suite, de la période, des *fluctuations*, atteignant $\frac{1}{20}$, parfois même $\frac{1}{10}$ en valeur relative. Il existe très probablement, lors du détachement des tourbillons, de chaque côté de l'obstacle, un petit domaine d'instabilité du régime laminaire, qui permet de légères différences entre les forces vives des tourbillons successifs; elles se révèlent sur les films par

³⁾ Par exemple, le diapason chronographe a permis, pour chaque course, la mesure de V à $\frac{1}{1000}$ près. Je ne puis ici justifier de cette extrême précision, comme je voudrais, mais j'en citerai encore un exemple: par suite de la durée exceptionnelle du dépouillement (1911—1924), j'ai été obligé de tenir compte d'une légère contraction séculaire des films en celluloid, et j'ai, pour cela, très soigneusement déterminé les lois de cette contraction: les corrections qui en ont résulté ont varié de $\frac{1}{700}$ à $\frac{1}{250}$, suivant les films.

les *durées de vie capricieusement inégales* des tourbillons d'une même file: parmi les taches lumineuses, de plus en plus diffuses, indiquant la place de chaque cuvette, quelques-unes disparaissent prématurément, d'autres persistent après toutes les autres, sans que rien, dans la méthode optique, puisse expliquer ces destinées différentes. Il semble bien que ces fluctuations inévitables justifient, *a posteriori*, la méthode statistique laborieuse employée pour dégager les lois de la fréquence N des moyennes d'un grand nombre de mesures.

Sur les écarts des valeurs de la fréquence des tourbillons alternés par rapport à la loi de similitude dynamique

Dès 1878, V. STROUHAL avait trouvé que la hauteur des sons donnés par un bâton de diamètre D déplacé dans l'air avec la vitesse V satisfait, entre certaines limites, à la relation empirique

$$\frac{ND}{V} = S,$$

S étant une constante. Lord RAYLEIGH montra que, plus généralement, le principe de similitude dynamique permet de prévoir pour les fréquences N des sons éoliens une équation de la forme

$$S = f\left(\frac{1}{R}\right), \quad \text{où } R = \frac{VD}{\nu}.$$

R et S étant deux paramètres sans dimensions, on sait que R est le *paramètre de Reynolds*; j'appellerai S le *paramètre de Strouhal*.

A la suite de mes premières publications sur les tourbillons alternés dans les liquides, F. KRÜGER et A. LAUTH (1914), puis Lord RAYLEIGH (1915), reprenant la discussion des expériences de Strouhal, eurent l'idée d'expliquer les *sons de bâton* et les *sons éoliens* par les tourbillons alternés dus au déplacement relatif du bâton ou du fil métallique et de l'air.

Dans mes expériences, R variant de 73 à 1202, S a varié de 0,092 à 0,250.

Dans son important travail sur les sons éoliens des fils à section circulaire dans l'air et dans l'eau, E. F. RELF (1921) coordonne ses résultats, suivant la loi de Rayleigh, en portant R (ou $\log R$) en abscisses et S en ordonnées. Pour la tranche des abscisses R comprises entre 110 et 350, Relf trouve les deux courbes de l'air et de l'eau en assez bonne concordance (mais elles n'y ont respectivement que 3 et 5 points); au delà de $R = 350$, toutes ses expériences se rapportent à l'air.

J'adopterai également le plan (R, S) pour représenter les 71 points relatifs aux quatre liquides que j'ai employés, chaque film donnant un point, savoir:

	ν compris entre
15 pour le métaxylol	73 et $74 \cdot 10^{-4}$ C. G. S.
24 pour l'eau	100 et 125 "
21 pour l'eau sucrée ($c = 20,3$)	189 et 199 "
11 pour l'eau sucrée ($c = 37,2$)	449 et 535 "

Le résultat essentiel est le suivant: les points se placent sur 4 courbes différentes, et non sur une seule; il y a bien, à cause des points aberrants, empiètement partiel des domaines des 4 liquides, deux à deux. Mais les courbes représentant au mieux les observations relatives à chacun d'eux forment nettement un faisceau de courbes concaves vers le bas, s'emboîtant les unes dans les autres dans l'ordre des viscosités décroissantes. Pour les amener à coïncider à peu près, il faudrait contracter ou dilater les abscisses de quantités considérables, comme si des erreurs tout à fait inadmissibles avaient été commises sur les valeurs absolues des viscosités. Or j'ai opéré avec des liquides purs ou des solutions de concentrations rigoureusement déterminées, dont les températures étaient toujours mesurées, à 0°,1 près.

Pour l'eau, la comparaison avec la courbe de Relf, pour la tranche des abscisses commune à nos deux travaux, ne donne pas un très bon accord: la courbe de Relf, moins rapidement ascendante, coupe la mienne vers $R = 350$, sous un angle notable.

En résumé, mes expériences conduisent à des résultats en désaccord appréciable avec la loi de similitude dynamique, écarts qui me paraissent ne pouvoir être tous attribués à des erreurs de mesures. Si surprenant que paraisse ce désaccord, j'ai préféré publier mes résultats tels que l'expérimentation la plus correcte me les a fournis ⁴⁾.

⁴⁾ Bien que moins nettement exprimée, il m'a semblé qu'une conclusion analogue résultait des nombres publiés dans le mémoire récent de E. G. RICHARDSON (1924) sur les sons éoliens: les fréquences des tourbillons y sont mesurées par les méthodes les plus variées dans l'air, dans l'eau et dans une solution de mélasse, R variant de 32 à 543, et S de 0,09 à 0,30, donc à peu près comme dans mes propres expériences.

Sur l'inexactitude expérimentale, pour les liquides réels, des lois théoriques de Kármán relatives à la stabilité des tourbillons alternés dans un fluide parfait.

Par H. BÉNARD, Paris

Dans leur remarquable Mémoire paru en 1912¹⁾, TH. V. KÁRMÁN et H. RUBACH ont établi les conditions théoriques de stabilité d'une *rue de tourbillons*, c'est à dire de deux files parallèles et indéfinies de tourbillons rectilignes, de même intensité, équidistants, de sens de rotation inverses, les tourbillons de l'une des files étant décalés d'un demi intervalle par rapport à ceux de l'autre. Ils trouvent, h désignant la largeur de la rue, que la seule valeur stable du rapport $\frac{h}{c}$ est 0,283, et que, sauf pour les deux ou trois premières paires de tourbillons pour lesquelles il est plus grand (0,36 pour la première paire), ce rapport atteint très vite sa valeur limite.

Cette loi de stabilité admise, ils montrent que les rapports

$$a = \frac{c}{V} \quad \text{et} \quad b = \frac{c}{D}$$

sont invariables, quel que soit V , pour des obstacles géométriquement semblables. Enfin, ils en déduisent la résistance à l'avancement en fonction des deux constantes mesurables a et b .

Mais ces conclusions n'ont été établies que pour un *fluide parfait* infini, comme si la viscosité, partout négligeable, sauf au voisinage immédiat du corps solide, ne jouait plus aucun rôle, une fois les tourbillons détachés un à un de l'obstacle²⁾; par exemple, il n'est pas tenu compte de l'amortissement progressif des tourbillons à mesure qu'ils vieillissent.

Il est donc peu probable, *a priori*, que ces relations soient encore vraies pour les fluides réels. Il semble d'ailleurs qu'elles n'ont jamais été l'objet de vérifications expérimentales sérieuses. Grâce à la grande précision de ma méthode optique pour repérer chaque centre de tourbillon, mes films constituent d'excellents documents pour contrôler l'exactitude de ces lois dans les liquides réels.

1^o Valeurs réelles du rapport $\frac{h}{c}$. — Déjà les vingt-sept meilleurs clichés fixes donnent 0,44 comme moyenne (extrêmes 0,23 et 0,59). Les films montrent d'abord que ce rapport n'atteint pas sa valeur limite aussi vite que dans la théorie; de plus, le sens des écarts, pour les tourbillons les plus jeunes, écarts d'ailleurs considérables, est en général contraire à celui que prévoit Kármán. Le rapport croît, par exemple, pour quatre films pris parmi beaucoup d'autres: de 0,09 à 0,21; de 0,15 à 0,26; de 0,17 à 0,41; de 0,38 à 0,49.

Pour quelques-uns, rares, le sens de l'écart initial est celui de Kármán, mais alors les variations relatives sont plus faibles. Pour quelques autres, également peu nombreux, la valeur limite est atteinte immédiatement.

Ces valeurs limites varient également beaucoup: moyenne 0,32 (extrêmes 0,13 et 0,49). Elles ne m'ont pas paru liées d'une façon nette aux valeurs de D , L , V et ν , comme si h variait,

¹⁾ *Phys. Zeitschr.* 13, p. 49.

²⁾ Ou plutôt de la couche de tourbillons qui revêt la surface de discontinuité des vitesses: voir PRANDTL, Cong. intern. de Math. à Heidelberg, 1904; et M. BRILLOUIN, *Ann. de Ch. et de Ph.* 23, 1911, p. 148.

d'une course à l'autre, sous l'action de causes accidentelles mal définies (Kármán et Rubach ont remarqué que les fluctuations de h , pour une même course, sont relativement plus grandes que celles de e). Par exemple, on a obtenu de faibles valeurs limites aussi bien pour le liquide le moins visqueux que pour le plus visqueux. Il y a toutefois une indication sur le sens de l'influence de D : les lames les plus étroites ont donné en général des valeurs élevées, et *vice versa*.

2^o *Valeurs réelles de a* . — Mes obstacles n'avaient pas été fabriqués par séries, géométriquement semblables; mais souvent, un même obstacle a servi pour de nombreuses courses, V et v variant. *Exemples des variations de a* :

	Nombre de films	Dimensions de l'obstacle (en cm)	Liquide	Valeurs extrêmes de a
I	14	$L = 2$; $D = 0,208$	Eau pure	0,030 et 0,106
II	7	»	Sol. sucre ($c = 20$)	0,056 » 0,092
III	6	$L = 2$; $D = 0,399$	Eau pure	0,086 » 0,136
IV	4	»	Sol. sucre ($c = 20$)	0,101 » 0,205

3^o *Valeurs réelles de b* . — En désignant le produit VT par e_0 , on a:

$$e = (V - v) T = e_0 (1 - a).$$

Dès 1908, j'avais annoncé que e , pour un obstacle donné, ne dépend pas sensiblement de V , ce qui entraînerait, a étant petit par rapport à l'unité, que e_0 ne dépend pas non plus de V : c'est ce que Kármán a démontré plus tard. Mais je n'avais donné ce résultat de mes expériences que comme une première approximation: la formule que je trouve pour N montre que, pour un obstacle donné, e et par suite b dépendent de V .

Par exemple, dans les quatre séries déjà citées, quand V croît dans les limites de mes expériences, b décroît:

	Valeurs extrêmes de b
I	de 6,77 à 5,81
II	de 7,25 à 6,43
III	de 4,68 à 3,88
IV	de 4,93 à 4,33

Enfin j'avais indiqué que, quand l'épaisseur D varie, e varie dans le même sens, mais moins vite que D : donc b doit décroître nettement, quand D croît, ce que les mesures définitives ont confirmé:

cm	
Pour $D = 0,1$,	b a varié de 9,3 à 15,4
» 0,2,	» 5,3 à 10,2
» 0,4,	» 3,8 à 6,4
» 0,8,	» 3,2 à 5,4

J'ajouterai qu'en prenant le paramètre R comme variable, les valeurs de a et de b , pour un même obstacle, présentent encore des écarts capricieux par rapport à une courbe bien définie, bien moindres toutefois pour b que pour a .

En résumé, les lois de Kármán sont loin de s'appliquer aux tourbillons des liquides réels. Il est possible qu'elles s'appliquent beaucoup mieux aux tourbillons dans un milieu gazeux, au moins en ce qui concerne la valeur du rapport $\frac{h}{e}$ ³⁾.

³⁾ C'est la conclusion d'un travail récent de W. E. BENTON (1926).

Sur une transformation du problème hydrodynamique

Par St. Zaremba, Cracovie

Considérons le problème suivant:

L'espace étant rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, soit \vec{V} un vecteur, fonction donnée des coordonnées de son origine dans un domaine ouvert donné (D) ; on suppose que l'intégrale

$$\int \int \int_{(D)} \vec{V}^2 dx dy dz$$

ait un sens et que chacune des projections orthogonales du vecteur \vec{V} sur les axes des coordonnées soit intégrable dans tout domaine borné inclus dans le domaine (D) . Cela posé, on propose de déterminer une fonction v , harmonique à l'intérieur du domaine (D) , peut-être multiforme à la façon du potentiel électrodynamique d'un système de courants fermés constants, mais admettant un gradient déterminé sans ambiguïté, telle que l'intégrale

$$\int \int \int_{(D)} |\text{grad} \cdot v|^2 dx dy dz$$

soit finie et telle, en outre, que l'on ait

$$\int \int \int_{(D)} |\vec{V} - \text{grad} \cdot v| \cdot |\text{grad} \cdot h| dx dy dz = 0,$$

pour toute fonction h , harmonique dans (D) et telle que l'intégrale

$$\int \int \int_{(D)} |\text{grad} \cdot h|^2 dx dy dz$$

ait un sens.

Dans un mémoire déjà ancien¹⁾ j'ai étudié le problème précédent dans le cas particulier où le vecteur \vec{V} était le gradient d'une fonction donnée et j'ai démontré que, dans ce cas, le problème considéré était toujours possible et qu'il équivalait au problème de DIRICHLET lorsque celui-ci admettait une solution.

En réalité le problème qui nous occupe est, comme je le démontre dans un mémoire qui paraîtra prochainement dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées, toujours possible et, lorsque le vecteur \vec{V} satisfait, dans le domaine (D) , à l'équation

$$\text{div} \cdot \vec{V} = 0, \quad \dots \dots \dots (1)$$

la solution v de ce problème jouit de la propriété suivante: lorsque, dans le voisinage d'un point-frontière A du domaine (D) , la frontière du domaine (D) satisfait à une certaine condition de régularité, la fonction v satisfait dans le voisinage considéré du point A à l'équation suivante:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \alpha \varphi + \beta \psi + \gamma \theta$$

¹⁾ S. ZAREMBA. Sur le principe du minimum. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1909.

où l'on a désigné: par n la normale à la frontière du domaine (D) en un point M , par α , β et γ les cosinus-directeurs de cette normale et par φ , ψ et θ les valeurs périphériques en M des projections orthogonales du vecteur \vec{V} sur les axes des coordonnées.

D'après ce qui précède, le problème énoncé au début peut être considéré, lorsque la condition (1) est remplie, comme le résultat d'une transformation du problème hydrodynamique. L'intérêt de cette transformation consiste en ce qu'elle substitue au problème hydrodynamique classique un problème qui conserve un sens et qui est possible même au cas où le domaine (D) ne satisfait pas aux conditions de régularité qui doivent être remplies pour que le problème classique puisse être posé. J'ajoute que les considérations que développe M. BOULIGAND dans son beau mémoire «Sur les applications de la notion de flux et sur le calcul de la variation infinitésimale des fonctions de GREEN et de NEUMANN», mémoire en voie de publication dans le «Bulletin des Sciences mathématiques» et dont les épreuves m'ont été gracieusement communiquées par l'auteur, reposent en partie sur le théorème selon lequel le problème énoncé au début de cette communication est toujours possible.

An Experiment on the Behaviour of Two Vortices in Water

By S. Fujiwhara, Tokyo

(See Plates XXVIII and XXIX)

Five years ago, the present author published a note on the amalgamation of two vortices (whirls) of the same sense of rotation and the separation of those with the different senses¹⁾. This fact was first found by T. OKADA 26 years ago with respect to cyclones and anticyclones and was known as Okada's law among Japanese meteorologists. D. NUKIYAMA made an experiment with two vortices fixed at their own positions and found that the mutual force exerted between them when their senses of rotation are same is repulsive, so far as the viscosity of the liquid used is small²⁾. With the increase of viscosity the force attains a maximum and then decreases on to no force. At last an attractive force sets in instead of repulsion under higher viscosities.

From the theoretical point of view K. TERAZAWA³⁾ and C. W. OSEEN⁴⁾ have proved the attraction existing between two coaxial vortical filaments in viscous fluid.

For the present the author brings some photographs and films before the Congress, in which the behaviour of vortices is shown as seen on the surface of water and also seen from the side.

From this experiment it becomes clear that the vortices with different sense of rotation approach rather quickly, but never amalgamate. They go away from each other, or unite end on end forming at last a continuous filament, or destroy each other when forced to be too near. Those two vortices with the same sense of rotation approach rather slowly, and always amalgamata into one.

A very curious fact is that two vortex filaments of nearly equal intensity, say A and B , when they are brought to cross over, are cut into two pieces each, and one of the pieces from A unites with a piece from B , end on end, forming a half ring and travells off. While the remaining two pieces from A and B amalgamate side by side. This phenomenon takes place only under favourable conditions.

From several photographs (Plates XXVIII and XXIX) taken by the present author, S. YAZIMA and M. TAMANO read off the relative velocities in radial and tangential components of the centers of vortices and calculated the relative acceleration between them. By assuming the constant intensity of vortices during their motions and taking analogy from the law of the mass attraction, they arrive at a conclusion that the force between two vortices of the same sense of rotation acts as $1/r^n$, where r is the distance between the centers. n seems to lie between 2 and 4, but they could not determine its exact value. Because the disturbance from a slight precessional motion of the vortices could not be eliminated in the experiment. No tangential force is proved to exist. The details of the experiment and calculation will appear as a publication of the Central meteorological Observatory, Tokyo. The further experiment is carried on in the Imperial University, Tokyo. Sept. 1926.

¹⁾ S. Fujiwhara: Quarterly Journ. Roy. Meteorol. Soc. 1923.

²⁾ D. Nukiyama: Japanese Journ. Astr. and Geophysics, 1925.

³⁾ K. Terazawa: Japanese Journ. of Physics, 1924.

⁴⁾ C. W. Oseen: Arkiv for Math., Astr. och Fysik.

La formation des discontinuités dans les fluides

Par J. Hadamard, Paris

Outre les *ondes*, c'est-à-dire les discontinuités qui se propagent et qui ne peuvent d'ailleurs exister que dans les gaz, les fluides, compressibles ou non, peuvent présenter dans leurs mouvements des discontinuités stationnaires (*ondes-cloisons* de DUHEM), c'est-à-dire affectant constamment les mêmes molécules. Ces dernières discontinuités peuvent aller jusqu'au *glissement absolu* ou glissement de la surface mitoyenne sur elle-même, dans lequel chaque molécule de la portion 1 du milieu située sur cette surface vient en contact successivement, au cours du temps, avec diverses molécules de la portion 2 faisant partie de cette même surface. Si, pour nous permettre de suivre le phénomène, nous isolons par la pensée, à un premier instant t_0 , des files continues de molécules telles que celles qui sont représentées sur la figure 1, les mêmes files prendront, à un instant suivant, une apparence telle que celle qui est représentée par la figure 2.

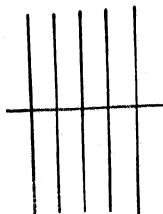


Fig. 1.

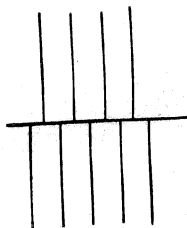


Fig. 2.

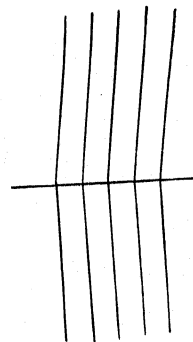


Fig. 3.

On sait que des glissements de cette nature jouent un rôle important dans plusieurs questions d'Hydrodynamique. Ils ont fourni la seule explication que l'on ait pu trouver pour la résistance d'un fluide au mouvement d'un solide et pour la possibilité d'écoulements en présence d'obstacles anguleux.

Mais, comme je l'ai montré précédemment¹⁾, cette explication demande à être complétée: car, si la *persistance* de pareils glissements, une fois établis, se conçoit sans difficulté, il n'en est pas de même de leur naissance. Celle-ci, dans un milieu où ils ne persisteraient pas jusqu'à un certain moment, ne pourrait avoir lieu sans que, au préalable, quelque autre phénomène se soit produit, mettant déjà en défaut les lois de l'Hydrodynamique classique.

La nature de ce premier phénomène troublé est d'ailleurs suggérée par celle même des questions mentionnées tout à l'heure, et auxquelles notre explication doit s'appliquer: tout fait présumer qu'il doit se produire un commencement de *cavitation*, immédiatement arrêté, dans les instants qui suivent, par une irruption turbulente du fluide dans la cavité qui a tendu à s'ébaucher. L'exactitude de cette vue est aujourd'hui pleinement confirmée par une série d'expériences de M. CAMICHEL dans lesquelles les photographies montrent nettement un décollement initial, suivi presque immédiatement d'un rappel violent exercé par le vide ainsi créé sur les molécules voisines. C'est seulement après ces phases préliminaires que peuvent s'établir les «sillages» dont l'étude est aujourd'hui classique.

Les glissements dont nous venons de parler ne sont pas les seules discontinuités stationnaires qui puissent se présenter. Sans être *absolue*, c'est-à-dire sans porter sur les fonctions $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ elles mêmes, la discontinuité peut affecter leurs dérivées

¹⁾ *Comptes Rendus Ac. Sc. Paris* t CXXXVI, p. 299; *Leçons sur la propagation des Ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, Paris, Hermann, 1903 (Note II).

et produire une déformation du premier, du second ordre, etc., de l'une des régions par rapport à l'autre, suivant l'ordre des premières dérivées qui subissent des variations brusques au passage de la surface de discontinuité. Les lignes idéales tracées dans le fluide à l'instant t_0 et représentées sur la figure 1 auront, à un instant ultérieur, une forme telle que celle représentée par la figure 3 si la discontinuité est du premier ordre; leur courbure seule sera devenue discontinue, s'il y a discontinuité du second ordre, etc.

Il s'agit d'ailleurs toujours de discontinuités stationnaires. Rappelons que les lois qui gouvernent ce cas sont ²⁾ un peu différentes de celles qui régissent les ondes. A un instant déterminé quelconque, les « conditions identiques » ³⁾ sont vérifiées dans un cas comme dans l'autre et il existe en particulier un vecteur (λ, μ, ν) qui gouverne les variations brusques des dérivées de x, y, z par rapport à a, b, c , c'est-à-dire les discontinuités de déformation. Si, par exemple, la discontinuité est du premier ordre, ces variations brusques, pour les neuf dérivées $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \dots$

$\frac{\partial s}{\partial c}$, seront données par les formules

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial x}{\partial a} \right] &= \lambda \alpha, & \left[\frac{\partial x}{\partial b} \right] &= \lambda \beta, & \left[\frac{\partial x}{\partial c} \right] &= \lambda \gamma, \\ \left[\frac{\partial y}{\partial a} \right] &= \mu \alpha, & & & & \\ \left[\frac{\partial s}{\partial a} \right] &= \nu \alpha, & & & \left[\frac{\partial s}{\partial c} \right] &= \nu \gamma. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface de discontinuité supposée tracée dans l'état (a, b, c) et dirigée du côté de la région x .

Mais (contrairement à ce qui a lieu pour les ondes), lorsque la discontinuité du premier ordre est stationnaire, elle ne porte point sur les dérivées premières prises par rapport au temps (c'est-à-dire sur les composantes de la vitesse): les premières dérivées impliquant différen-

tiation par rapport au temps qui soient discontinues sont les dérivées secondes $\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t}, \dots, \frac{\partial^2 s}{\partial c \partial t}$.

On peut d'ailleurs immédiatement calculer leurs variations brusques, ainsi que celles des dérivées correspondantes $\frac{\partial^{k+1} x}{\partial a \partial t^k}, \dots, \frac{\partial^{k+1} s}{\partial c \partial t^k}$, c'est-à-dire de toutes celles qui, avec un nombre quelconque de différentiations par rapport au temps, comportent une seule différentiation dans l'espace. Il suffit de différencier les formules précédentes (1') par rapport t en laissant a, b, c constants, comme on peut le faire puisqu'il s'agit d'une discontinuité stationnaire. α, β, γ étant eux mêmes constants dans ces conditions, on voit que l'on a

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t} \right] &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} \cdot \alpha, & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial b \partial t} \right] &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} \cdot \beta, & \dots & \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \dots & & \dots & & \left[\frac{\partial^2 s}{\partial c \partial t} \right] &= \frac{\partial \nu}{\partial t} \cdot \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1')$$

c'est-à-dire que les discontinuités subies par les dérivées en question $\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t}$, etc. dépendent de la variabilité du segment (λ, μ, ν) en fonction du temps.

²⁾ Voir nos *Leçons sur la Propagation des Ondes*, Chap. II.
³⁾ *Loc. cit.*, § 2.

On aurait des formules toutes semblables si la discontinuité de déformation à chaque instant était d'un ordre supérieur n : elle serait encore gouvernée par un vecteur (λ, μ, ν) , dont la variabilité par rapport au temps ferait connaître les variations brusques des dérivées d'ordre $n + k$ (où $k = 1, 2 \dots$) prises k fois par rapport au temps.

Or les discontinuités ou *glissements différentiels* dont nous venons de parler posent une question toute semblable à celle qui se posait pour les glissements absolus. Peuvent-ils exister dans les fluides parfaits soumis aux lois de l'hydrodynamique, et peuvent-ils prendre naissance à partir d'un instant quelconque t_0 s'ils préexistaient jusqu'à cet instant?

La réponse est toute semblable à celle qui s'applique aux glissements absolus, et en fait comprendre la raison véritable. Nous allons voir que, pour les glissements différentiels, elle dérive immédiatement du théorème classique des tourbillons.

Pour nous en rendre compte, commençons par noter que dans une discontinuité de l'espèce considérée, c'est-à-dire dans une discontinuité hydrodynamique stationnaire, la déformation de l'une des deux régions par rapport à l'autre a nécessairement lieu sans dilatation, même s'il s'agit d'un gaz. Un changement brusque de densité devrait en effet s'accompagner d'une discontinuité de pression, ce qui ne peut se produire que dans une onde de choc, et non dans une discontinuité stationnaire. Le vecteur (λ, μ, ν) caractéristique de la discontinuité est donc tangentiel.

Cela posé, si nous pouvions prendre pour état initial l'état du milieu à un instant arbitrairement considéré t_0 , les composantes du tourbillon seraient

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial b \partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial c \partial t} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial c \partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial t} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a \partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial t} \right) \quad \dots \quad (2)$$

et, par conséquent, leurs discontinuités seraient données par les formules (1'), c'est-à-dire dépendraient de la variabilité du vecteur (λ, μ, ν) en fonction du temps. Il en résulterait immédiatement que, le tourbillon étant supposé continu, le vecteur (λ, μ, ν) , supposé nul à un instant déterminé quelconque, doit le rester indéfiniment.

C'est bien à cette conclusion que nous allons arriver; mais les choses sont un peu moins simples, parce que l'état (t_0) que nous venons de considérer comme initial est relatif à l'instant unique t_0 et devrait, si l'on voulait raisonner de même à un instant ultérieur, être remplacé par un autre, lequel peut même, jusqu'à preuve du contraire, être en déformation discontinue par rapport au premier.

Voici comment nous allons raisonner. Considérons l'état (x', y', z') à un instant $t' = t_0 + \tau$. Il dérive de l'état (t_0) (ou (x, y, z)) par une déformation qui, dans la région 1, et au voisinage d'un point déterminé M de la surface de discontinuité, est une déformation affine

$$\left. \begin{aligned} dx' &= A \, dx + B \, dy + C \, dz \\ dy' &= A' \, dx + B' \, dy + C' \, dz \\ dz' &= A'' \, dx + B'' \, dy + C'' \, dz \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

et qui, d'autre part, au même point M , subit au passage de la discontinuité, une variation brusque caractérisée par un certain vecteur (L, M, N) . D'autre part, nous pouvons rapporter l'état à chacun des instants t_0, t' à un état initial fixe (o) choisi une fois pour toutes: soient alors $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0), (\lambda, \mu, \nu)$ les vecteurs caractéristiques de la discontinuité de déformation, dans ces conditions, l'un à l'instant t_0 , l'autre à l'instant t' . Nous avons besoin d'obtenir la relation qui existe entre ces deux vecteurs et le vecteur (L, M, N) .

Imaginons qu'on fasse subir à chacun des états (o), (t_0) une déformation qui amène la région 1 à l'état 1' où elle se trouve à l'instant t' et qui, d'autre part, soit continue, tout au

moins dérivées premières comprises. La région 2 sera amenée, dans le premier cas, à un état (II), dans le second, à un état (II'), tandis qu'à l'instant t' , elle est, en réalité, dans un état 2'. Au point M , l'état 2' dérive de l'état II par une déformation affine caractérisée ⁴⁾ par le vecteur (λ, μ, ν) et de l'état II' par une déformation affine laissant toujours invariable le même plan (le plan tangent à la surface de discontinuité à l'instant t'), et caractérisée par le vecteur (L, M, N) . Quant à la déformation qui fait dériver II' de II, son vecteur caractéristique est évidemment celui qui se déduit de $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ par l'affinité (3), soit

$$(A\lambda_0 + B\mu_0 + C\nu_0, A'\lambda_0 + B'\mu_0 + C'\nu_0, A''\lambda_0 + B''\mu_0 + C''\nu_0).$$

D'après ce qui précède, ces trois déformations sont sans dilatation, c'est-à-dire sans composante normale: les trois vecteurs correspondants sont tangents à la surface de discontinuité.

Or, des déformations affines, de même plan invariable et sans composante normale, se composent en composant purement et simplement leurs vecteurs caractéristiques ⁵⁾: c'est ce que l'on voit immédiatement en prenant pour plan des x, y le plan invariable, et qu'un calcul direct donnerait, au surplus, sans difficulté en axes quelconques.

Donc on a

$$\begin{aligned}\lambda &= L + A\lambda_0 + B\mu_0 + C\nu_0, \\ \mu &= M + A'\lambda_0 + B'\mu_0 + C'\nu_0, \\ \nu &= N + A''\lambda_0 + B''\mu_0 + C''\nu_0.\end{aligned}$$

Dérivons par rapport à t' , puis faisons $t' = t_0$, en supprimant les indices 0 devenus inutiles: il vient, finalement, à l'instant t_0

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \lambda + \frac{\partial B}{\partial t} \mu + \frac{\partial C}{\partial t} \nu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial A'}{\partial t} \lambda + \frac{\partial B'}{\partial t} \mu + \frac{\partial C'}{\partial t} \nu, \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial A''}{\partial t} \lambda + \frac{\partial B''}{\partial t} \mu + \frac{\partial C''}{\partial t} \nu.\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Or la saute de tourbillon dérive du vecteur (L, M, N) par le jeu des formules (1'): ses composantes à l'instant t_0 considéré sont (en désignant par (α, β, γ) la normale à la discontinuité à l'instant t)

$$[\xi] = \frac{1}{2} \left(\beta \frac{\partial N}{\partial t} - \gamma \frac{\partial M}{\partial t} \right), \quad [\eta] = \frac{1}{2} \left(\gamma \frac{\partial L}{\partial t} - \alpha \frac{\partial N}{\partial t} \right), \quad [\zeta] = \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\partial M}{\partial t} - \beta \frac{\partial L}{\partial t} \right) \dots (5)$$

c'est-à-dire, géométriquement, qu'on l'obtient en prenant la composante tangentielle du vecteur $\left(\frac{\partial L}{\partial t}, \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial t} \right)$ et la faisant tourner d'un angle droit, dans le sens direct, autour de la normale à la surface.

Si donc on suppose que le tourbillon soit initialement nul ou, plus généralement, continu — et que, par conséquent, il le reste dans tout le cours du mouvement — les composantes λ, μ, ν

⁴⁾ Voir nos *Leçons sur la propagation des Ondes*, N° 52. Pour abrégé, nous appelons ici « plan invariable » un plan dont tous les points restent inaltérés par la transformation.

⁵⁾ Il suffit même, pour qu'on puisse appliquer cette manière de faire au produit de deux déformations affines de même plan invariable, que le premier facteur soit sans dilatation.

du vecteur de déformation, pour une molécule donnée de la surface de discontinuité, doivent vérifier les deux équations linéaires

$$\frac{\frac{\delta\lambda}{\delta t} - \left(\frac{\delta A}{\delta t}\lambda + \frac{\delta B}{\delta t}\mu + \frac{\delta C}{\delta t}\nu\right)}{\alpha} = \frac{\frac{\delta\mu}{\delta t} - \left(\frac{\delta A'}{\delta t}\lambda + \frac{\delta B'}{\delta t}\mu + \frac{\delta C'}{\delta t}\nu\right)}{\beta} = \frac{\frac{\delta\nu}{\delta t} - \left(\frac{\delta A''}{\delta t}\lambda + \frac{\delta B''}{\delta t}\mu + \frac{\delta C''}{\delta t}\nu\right)}{\gamma}$$

Comme, de plus, on a la condition

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$$

qui exprime que la discontinuité est tangentielle, cela fait en tout trois équations linéaires distinctes, deux différentielles et une en termes finis, pour définir les quantités λ , μ , ν , ou deux équations différentielles linéaires, à coefficients que nous pouvons supposer bornées et continus, pour définir deux d'entre elles.

Donc, si la déformation est continue au premier ordre à un instant déterminé quelconque (c'est-à-dire si λ , μ , ν sont nuls à cet instant) elle restera continue dans la suite: la discontinuité stationnaire du premier ordre ne peut pas se créer plus que ne le pouvait la discontinuité absolue.

Les deux résultats sont évidemment parents l'un de l'autre; et le fait que le second d'entre eux, — celui dont nous venons de nous occuper — dérive directement, comme nous le voyons, du théorème classique de la conservation du tourbillon, jette, semble-t-il, un jour nouveau sur le résultat obtenu précédemment et relatif aux discontinuités absolues.

Notons encore que le calcul précédent s'étendrait de lui-même à un glissement d'ordre différentiel quelconque n : il faudrait alors raisonner sur les dérivées $(n-1)^{\text{èmes}}$ du tourbillon, les premières qui soient discontinues, et dont les discontinuités sont régies par trois quantités X , Y , Z , composantes d'un vecteur qu'on peut appeler «vecteur caractéristique de la saute de tourbillon»: c'est ce vecteur qui est lié au vecteur caractéristique de la discontinuité et à son dérivé par rapport au temps par des formules toutes semblables à (4), (5).

Sur les singularités des mouvements fluides

Par D. RIABOUCHINSKY, Paris

1. — Dans la théorie de la résistance des fluides de HELMHOLTZ et KIRCHHOFF, et dans celle d'OSEEN et ZEILON, on admet qu'un sillage indéfini accompagne le solide et que le mouvement du fluide reste permanent par rapport aux axes liés à ce solide. La manière dont, dans ces deux théories, le fluide se comporte à l'infini, mérite d'être examinée attentivement. Il ne faut pas oublier, en effet, qu'on ne peut concevoir une masse fluide indéfinie qu'autant que limite d'un volume fluide déterminé, dont on augmenterait, en pensée, indéfiniment les dimensions. Imaginons, par exemple, qu'un corps cylindrique de section S décrit une trajectoire circulaire dans un volume fluide ayant la forme d'un tore (fig. 1a). Ce mouvement est com-

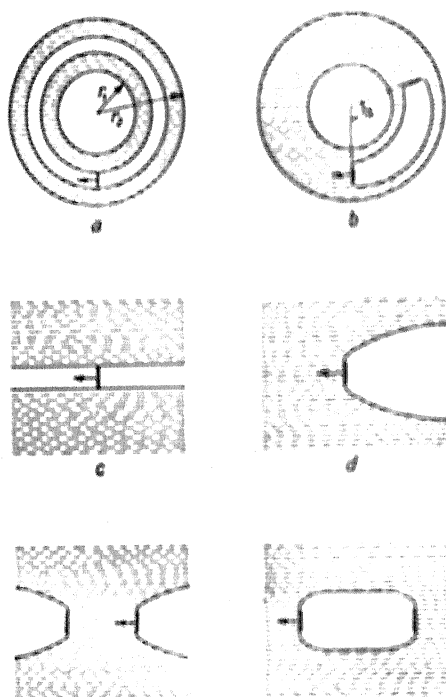


Fig. 1.

patible avec l'hypothèse que le mouvement du fluide reste indéfiniment permanent par rapport aux axes liés au solide. Si l'on fait croître indéfiniment toutes les dimensions de ce système sauf celles de la section S , on obtiendra le mouvement plan d'un fluide illimité autour d'un solide de section S animé d'un mouvement de translation.

Si, dans le cas d'un volume fluide de dimension finie, on prolonge le sillage arrière, on aboutira nécessairement à la configuration de la fig. 1a et, par conséquent, dans le cas d'un volume fluide indéfini à la configuration indiquée sur la fig. 1c. C'est une forme possible de mouvement glissant, l'eau morte étant comprise entre deux droites parallèles, mais ce n'est pas celle que l'on considère dans la théorie de Helmholtz et Kirchhoff. Pour obtenir cette dernière forme de mouvement, prenons deux obstacles réunis par des surfaces de discontinuité (fig. 1b) et admettons que lorsqu'on fait croître le volume fluide, l'angle α , qui caractérise la position mutuelle des obstacles ne varie pas et que l'observateur conserve une position fixe par rapport à l'un des solides et s'éloigne, par conséquent, de l'autre. Lorsqu'on fait croître

le volume indéfiniment, on obtient, dans ce cas, des surfaces de glissement de HELMHOLTZ et KIRCHHOFF se prolongeant jusqu'à l'infini, mais, en raison de ce qui vient d'être dit, ces surfaces de glissement peuvent être interprétées comme se refermant à l'infini sur un deuxième obstacle. Selon la manière dont on fait varier l'angle α en effectuant le passage à la limite, on peut obtenir aussi les deux dernières formes de mouvement indiquées sur la fig. 1. La distance entre les obstacles étant arbitraire, on peut la choisir de façon que la pression de la zone morte soit égale à la dépression que l'on observe derrière l'obstacle dans les fluides réels et faire correspondre au deuxième obstacle — un obstacle fictif représentant l'effet global du frottement et des chocs qui, en provoquant une dissipation d'énergie, déterminent la résistance des fluides réels. Les vitesses de glissement que l'on observe dans le voisinage des arêtes des obstacles sont toujours considérablement plus grandes que la vitesse générale du courant.

Il serait intéressant de discuter, en se plaçant au point de vue exposé plus haut, la théorie d'OSÉEN et ZEILON. N'aboutirait-on pas, dans ce cas, pour une viscosité évanouissante, à la forme triviale de mouvement indiquée sur la fig. 1c?

2. — Les belles méthodes de LEVI-CIVITA et H. VILLAT et les recherches récentes de THIRY et POOLE permettent de traiter d'une façon rigoureuse les problèmes les plus difficiles de la théorie des mouvements glissants à deux dimensions. Au contraire, la théorie, même approchée, des mouvements glissants à trois dimensions a été, comparativement, peu discutée.

Si l'on connaît la fonction de STOKES correspondant au mouvement d'un solide dont la forme dépend de n paramètres arbitraires et si l'on choisit ces paramètres de façon à ce que, sur la partie S_0 de la surface du solide, la vitesse reste approximativement constante, la surface S_0 peut être considérée, approximativement, comme surface de glissement. Considérons

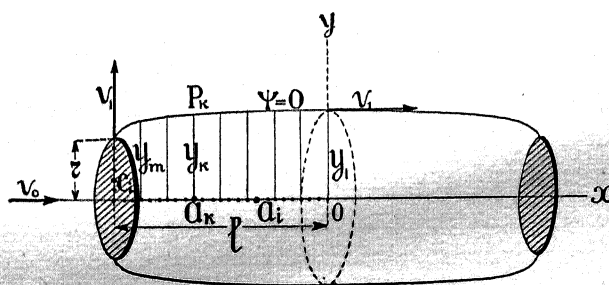


Fig. 2.

comme exemple le mouvement d'un liquide autour de deux disques dont les arêtes sont réunies par des surfaces de glissement (fig. 2) et prenons la fonction de courant sous la forme

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} V_0 y^2 + \sum_1^n A_i \left(\frac{x - \alpha_i}{\sqrt{(x - \alpha_i)^2 + y^2}} - \frac{x + \alpha_i}{\sqrt{(x + \alpha_i)^2 + y^2}} \right)$$

et comme inconnues les ordonnées y_k de la surface de glissement, la vitesse de glissement v_1 , et les coefficients A_i . Les équations qui les déterminent peuvent être choisies, par exemple, comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \psi(a_k, y_k) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \\ \psi(l, c_i) &= 0, \quad u(l, c_i) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(l, c_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \\ u(l, 0) &= 0, \quad \psi(l, r) = 0, \quad u(l, r) = 0, \quad v(l, r) = v_1, \quad m + 3p + 4 = n + 1 \end{aligned} \right\} \dots \quad (I)$$

$$(v^2 + v^2)_{a_k} y_k = v_1^2, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

Les équations (1) sont linéaires par rapport aux coefficients A_1, A_2, \dots, A_n et la vitesse v_1 et permettent d'éliminer facilement ces quantités des équations (2). On obtient ainsi m équations où ne figurent que les m ordonnées y_k . Ces dernières équations sont très compliquées, mais la recherche de la solution qui nous intéresse est facilitée par le fait que nous savons a priori que la surface de glissement doit être approximativement de la forme indiquée sur le schéma 2. En posant dans les équations (2)

$$y_k = b_k (1 + \varepsilon_k),$$

où b_k sont les valeurs approchées que l'on aura choisies, en développant les équations (2) et en omettant les carrés et produits des petites quantités ε_k , on obtient m équations linéaires qui détermineront ces quantités. En répétant cette opération, on trouvera, par approximation successive, les valeurs des ordonnées y_k . Cette méthode approchée peut être appliquée à de nombreux problèmes et l'on pourra aussi choisir d'autres fonctions de courant. Cette méthode peut aussi servir à l'établissement d'une méthode rigoureuse.

Si, en résolvant les équations (2) par rapport aux quantités v_k , on obtenait des valeurs plus grandes que 1, il faudrait en conclure que le choix des valeurs approchées b_k , ou celui de la fonction de courant, était défectueux.

3. L'hypothèse des sillages s'étendant à l'infini a été introduite pour permettre de traiter le mouvement comme permanent lorsque la vitesse du courant à l'infini dépasse la vitesse critique déterminant, dans le mouvement continu irrotationnel, l'apparition de pressions négatives à la surface du solide. On doit renoncer à cette simplification si l'on veut se conformer à toutes les restrictions imposées par l'Hydrodynamique rationnelle. Au-delà de la vitesse critique, le mouvement d'un fluide parfait ne peut être que non permanent et même, probablement, que *turbulent*, car des singularités très complexes devront nécessairement s'accumuler derrière l'obstacle. La turbulence n'est pas une forme de mouvement des fluides visqueux exclusivement. Ce résultat est déjà implicitement contenu dans une remarque faite par HADAMARD dans la Note II de son ouvrage «Sur la propagation des ondes» (1903).

Remarquons encore, qu'au-delà de la vitesse critique, la résistance éprouvée par le solide dans un fluide parfait ne sera plus nécessairement nulle, car l'énergie du fluide pourra augmenter en même temps que la zone de turbulence derrière l'obstacle et les cavités, en se refermant, peuvent déterminer une dissipation immédiate d'énergie indépendante de la viscosité.

4. Le cas le plus simple d'une cavitation, celle qu'on produirait en anéantissant un corps sphérique immergé dans une masse liquide, dénuée de poids et soumise à l'infini à une pression constante, a été discuté par BESANT et LORD RAYLEIGH. On peut généraliser ce problème en admettant que la cavité est produite par la dilatation ou la contraction d'une enveloppe sphérique et que, par conséquent, à l'instant où la cavité apparaît, la vitesse sur la surface de pression nulle a une valeur positive ou négative quelconque. La loi générale du mouvement s'exprime en fonctions elliptiques.

H. LAMB a étudié le cas où la cavité sphérique renferme un gaz.

Le problème plan présente des singularités intéressantes. Soient R le rayon de la cavité S à l'instant t , R_0 et $\frac{dR_0}{dt}$ le rayon et la vitesse initiales, R_c le rayon maximum, r la distance d'un élément fluide au centre et r_1 le rayon de la surface cylindrique limitant le

fluide extérieurement. En appliquant le théorème des forces vives et en supposant que le rayon r_1 est suffisamment grand, on peut écrire

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{a^2 \left(\frac{R_1^2}{R^2} - 1 \right)}, \quad a^2 = \frac{p_0}{\rho \log r_1} \dots \dots \dots (1)$$

Si l'on engendre la cavité en anéantissant un cylindre de rayon R , immergé dans le liquide et le rayon r_1 est infiniment grand, la vitesse de contraction $\frac{dR}{dt}$ restera toujours infiniment petite. La cavité ne se referme pas. Ce curieux résultat avait été déjà signalé par BASSET. (*A Treatise on Hydrodynamics*, Vol. I, p. 135; 1888.)

Supposons maintenant qu'en dépensant une énergie infinie, on obtienne à l'instant initial une vitesse d'expression finie ou bien que la pression p_0 est de l'ordre de grandeur de $\log r_1$. En intégrant (1), on obtient comme loi générale du mouvement

$$R = \sqrt{R_0^2 + 2R_0 \frac{dR_0}{dt} t - a^2 t^2}$$

Dans le cas où $a^2 = 0$, la cavité cylindrique, une fois apparue, augmentera ensuite indéfiniment.

B. DEMTCHENKO a étudié le mouvement d'un liquide pesant dans des tubes en rattachant ce problème à celui des cavitations planes. Il a aussi démontré qu'une cavitation ellipsoïdale ne pouvait se contracter en conservant la forme d'un ellipsoïde.

J'ai démontré que les cavitations sphériques, cylindriques circulaires et planes sont les seules possibles pour lesquelles les surfaces de pression constante restent des surfaces équipotielles.

5. Le problème général des cavitations consiste à déterminer la forme et le mouvement d'une surface de pression constante S limitant une cavité C à l'instant t , connaissant la forme et le mouvement initial de cette surface, la loi générale du mouvement et la déformation des corps P dont les parois limitent le fluide intérieurement et extérieurement et en tenant compte

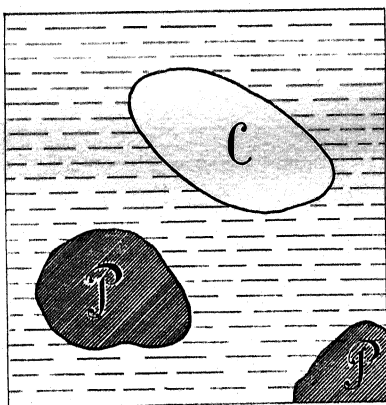


Fig. 3.

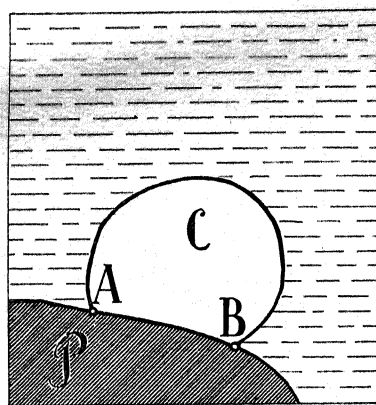


Fig. 4.

des forces agissant sur l'unité de masse (fig. 3 et 4). Formulé ainsi ce problème renferme comme cas particulier celui des mouvements ondulatoires d'un fluide pesant.

On exprime généralement la condition qu'une surface $F(x, y, z, t) = 0$ est une surface fluide en écrivant qu'à tout instant t

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Nous exprimerons cette condition sous la forme de *conditions initiales*:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{dV}{dt}\right)_{t=t_0} = 0, \dots \dots \dots (1)$$

où, si le mouvement est irrotationnel,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{dc_1}{dt} \frac{\partial}{\partial c_1} + \dots + \frac{dc_n}{dt} \frac{\partial}{\partial c_n} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Les paramètres c_1, c_2, \dots, c_n déterminent le mouvement et la déformation des parois Σ limitant le fluide et sont des fonctions données du temps.

Prenons le potentiel des vitesses sous la forme

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1(t-t_0) + \frac{1}{2} \varphi_2(t-t_0)^2 + \dots \dots \dots (2)$$

Connaissant la forme et le mouvement des surfaces S et Σ à l'instant t_0 , on peut calculer la fonction φ_0 . Ensuite en raison de l'équation des pressions,

$$\frac{\rho}{\rho} = - \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} - \dots - \frac{\partial \varphi}{\partial c_n} \frac{dc_n}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} v^2 + U + f(t),$$

les valeurs initiales de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ sur S et, par conséquent, en admettant, qu'en tout point des surfaces

Σ , $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0$, la fonction φ_1 . De même les équations (1) donneront les valeurs initiales de

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}, \dots$ sur S et l'on pourra calculer de proche en proche les fonctions harmoniques $\varphi_2, \varphi_3, \dots$. La série (2) que l'on obtient ainsi satisfait formellement aux conditions du problème, mais il faudra s'assurer, dans les applications, de sa convergence. La méthode que nous venons d'exposer permet d'entreprendre l'étude d'un grand nombre de nouveaux et importants problèmes.

6. Dans l'étude des cavitations il faut tenir compte, dans certains cas, de la cohésion des liquides.

YOUNG et LAPLACE avaient déjà indiqué que les liquides sont capables de soutenir des pressions négatives de plusieurs atmosphères. OSBORN REYNOLDS a étudié dans quelles conditions un liquide soutenant une pression négative se détachait de la paroi. Il a observé qu'il suffisait quelquefois du moindre défaut d'homogénéité du mercure, pour que la cavité prenne naissance non au bout fermé du tube du baromètre, mais dans la colonne de mercure.

Dans les fluides réels il faudra également tenir compte de l'influence de la viscosité. PRANDTL et SMOLUCHOWSKI ont signalé dès 1904 l'influence que le frottement peut exercer sur le décollement des fluides.

Une étude expérimentale systématique des phénomènes qui accompagnent la mise brusque en mouvement relatif d'un fluide et d'un solide présenterait un grand intérêt. Il y a lieu de distinguer le cas où l'on fait varier la vitesse du solide, mais non celle du courant, du cas où l'on fait varier la vitesse du courant tandis que le corps reste fixe.

Dans un travail que j'ai effectué en 1909 j'ai étudié la mise brusque en mouvement relatif d'un cylindre dans un liquide en disposant l'appareil enregistreur sur un radeau descendant le courant d'une rivière avec la vitesse du courant jusqu'à une traverse en bois qui arrêtait brusquement le radeau.

BURGERS a obtenu une série de très intéressantes photographies de tourbillons, ou plutôt de source-tourbillons, produits par la mise brusque en mouvement d'un plan mince dans un liquide.

7. Je m'arrêterai, en dernier lieu, succinctement, sur le problème de changement de régime et de la turbulence dans les fluides réels. On observe deux formes caractéristiques de mouvements tourbillonnaires. D'une part les *tourbillons libres*, tels que les lignes de tourbillon du mouvement rotationnel laminaire ou bien aussi les tubes et anneaux-tourbillon de HELMHOLTZ, BÉNARD et EDEN qui, en se déplaçant, restent, en général, orthogonaux à la vitesse du courant, et dont l'apparition peut être rattachée à celle de diminutions locales brusques de pression ¹⁾.

D'autre part les *tourbillons liés*; ces derniers tourbillons prennent naissance soit sur la paroi limitant le fluide, soit sur la surface libre, soit sur la paroi ou au-devant du solide et conservent une position plus ou moins fixe par rapport au solide. Le ou les bouts libres, si tels il y a, de ces tourbillons se confondent d'abord avec les lignes de courant et se perdent ensuite dans la turbulence du mouvement.

Dans une communication que j'ai faite au Congrès International de Navigation Aérienne à Bruxelles en 1925 j'ai formulé l'hypothèse que les changements de régime que l'on observe dans les fluides sont provoqués par l'apparition de *tourbillons liés*.

Par exemple, dans l'expérience de Reynolds, selon mon hypothèse, la turbulence est provoquée et entretenue par des mouvements tourbillonnaires spiraliformes se formant sur les parois de l'entonnoir du tube.

Selon le caractère des tourbillons libres qui se transforment en tourbillons liés, il pourra y avoir deux ou mêmes plusieurs changements de régime avec vitesses critiques correspondantes. Dans le travail que je viens de citer j'ai décrit quelques expériences à l'appui de cette hypothèse et voudrais faire quelques remarques complémentaires à propos de l'une de ces expériences.

La fig. 5 représente le spectre d'un plan incliné placé sur un plan horizontal en tôle disposé au milieu du tunnel et recouvert d'une feuille de papier noir saupoudrée de lycopode. La fig. 6 représente un spectre obtenu dans des conditions semblables, mais en donnant un seul coup sec sur l'un des bords du plan en tôle. Comment expliquer l'apparition des lignes de courant dans ce cas? D'après mon hypothèse l'ébranlement qu'on communique au plateau détermine un changement de régime dans la couche superficielle et l'apparition momentale de tourbillons liés, contournant l'arête antérieure du plateau et dont la rotation change alternativement de signe sur toute la largeur du plateau.

Il est possible que dans l'expérience des cylindres concentriques de TAYLOR, pour une vitesse de rotation se rapprochant de la vitesse critique, un ébranlement brusque de l'appareil pourrait aussi provoquer l'apparition momentanée des tourbillons du deuxième régime.

Les figures 7 ont été obtenues en communiquant un ébranlement vif au plateau lorsque la vitesse du courant était respectivement 2—3 m/sec et 5—6 m/sec. Ces spectres font voir que le produit du diamètre des tourbillons par la vitesse du courant conserve approximative-

¹⁾ Il est facile de se rendre compte que, dans un fluide illimité de faible viscosité cinématique, les tourbillons alternés ne peuvent pas prendre naissance derrière un plan suffisamment mince orthogonal au courant. La théorie de la résistance de v. KÁRMÁN ne peut donc pas être appliquée au plan mince orthogonal. Mes recherches sur les mouvements pendulaires sont en bon accord avec cette remarque — les mouvements pendulaires ne se produisent que si la plaque a une certaine épaisseur. (L'Aérophile, 1^{er} Janvier 1911).

ment la même valeur — ce phénomène dépend donc effectivement du nombre de REYNOLDS. Ma collection de spectres publiée en 1909 dans le 3^e fascicule du Bulletin de Koutchino donne une bonne documentation sur ce qui peut se passer dans la couche limite.

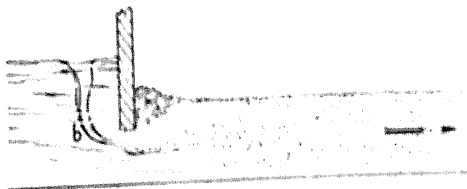


Fig. 8.

Il est facile de remarquer l'analogie qui existe entre les tourbillons liés qui se forment au-devant d'un obstacle et le tourbillon *b* de la fig. 8. Dans mon laboratoire hydrodynamique de Koutchino j'ai utilisé l'air pompé par le tourbillon *b* et qui se met à courir le long des parois de verre du canal sous la forme d'un essaim de bulles, pour obtenir les spectres représentés sur la fig. 9. On aperçoit bien sur ces spectres, obtenus avec deux éclairages différents, le mouvement giratoire des bouts libres des tourbillons liés.

Contribution à l'étude de l'écoulement plan des fluides

Par MM. Toussaint et Carafoli, Paris
(Voir Planches XXX—XXXII)

Dans le but de rendre visibles les phénomènes (lignes de courant, sillages, tourbillons, etc.) qui se produisent dans l'écoulement d'un fluide autour d'obstacles immergés, nous avons réalisé au Laboratoire de la Chaire de Mécanique des fluides, à l'Institut Aérotechnique de St-Cyr un certain nombre de dispositifs expérimentaux permettant la photographie et la cinématographie de ces phénomènes.

Dans l'étude présente nous donnerons seulement les résultats obtenus avec un tunnel hydrodynamique plat ayant pour objet la visualisation des phénomènes relatifs à l'écoulement *plan* de l'eau autour des divers obstacles. On sait que l'étude du mouvement plan d'un fluide est à la base de toutes les théories aérodynamiques modernes. Il y avait donc le plus grand intérêt à réaliser un dispositif expérimental dans lequel l'écoulement réel du fluide se rapprocha le plus possible des conditions théoriques de l'écoulement plan.

Le tunnel que nous avons construit dans ce but, est constitué par deux glaces superposées, séparées par une distance de 1 cm. au moyen de deux entretoises latérales. La section de passage de l'eau est donc rectangulaire avec une largeur de 26,5 cm. et une hauteur de 1 cm. La longueur totale du tunnel est de 50 cm. Cet ensemble, posé sur un support métallique approprié, est immergé dans une cuve à eau de 96 cm. de longueur, 68 cm. de largeur et 64 cm. de hauteur, dont il occupe la partie médiane. Cette cuve est surélevée au-dessus du sol de manière à augmenter la charge. Du côté de l'entrée d'eau, les glaces sont munies de bourrelets formant collecteur galbé raccordé à la section constante du tunnel. Du côté de la sortie d'eau le tunnel est raccordé par une poche en caoutchouc à une canalisation circulaire de 3 cm. diamètre. Cette canalisation traverse une des parois de la cuve à eau et se termine par un robinet réglable, placé au-dessus d'un orifice d'évacuation. En manœuvrant progressivement ce robinet on peut faire varier la vitesse d'écoulement de l'eau dans le tunnel jusqu'à obtenir une vitesse moyenne maximum d'environ 0,90 m/sec. Cette vitesse moyenne est mesurée au moyen d'un plongeur lesté qui suit l'abaissement du niveau dans la cuve et l'enregistre sur un cylindre à mouvement d'horlogerie.

L'obstacle d'épaisseur égale à celle du tunnel, est placé à environ 12 cm. de l'entrée et dans l'axe du tunnel.

Les lignes de courant sont rendues visibles par l'émission de filets colorés en rouge. Cette émission est réalisée par un distributeur de forme extérieure carénée placé à l'entrée du collecteur du tunnel, bien parallèlement au plan médian de ce dernier. Ce distributeur possède 64 trous de 0,7 mm. de diamètre, espacés de 4 mm. Les filets colorés sont constitués par de la fuchsine qu'on dissout d'abord dans un peu d'alcool et qu'on mélange ensuite avec de l'eau. Un réservoir en charge emmagasine ce liquide coloré et une canalisation munie de robinets de réglage l'amène ensuite au distributeur. Il convient que la vitesse d'émission des jets colorés soit sensiblement égale à celle du courant général au point d'émission.

Enfin un ensemble de lampes à filaments rectilignes, d'une intensité totale de 500 à 700 bougies, illumine un fond translucide sur lequel repose la glace inférieure du tunnel. Le spectre dessiné par les filets colorés se détache sur ce fond lumineux et peut être cinématographié.

L'appareil de prise de vues ¹⁾ est disposé au-dessus de la cuve à eau sur un rapport

¹⁾ L'Office National des Recherches Scientifiques et Industrielles et des Inventions a bien voulu nous prêter l'appareil de prise de vue et le concours éclairé du Comité technique de Cinématographie pour la mise au point de cette question.

en bois qu'on a rendu rigide par des armatures et des haubannages appropriés. A l'origine, on manœuvrait le cinéma à la main. Par la suite, nous avons cherché à augmenter la rapidité des prises de vue et nous avons été conduits à actionner le cinéma au moyen d'un moteur électrique et d'une transmission démultipliée appropriée.

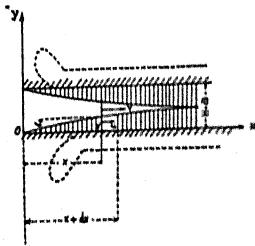


Fig. 1.

Un contacteur monté sur l'arbre du cinéma est relié à un chronographe enregistreur. Les diagrammes ainsi recueillis permettent de mesurer l'allure à laquelle sont pris les films. En moyenne, les films pris dans ces conditions comportaient des prises de vues au $\frac{1}{55}$ de seconde (au lieu de $\frac{1}{32}$ dans les films du début).

Ce dispositif se distingue de ceux employés dans le même but par différents auteurs (MAREY, 1893, HELE SHAW, 1898, R. A. FRAZER, 1923) par les particularités suivantes:

Le fluide part de l'état de repos et sa mise en route sans choc conduit à un écoulement dénué de toute turbulence préalable. En outre, les filets colorés émis dans le plan médian d'un tel écoulement avec les précautions mentionnées précédemment (collecteur galbé, distributeur laminé) conservent leur netteté de contour sur un parcours notable, même en régime non laminaire. Nous avons déjà observé cette dernière particularité en répétant l'expérience classique d'OSBORNE REYNOLDS. Elle est due, comme nous allons le voir, au fait que la couche fluide perturbée par le frottement des parois, est nulle à l'entrée du tunnel et n'atteint le plan médian où se trouvent les filets colorés, qu'à une grande distance en aval.

Une autre conséquence importante de cette particularité est que la distribution des vitesses en toute section transversale, du tunnel, reste uniforme sur une épaisseur appréciable pour des vitesses moyennes supérieures à 0,30 m/sec. Il en résulte que les spectres correspondants se rapprochent de plus en plus des conditions théoriques du mouvement plan.

L'importance particulière de ce qui précède, nous a conduit à faire une étude théorique assez détaillée des conditions de l'écoulement de l'eau dans notre tunnel hydrodynamique. Nous résumerons ci-après cette étude et les résultats qui en découlent.

Etude théorique de l'écoulement dans un tunnel plat.

Considérons d'abord l'écoulement au delà du point de jonction des couches perturbées par le frottement des parois, c'est-à-dire l'écoulement dans les portions où le régime est établi. Cet écoulement peut être du type «laminaire» ou du type dit «turbulent».

1. Cas de l'écoulement en régime laminaire.

Considérons l'axe ox orienté suivant la direction du courant, et l'axe oy perpendiculaire au plan médian de ce courant. La largeur du tunnel (26,5 cm.) étant considérable par rapport à l'épaisseur (1 cm.) on peut admettre que, pour les portions intéressées par les spectres, le frottement superficiel des parois latérales est sans influence. Tout se passe donc comme si le tunnel avait une largeur infinie avec une épaisseur uniforme égale à 1 cm.

Les équations générales de l'hydrodynamique se réduisent à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\rho} \Delta u = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{dy^2} \quad \dots \dots \dots (1)$$

car, pour les portions où le régime est établi, la vitesse, u , ne varie plus le long du tunnel et la pression p est constante en toute section.

(Dans cette équation u représente la vitesse parallèle à ox en un point quelconque de l'épaisseur du courant, p est la pression en ce point à une distance x de l'origine, ρ est la densité et μ la viscosité.

Si τ_0 représente le frottement unitaire sur les parois et si $2D$ est la hauteur du tunnel, on aura pour une largeur de tunnel égale à l'unité

$$2D \cdot \frac{dp}{dx} + 2\tau_0 = 0 \quad \text{où} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\tau_0}{D} \quad \dots \dots \dots (2)$$

En portant cette valeur de $\frac{dp}{dx}$ dans l'équation (1) on obtient successivement:

$$\mu \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{\tau_0}{D} = 0$$

d'où
$$\mu \frac{du}{dy} + \frac{\tau_0}{D} y = C_1 \quad \text{et} \quad \mu u + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{D} y^2 = C_1 y + C_2.$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont définies par les conditions aux limites: soit pour $y = 0$, $u = 0$, d'où: $C_2 = 0$

$$\mu \left(\frac{du}{dy} \right)_0 = \tau_0, \quad \text{d'où:} \quad C_1 = \tau_0$$

Il en résulte:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{\mu} D \left[2 \frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right].$$

Pour $y = D$ on aura la vitesse dans le plan médian soit:

$$u_{y=D} = V_a = \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{\mu} D$$

En définitive on aura

$$u = V_a \left[2 \left(\frac{y}{D} \right) - \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right] \quad \dots \dots \dots (3)$$

La distribution des vitesses u est donc une distribution parabolique comme il fallait s'y attendre en régime établi du type laminaire.

2. Cas de l'écoulement, en régime turbulent. Pour le cas du régime turbulent nous pouvons admettre que la distribution des vitesses s'établit suivant la formule:

$$u = V_a \left(\frac{y}{D} \right)^{1/7}$$

proposée par M. le Prof. KÁRMÁN²⁾ et qui se vérifie expérimentalement dans le cas des tuyaux polis et des plaques planes polies.

Etablissement du régime d'écoulement.

Considérons maintenant la portion antérieure du tunnel dans laquelle s'établit l'un ou l'autre régime défini ci-dessus.

Supposons d'abord que les conditions de vitesse et de dimensions conduisent au régime laminaire.

Comme la distribution des vitesses est parabolique en régime laminaire établi, nous admettrons qu'il en est de même pour la distribution des vitesses dans chacune des couches perturbées par le frottement des parois inférieure et supérieure du tunnel.

Par suite, dans cette portion antérieure où le régime s'établit nous aurons une distribution uniforme des vitesses dans la zone médiane se raccordant à une distri-

²⁾ u.³⁾ Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule in Aachen. I. Lieferung. — Aachen 1921.

bution parabolique dans les couches perturbées. L'épaisseur δ de ces couches part de zéro à l'origine du tunnel et nous allons établir la loi de variation de δ avec la distance x mesurée dans la direction du mouvement. (Pour simplifier on suppose que le collecteur galbé est remplacé par une portion équivalente de section uniforme (fig. 1).

En tous points (x, y) de la couche perturbée on aura comme expression de la vitesse u :

$$u = V \left[2 \frac{y^2}{\delta^2} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]$$

V étant la vitesse uniforme dans la portion médiane.

A cette relation s'ajoutent: l'équation de Bernoulli:

$$\rho \frac{d\rho}{dx} + \rho V \frac{dV}{dx} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

et l'équation du débit:

$$V(D - \delta) + \int_0^\delta u dy = V_m \cdot D \quad \dots \dots \dots (6)$$

V_m étant la vitesse moyenne du courant. Si l'on applique le théorème des quantités de mouvement à une portion de fluide contenue dans la couche δ entre les sections x et $(x + dx)$ on peut écrire:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - \rho V \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy + \delta \frac{d\rho}{dx} + \tau_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

En combinant (4), (5), (6) et (7) on obtient en définitive:

$$\frac{7\eta^3 + 6\eta}{(3 - \eta)^2} d\eta = 10 \left(\frac{v}{V_m \cdot D} \right) \cdot \frac{dx}{D}$$

dans laquelle on a posé: $\eta = \frac{\delta}{D}$

Par intégration on trouve alors, en posant: $H = 2D$:

$$\frac{x}{H} = \frac{1}{40} \left(\frac{V_m \times H}{v} \right) \left[7\eta + 48 \ln(3 - \eta) + \frac{81}{3 - \eta} - 79,733 \right] \quad \dots \dots (8)$$

qui représente la loi d'évolution de la hauteur relative $\eta = \frac{\delta}{D}$ en fonction de la distance x .

On en déduirait aisément la distance x (f) à partir de laquelle le régime laminaire est établi, quand les deux couches perturbées se rejoignent, et par suite quand $\eta = 1$ ($\delta = D$).

Supposons maintenant que les conditions de vitesse et de dimensions conduisent à l'établissement du régime dit turbulent.

On pourrait résoudre l'équation (7) en partant de la distribution des vitesses définie par la loi:

$$u = V \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad \dots \dots \dots (4')$$

et du frottement unitaire en régime turbulent, donné par la relation:

$$\tau_0 = 0,0225 \rho V^2 \left(\frac{v}{V\delta} \right)^{1/4}$$

relations données par KÁRMÁN (loc. cit.).

Mais ce calcul est inutile dans le cas de notre tunnel hydrodynamique.

En effet, les expériences de B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN (Thèse, Delft, 1924) sur la distribution des vitesses d'un courant d'air au contact d'une glace plane et polie, montrent que la couche perturbée par le frottement superficiel d'une telle paroi ne devient turbulente qu'à une certaine distance, x_1 du bord d'attaque. Cette distance x_1 varie avec la vitesse V_0 du courant non perturbé et aussi avec la viscosité cinématique ν du fluide. VAN DER HEGGE ZIJNEN a montré que, dans un domaine étendu, de variation de la vitesse V_0 on avait la relation:

$$\frac{V_0 \times x_1}{\nu} = 330000 \quad \dots \dots \dots (9)$$

Le maintien du régime laminaire dans les couches perturbées s'applique *a fortiori* à notre tunnel hydrodynamique parce que la vitesse est nulle ou extrêmement faible à l'entrée du collecteur.

Si dans la relation (9) nous remplaçons V_0 , par la vitesse moyenne V_m du courant et si nous donnons à ν pour de l'eau une valeur moyenne égale à $1/760000$ on aura:

$$x_1 = 0,434 V_m$$

Pour la vitesse maximum $V_m = 1$ m/sec. réalisée dans nos expériences, on aura donc:

$$x_1 = 0,434 \text{ m} = 43,4 \text{ cm}$$

Ainsi, pour le cas le plus défavorable, les couches perturbées par le frottement des parois inférieure et supérieure du tunnel hydrodynamique, deviennent turbulentes, à partir d'une distance x_1 supérieure à celle utilisée pour la production des spectres.

Donc, dans le domaine expérimenté, c'est-à-dire pour toutes les vitesses et dimensions utilisées, la distribution des vitesses dans le tunnel est régie par les formules (3) et (8) correspondant au cas du régime laminaire.

A l'aide de ces relations on a calculé les éléments du tableau ci-dessous qui donne pour différentes vitesses moyennes V_m les valeurs de $\eta = \frac{\delta}{D}$ et de $h = 2(D - \delta)$ en différentes distances x .

Vitesses V_m		0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	1,00
$\eta = \frac{\delta}{D}$	$h = 2(D - \delta)$	x	x	x	x	x	x
0,2	8 mm	3	6	9	15	22,5	30
0,4	6	16	32	48	80	120	160
0,6	4	45	90	135	225	338	450
0,8	2	100	200	300	500	750	1000
1	0	196	392	588	980	1470	1960

On voit ainsi que pour $V_m = 0,30$ m/sec. la distribution des vitesses est rigoureusement uniforme sur une portion médiane $h = 6$ mm. à une distance $x = 48$ mm. de l'entrée. On a encore $h = 4$ mm. à la distance $x = 135$ mm. qui correspond à l'emplacement des obstacles.

Il convient de remarquer d'ailleurs que le raccordement des distributions paraboliques

marginales avec cette zone d'uniformité rigoureuse conduit à une quasi-uniformité des vitesses beaucoup plus étendue que celle mesurée par les valeurs de h . Ainsi nous avons établi fig. 2 et 3 les diagrammes des distributions de vitesses en deux sections $x = 0,10$ m. et $x = 0,20$ m. pour diverses vitesses moyennes depuis 0,10 m/sec. jusqu'à 1 m/sec. La fig. (4) représente

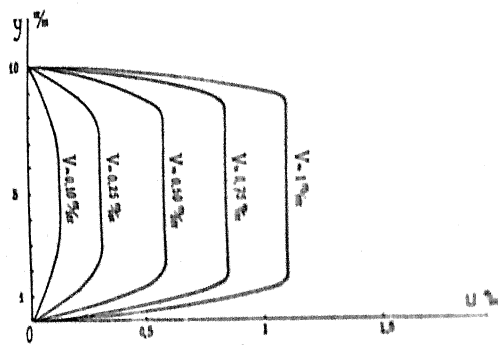


Fig. 2.

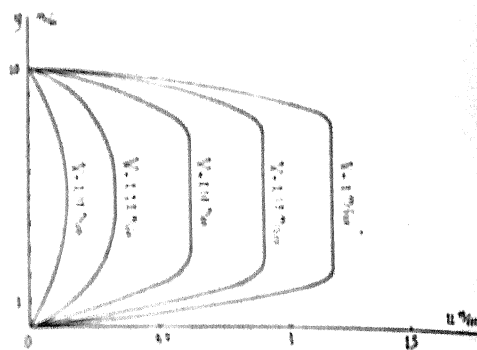


Fig. 3.

le diagramme intermédiaire qui a servi pour les calculs précédents. Ce diagramme est la représentation graphique de l'équation (8) pour $H = 1$ cm. et $v = 1/270000$.

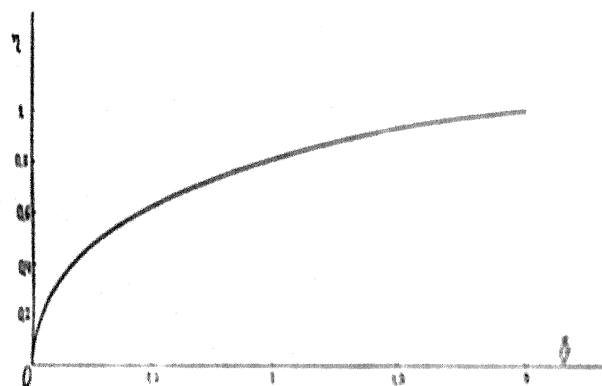


Fig. 4.

Ces graphiques montrent bien que la quasi-uniformité des vitesses est réalisée dans toute la portion principale des spectres pour des vitesses moyennes supérieures à 0,30 m/sec.

Il en résulte, comme nous l'avons dit précédemment que les spectres correspondant aux

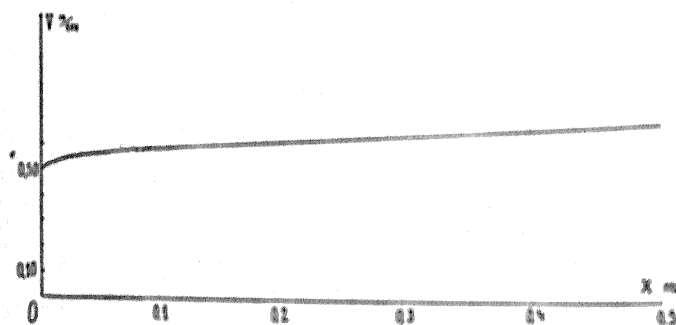


Fig. 5.

vitesses moyennes supérieures à 0,30 m/sec. se rapprochent de plus en plus des conditions théoriques de l'écoulement plan.

Toutefois, il convient de remarquer qu'en raison même de cette distribution évolutive des vitesses en différentes sections du tunnel, la vitesse médiane augmente légèrement depuis la section d'entrée jusqu'à la section de sortie.

A titre d'exemple, la fig. 5 représente en fonction des distances x depuis l'entrée du tunnel, la variation de la vitesse médiane V_a pour une vitesse moyenne $V_m = 0,50$ m/sec. On voit qu'entre $x = 0,05$ m. et $x = 0,40$ m., la vitesse médiane augmente de $0,565$ m/sec. à $0,665$ m/sec. Il est possible néanmoins que les spectres correspondants ne soient pas notablement déformés de ce fait, principalement au voisinage de l'obstacle qui occupe une longueur relativement faible par rapport à l'écart $x = 0,35$ m. envisagé ci-dessus.

Ce phénomène est tout à fait analogue à celui qu'on observe dans les souffleries aérodynamiques où l'évolution de la distribution des vitesses produit un *gradient de pression statique*. En général, on ne tient compte de l'influence de ce gradient que lorsque le modèle expérimenté a une dimension importante dans le sens du courant et lorsque sa résistance aérodynamique propre est très faible (carènes de dirigeable).

D'ailleurs, les photographies et les films que nous avons obtenus représentent essentiellement des documents qualitatifs. Il deviendrait indispensable de tenir compte des particularités signalées plus haut dans le cas où l'on ferait une interprétation quantitative de ces documents.

Résultat obtenus. Nous donnons ci-après, à titre d'exemple, un certain nombre de photographies obtenues avec l'installation que nous venons de décrire. Certaines de ces photographies ont été obtenues directement, d'autres proviennent de l'agrandissement de certaines images prélevées dans les films.

Les spectres déjà cinématographiés pour des obstacles variés tels que: plan mince orthogonal au courant, cylindre circulaire, profils d'ailes, etc. montrent bien l'évolution constante de l'écoulement en fonction de la vitesse du courant.

Aux faibles vitesses on observe des sillages dont la surface de séparation d'avec le courant général est très stable, tend à se refermer en arrière de l'obstacle. Ce régime d'écoulement fait suite à celui qu'on observe quand la vitesse du courant est de l'ordre de la viscosité du fluide. On sait qu'on peut alors obtenir le contournement complet de l'obstacle et les lignes de courant correspondantes sont assez exactement celles qu'on peut calculer théoriquement pour le cas d'un fluide idéal.

Le liquide inclus dans ces sillages des faibles vitesses semble rester en repos, en régime permanent. A chaque accélération du mouvement, par ouverture brusque du robinet d'évacuation, on observe des rentrées et des sorties de fluide dans le sillage où la couleur se diffuse bientôt, dessinant ainsi une sorte de proue d'eau morte en arrière de l'obstacle.

Aux vitesses moyennes le sillage s'allonge et tend à devenir de largeur constante voisine de la dimension transversale de l'obstacle. Les surfaces de séparation d'avec le courant général deviennent instables et le liquide dans le sillage est animé de mouvements tumultueux (*sillage tumultueux*).

Pour les faibles vitesses, et souvent pour les vitesses moyennes on observe que les lignes de courant venant de frapper la zone médiane *en amont* de l'obstacle «*déferlent*» en une ou deux lames tourbillonnaires. La couleur de ces lignes vient alors pénétrer au sein des couches perturbées par le frottement et quelquefois dessine des lignes de stagnation quand elle atteint l'une ou l'autre paroi du tunnel.

Enfin, à partir d'une certaine vitesse plus ou moins grande suivant la dimension de l'obstacle on observe l'apparition des tourbillons alternés de Bénard-Kármán.

Le courant général se déforme alors périodiquement suivant les contraintes de l'émission et de la propagation de ces tourbillons alternés.

Des évolutions analogues s'observent pour les profils d'ailes sustentatrices. Toutefois, aux grandes vitesses: 0,5 à 1 m/sec. pour de bons profils et pour des incidences modérées, on voit que le contournement du profil s'améliore à mesure qu'on augmente la vitesse.

Pour des incidences très grandes, et à ces mêmes vitesses, on observe encore l'apparition des tourbillons alternés.

Nous renvoyons le lecteur aux planches XXX, XXXI et XXXII et leurs légendes.

Discontinuous Fluid Motion Past Curved Barriers

S. Brodetsky, Leeds

The problem of discontinuous fluid motion in two dimensions past any barrier was discussed in a very general and elegant manner by LEVI-CIVITA twenty years ago (Rend. Circ. Mat. Palermo, XXIII, 1907). Useful accounts are given by BRILLOUIN (Ann. Chim. Phys., XXIII, 1911) and by CISOTTI (Idromeccanica Piana, II, 1922). The method is as follows.

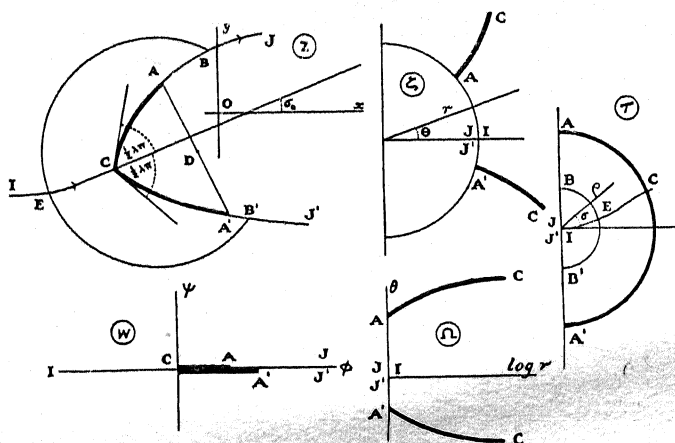
Let the complex variable $z \equiv x + iy$ define position in a plane perpendicular to the generators of the barrier, the x axis being parallel to the direction of the stream at infinity. Let φ , ψ be the velocity potential and stream function respectively, and define the velocity components u , v as

$$u = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y; \quad v = \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$$

Put $w \equiv \varphi + i\psi$ and define ζ , Ω , r , θ so that

$$\zeta \equiv re^{i\theta} \equiv dz/dw; \quad \Omega \equiv \log \zeta \equiv \log r + i\theta$$

r is actually the inverse of the velocity at any point, θ the direction of motion. The z , w , ζ , Ω planes for such a motion are shown in the figure. C is the point on the barrier where



the limiting stream line IC bifurcates; CA , CA' are the parts of this line in contact with the barrier; and AJ , $A'J'$ are the parts of this line which are free, and which enclose the dead liquid. We take as our standard dimensions unit density, unit velocity at infinity, and unit value of $\frac{1}{2}(\sqrt{CA} + \sqrt{CA'})$ as measured in the w plane.

LEVI-CIVITA introduces a transformation which we modify into

$$\sqrt{w} = \frac{\tau - \tau^{-1}}{2i} - \sin \sigma_0,$$

where the complex variable is $\tau \equiv \rho e^{i\sigma}$ and the point C corresponds to $\tau = e^{i\sigma_0}$. We thus convert the barrier ACA' into the semicircle $\rho = 1$, $-\frac{1}{2}\pi < \sigma \leq \frac{1}{2}\pi$, while the free stream lines AJ , $A'J'$ become the radii $\tau = i\rho$, $0 < \rho \leq 1$, $0 > \rho \geq -1$. The general solution of our problem now consists in writing

$$\Omega = a_1 \tau + \frac{1}{2} i a_2 \tau^2 + \frac{1}{3} a_3 \tau^3 + \frac{1}{4} i a_4 \tau^4 + \dots$$

where the coefficients a are all real, and the expansion converges for $|r| \leq 1$, except for the value of τ corresponding to C , namely $\tau = e^{i\sigma_0}$, where the velocity is zero and r is infinite.

A more explicit form of Ω is

$$\Omega = \lambda \log \left(\frac{1 + e^{i\sigma_0} \tau}{1 - e^{-i\sigma_0} \tau} \right) + A_1 \tau + \frac{1}{2} i A_2 \tau^2 + \frac{1}{3} A_3 \tau^3 + \frac{1}{4} i A_4 \tau^4 + \dots$$

in which the coefficients A are all real, and the series converges for all $|\tau| \leq 1$. λ is so defined that the angle which the tangents on both sides of C in the z plane make with one another (measured away from the stream) is $\lambda \pi$. For any set of values $\lambda, \sigma_0, A_1, A_2, \dots$ we can get the barrier and its orientation. The bisector of the angle at C makes an angle with the z axis, marked σ_0 in the figure, equal to

$$\lambda \sigma_0 + A_1 \sin \sigma_0 + \frac{1}{2} A_2 \cos 2\sigma_0 + \frac{1}{3} A_3 \sin 3\sigma_0 + \frac{1}{4} A_4 \cos 4\sigma_0 + \dots$$

If λ is unity the barrier is blunt at C , i. e. the two tangents coincide, and the angle just defined gives the direction of the normal at C . If the coefficients A are all zero we have BOBYLEF's problem, and we get a single plane when in addition $\lambda = 1$.

R_x, R_y , the components of pressure per unit length of the barrier, and the moment M about the origin in the z plane, are given by

$$R_y + i R_x = \frac{1}{2} \int dz \zeta^2 = \frac{1}{2} \int (dx - i dy),$$

$$M = \text{Real part of } \left\{ \frac{1}{2} \int z dz \zeta^2 - \frac{1}{4} \int (dx + i dy) (dx - i dy) \right\},$$

the integrations being taken along a path $B'EB$, B' on $A'A$, B on AB , lying wholly in the moving liquid.

R_x, R_y are easily calculated, and have long been known to be

$$R_x = \frac{1}{4} \pi a_1^2, \quad R_y = \frac{1}{4} \pi (a_2 + 4 a_1 \sin \sigma_0).$$

M was first calculated by myself (Proc. Roy. Soc., 1922). Whereas the origin in the z plane need not be defined for calculating the barrier or the pressure, we must have it in order to calculate M .

I define the origin thus. We can find $dz/d\tau$ in terms of τ . Let us expand it in powers of τ : we get $\tau^{-3}, \tau^{-2}, \tau^{-1}, \tau^0, \tau^1, \dots$. Integrate the series with respect to τ , without introducing any arbitrary constant. We get terms in $\tau^{-2}, \tau^{-1}, \log \tau, \tau, \tau^2, \dots$. The origin in the z plane corresponds to the value of τ for which the integrated series vanishes. The moment M round this origin in the sense $x \rightarrow y$ is

$$M = \frac{\pi}{32} \left\{ 3 a_1^2 a_2 - a_4 + 4 \sin \sigma_0 (a_1^3 + 2 a_1 - 2 a_2) + 16 a_2 \sin^2 \sigma_0 \right\}.$$

I have for some time been using this method for solving practical problems. To do this it is necessary to note a remark due to BRILLOUIN. If we put $\tau = e^{i\sigma}$ in Ω we get for the barrier

$$\log r = a_1 \cos \sigma - \frac{1}{2} a_2 \sin 2\sigma + \frac{1}{3} a_3 \cos 3\sigma - \frac{1}{4} a_4 \sin 4\sigma + \dots,$$

$$\theta = a_1 \sin \sigma + \frac{1}{2} a_2 \cos 2\sigma + \frac{1}{3} a_3 \sin 3\sigma + \frac{1}{4} a_4 \cos 4\sigma + \dots$$

Since the barrier is a stream line, θ defines the direction of an element ds . Now $r = ds/d\varphi$ and $\varphi = (\sin \sigma - \sin \sigma_0)^2$ on the barrier. Hence the radius of curvature R is given in terms of σ thus —

$$R = \frac{2 (\sin \sigma - \sin \sigma_0) e^{a_1 \cos \sigma - \frac{1}{2} a_2 \sin 2\sigma + \dots}}{a_1 - a_2 \frac{\sin 2\sigma}{\cos \sigma} + a_3 \frac{\cos 3\sigma}{\cos \sigma} - a_4 \frac{\sin 4\sigma}{\cos \sigma} + \dots}$$

Again, for the free line AJ we put $\tau = i\rho$, $0 < \rho \leq 1$, so that

$$r = 1, \theta = a_1 \rho - \frac{1}{2} a_2 \rho^2 - \frac{1}{3} a_3 \rho^3 + \frac{1}{4} a_4 \rho^4 + \dots$$

φ has the value $\left\{ \frac{1}{2} (\rho + \rho^{-1}) - \sin \sigma_0 \right\}^2$ on AJ . Hence the radius of curvature of AJ

at the point corresponding to ρ is

$$= \frac{(1 - \rho^2) \left\{ \frac{1}{2} (\rho + \rho^{-1}) - \sin \sigma_0 \right\}^2}{\rho^2 (a_1 - a_2 \rho - a_3 \rho^2 + a_4 \rho^3 + \dots)}$$

This vanishes in general at A , i. e. at $\rho = 1$, while the barrier has, in general, finite curvature at A , namely $\sigma = \frac{1}{2} \pi$. Thus the solution refers in general to an abrupt end at A , as e. g. in the case when ACA' is straight. If the stream line AJ is to leave the barrier at a point where it does not end abruptly, as e. g. in the case of a completely circular or completely elliptical cylinder, we must have finite radius of curvature for AJ at A . This implies the condition $a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + \dots = 0$. I have been able to prove the interesting fact that when this condition is satisfied the radius of curvature of AJ at A is equal to that of the barrier at A (Proc. Edin. Math. Soc., XLI, 1923).

Similar considerations apply to A' , where the condition is $a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + \dots = 0$. If neither condition is satisfied we have abrupt ends at both A and A' . If one is satisfied while the other is not, we get an abrupt end for the latter. If both conditions are satisfied neither end is abrupt. This is the important case in practice, e. g. a stream-lined strut. If both conditions are satisfied, they give

$$a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots = 0, \quad a_2 - a_4 + a_6 - a_8 + \dots = 0$$

In the symmetrical problem all the coefficients a with even suffix and σ_0 are zero. We get zero M , with the origin in the z plane on the x axis. Either both ends are abrupt, or neither.

The process of solving for any barrier is the humble one of searching for such numerical values of $\lambda, \sigma_0, A_1, A_2, \dots$ as fit the given barrier. The mathematical principle is very simple. The barrier is taken to be given by means of the radius of curvature R in terms of the direction θ . Now we have found R and θ in terms of the parameter σ , involving the constants $\lambda, \sigma_0, A_1, A_2, \dots$. We have then to choose these constants in such a manner as to make the relation between R and θ that given for the barrier. I do not pretend to solve the problem exactly in the mathematical sense, but in any given case the solution can be obtained to any required degree of accuracy: it is only a question of labour, which in many cases is by no means excessive.

An easy case is that of a circular barrier: it is only necessary to make R independent of σ . If neither end is abrupt the motion is symmetrical, and it is given by

$$\Omega = \log \frac{1+\tau}{1-\tau} - 0.9415 \tau + 0.0167 \tau^3 - 0.0017 \tau^5,$$

with very considerable accuracy (Proc. Roy. Soc., *ibid.*). The arc ACA' is very nearly 110° in angular extent, and the resistance is 0.568 times that on a symmetrically placed plane barrier of width equal to the diameter of the circle.

If the angular extent of ACA' is less than 110° , and the motion is symmetrical, we get abrupt ends. The problem is in fact that of a plate with circular camber. I have worked out this problem in considerable detail (Scripta Univ. Hieros., Jerusalem, 1923). If we define the number c as the ratio to AA' of the distance CD of C from D , the mid point of AA' , positive if the arc is concave to the moving liquid, negative if convex, we get a resistance

$1 + \frac{7}{9}c$ times that on a flat plate of the same width. I may mention that when the method is applied to the flat plate and compared to the exact solution I have agreement within about $\frac{1}{2}\%$.

I have also worked out the problem of the complete elliptic cylinder placed symmetrically in the stream (Proc. Roy. Soc., *ibid.*), with results that may be applied to stream-lined struts.

A very interesting problem is that of the elliptic cylinder placed unsymmetrically in the stream. Mr. C. A. FORD, of Leeds University is working at this problem now. More careful adjustment of the constants of the barrier is required, and we have to examine the degree of accuracy obtained in the barrier if R in terms of θ has been secured to some known degree of exactitude.

Suppose that our solution gives us $R(\theta) = R_0(\theta) + R_1(\theta)$ where R_0 is the required correct value of R and R_1 is the error. We assume that at some point of the barrier, say θ_0 , R_1 is zero. This is easily arranged. Let θ_1, θ_2 be the values of θ at the ends A, A' . Then the accuracy of the fit is determined by the accuracy of the lengths of the arcs between θ_0 and θ_1 , and between θ_0 and θ_2 , as well as by the normal deviation of any point at θ from the tangent at θ to the correct curve. Thus the accuracy is determined by the smallness of

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} R_1 d\theta, \quad \int_{\theta_0}^{\theta_2} R_1 d\theta, \quad \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 \cos \theta d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 \sin \theta d\theta,$$

the last being taken for any value of θ . Simple criteria are derived by using R_1 in the form of FOURIER series.

My suggested first approximation is

$$\Omega = \log \left(\frac{1 + e^{\sigma_0 \tau}}{1 - e^{\sigma_0 \tau}} \right) - \frac{\cos \sigma_0}{\cos \sigma_1 \sin \sigma_1} \log \left(\frac{1 + t_1 e^{\sigma_1 \tau}}{1 - t_1 e^{\sigma_1 \tau}} \right)$$

where $t_1 \equiv \tan \frac{1}{2} \alpha$ and $\sin \sigma_0 = \sin \alpha_1 \sin \sigma_1$. This gives finite curvature of the free stream lines at A, A' , and the shape of the barrier is not unlike an ellipse. For an ellipse we have $R_0 = (1 - e^2 \cos^2 \theta')^{-1/2}$ where θ' is measured from the direction of the major axis, and the radius of curvature is put equal to unity at the end of the major axis. By using R and θ in terms of σ and comparing with this value of R_0 in terms of θ' , Mr. FORD has been able to work out very good second approximations. Thus, starting with $\alpha_1 = 15^\circ, \sigma_1 = 15^\circ$, he obtains an

approximately elliptic barrier of semi-axes $a = 2.044$, $b = 1.623$, placed with the major axis at an angle 13° with the direction of the stream at infinity. When the ellipse and barrier are plotted on a sheet of paper, it is found that there is an almost perfect fit except near the middle, where, however, the normal deviation is never more than about 0.015 .

The analytical form used is

$$\Omega = \log \left(\frac{1 + e^{i\sigma_0} \tau}{1 - e^{-i\sigma_0} \tau} \right) - \frac{\cos \sigma_0}{\cos \sigma_1 \sin \alpha_1} \log \left(\frac{1 + t_1 e^{i\sigma_1} \tau}{1 - t_1 e^{-i\sigma_1} \tau} \right) + \frac{1}{2} i b_2 \tau^2 + \frac{1}{3} b_3 \tau^3 + \frac{1}{4} i b_4 \tau^4 + \frac{1}{5} b_5 \tau^5,$$

with $t_1 \equiv \tan \frac{1}{2} \alpha$, and $\sin \sigma_0 = \sin \alpha_1 \sin \sigma_1$. The conditions for finite curvature of AJ , $A'J'$ at A , A' are automatically satisfied: b_2 , b_3 are found to be small. A correction like $b_1 \tau$ is easily seen to be useless.

I hope that fuller results will be published elsewhere. I give here a few typical cases. α is the angle between the major axis and the direction of the stream at infinity, β is the angle that the resultant pressure makes with the major axis, and d is the distance from the centre of the ellipse of the point where the resultant pressure cuts the major axis, divided by the semi-major axis itself.

α_1	σ_1	b_2	b_3	α	b	e	α	β	d
15°	15°	0.0147	— 0.0161	2.044	1.623	0.610	13°	18°	0.486
15°	45°	0.0232	— 0.0055	2.253	1.550	0.725	21°	33°	0.317
15°	90°	0.0443	— 0.0029	2.293	1.403	0.791	25°	43°	0.250

It is clear that we can now claim to be able to solve any problem of discontinuous motion in two dimensions with one curved barrier.

Méthode expérimentale pour la résolution des équations du mouvement des fluides

Par E. Hahn, Nancy

(Voir Planche XXXIII)

1. Si les moyens fournis par la théorie des fonctions permettent en principe de résoudre tout problème concernant le mouvement d'un fluide parfait parallèlement à un plan, l'application de ces moyens aux problèmes techniques, par exemple à l'écoulement du fluide autour d'aubes de diffuseurs ou de roues de turbomachines, n'en demeure pas moins délicate et nécessite toujours de longs calculs. On est généralement obligé, pour simplifier le travail, de s'en tenir à des formes d'aubes correspondant à des fonctions plus particulièrement commodes à discuter et par conséquent, on s'expose à cette objection des praticiens que les formes employées ne sont pas celles qui, compte tenu de toutes les circonstances, présenteraient pour eux le plus d'intérêt.

Sans méconnaître le moins du monde l'utilité de la méthode analytique, on peut donc dire que pour favoriser la diffusion des idées nouvelles parmi les ingénieurs, il est désirable de rechercher des méthodes expérimentales susceptibles de faciliter la solution de tels problèmes. Monsieur STODOLA entrant dans cet ordre d'idées a utilisé l'analogie existant entre les équations du mouvement du fluide et celle dérivant de la déformation d'une membrane. Il a obtenu ainsi d'intéressants résultats. Mais la réalisation matérielle des conditions aux limites à imposer à la membrane n'est pas sans présenter de sérieuses difficultés.

On peut aussi recourir, comme l'ont fait Monsieur PRASLE et, sous son inspiration, plusieurs de ses élèves, à la méthode de HELE-SHAW. Il me paraît préférable, en raison de la simplicité du procédé, de recourir à une analogie électrique et d'explorer le potentiel à l'intérieur d'un milieu conducteur homogène d'épaisseur constante, dont les conditions aux limites ont été choisies de manière à correspondre au problème hydrodynamique envisagé. La méthode en soi n'a rien d'inédit, les électriciens par exemple l'ont employée pour étudier les champs autour de conducteurs à haute tension. Je désire simplement montrer le parti qu'on en peut tirer dans les questions relatives aux diffuseurs et aux roues de turbomachines.

2. J'utilise à cet effet une cuve (fig. 1) à fond isolant, rempli d'eau acidulée ou d'une solution diluée de sulfate de cuivre. Le bord de la cuve est métallique, afin de pouvoir, le cas échéant, assurer une distribution absolument symétrique du courant, ce bord communique avec un fond métallique pourvu d'une borne centrale. On sait que la méthode revient à la mesure de la résistance de l'électrolyte; il y a donc lieu d'employer un courant alternatif pour éviter la polarisation de la pointe exploratrice. J'emploie comme source de courant un hétérodyne dont la fréquence est réglée de manière à donner au téléphone récepteur le maximum de sensibilité. La figure 1 en indique le montage; il comporte un couplage des circuits du téléphone et du pont et la mise à la terre d'une borne du téléphone, ce qui permet de supprimer les bruits parasites et d'obtenir dans toute l'étendue de la cuve une extinction complète du son.

3. Pour la brièveté de l'exposition, je conviens de désigner respectivement par φ et ψ le potentiel des vitesses et la fonction de courant du mouvement étudié, par Φ et Ψ le potentiel et la fonction de courant électriques.

4. Envisageons tout d'abord le mouvement autour d'aubes fixes. On sait que ce mouvement peut se décomposer:

- a) en un mouvement d'écoulement radial à partir d'une source centrale;
- b) en un mouvement général de circulation autour du centre tel que le produirait un tourbillon central unique placé en ce point;
- c) en un mouvement de circulation autour des aubes.

La réalisation électrique du premier problème est des plus simples. On dispose dans la cuve des aubes en matière isolante (ébonite par exemple) de dimensions assez petites par rapport au rayon de la cuve pour que le bord circulaire de celle-ci puisse constituer, sans erreur appréciable, une ligne équipotentielle; on relie l'un des pôles à une électrode centrale, l'autre au bord. Par conséquent, on identifie φ à Φ , ψ à Ψ . La figure (2) donne, tracées en trait pointillé, les courbes équipotentielles; on y a indiqué un certain nombre de lignes de courant comprenant entre elles des débits égaux. Les propriétés géométriques bien connues de ces lignes et de leurs orthogonales facilitent le tracé et permettent de le compléter dans les régions où en raison de la lente variation du potentiel, les points relevés sont moins précis.

La solution expérimentale du second problème est facile aussi, si nous convenons de faire correspondre φ à Ψ et ψ à Φ . En maintenant la même distribution du courant que précédemment les lignes équipotentielles électriques constituées par le pourtour de la cuve et celui de l'électrode centrale correspondent ainsi aux lignes de courant du mouvement; pour que les conditions autour des aubes soient aussi satisfaites, il faut évidemment que dans le problème électrique, le contour des aubes soit une ligne équipotentielle. Il suffit à cet effet d'employer des aubes en métal. Leur résistance est si faible comparativement à celle du liquide que toute l'aube se trouve bien au même potentiel. On obtient ainsi immédiatement les lignes de courant (fig. 3). Là encore, on a tracé leurs orthogonales afin de vérifier le réseau et de le compléter au besoin.

Pour résoudre le problème No. 3, nous faisons de nouveau correspondre φ à Ψ et ψ à Φ ; nous employons donc des aubes métalliques auxquelles nous faisons arriver le courant de manière à constituer autant de sources de même potentiel. Le flux émanant de ces sources doit s'écouler en partie vers l'extérieur, en partie vers le centre et cela dans un rapport bien déterminé; il faut par suite choisir convenablement le rapport entre le potentiel du bord et celui du centre. Nous y parvenons en remarquant qu'entre la circulation à la périphérie Γ_1 , celle au centre Γ_2 et la circulation Γ autour d'une aube existe la relation

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 = n \Gamma, \quad \dots \dots \dots (1)$$

où n désigne le nombre d'aubes. Nous prenons tout d'abord un rapport quelconque entre les deux potentiels et relevons quelques lignes équipotentielles (qui correspondent ici aux lignes de courant du fluide) ce qui permet de calculer les circulations Γ_1 , Γ_2 et Γ . Nous modifions au besoin le rapport admis, jusqu'à ce que la condition (1) soit remplie. Ces tâtonnements conduisent plus rapidement au but qu'on pourrait le penser à première vue, car certaines parties des courbes se déplacent fort peu, ce qui évite la répétition complète de tout le calcul. C'est ainsi qu'ont été obtenues les courbes de la figure (4).

La figure (5) indique à gauche le résultat de l'addition des réseaux No. 1 et 2 dans un cas concret. Pour déterminer avec précision les points de vitesse nulle (Staupunkte) sur le contour, il est nécessaire de tracer la courbe des vitesses v_1 et v_2 le long du contour. Les points où ces vitesses sont égales et de signes contraires sont les points cherchés. La partie de droite de la figure représente le résultat de l'addition des trois réseaux 1, 2, 3 lorsqu'on choisit la circulation Γ de manière à ramener le point de vitesse zéro à l'extrémité arrière du profil.

5. Considérons maintenant le cas des roues de turbomachines. Les problèmes No. 1 et 3 subsistent sans modification, par contre les solutions du problème No. 2 ne sont plus applicables ici en raison de la rotation de la roue; en effet, la fonction de courant ψ du fluide ne répond plus à l'équation de Laplace:

$$\Delta \psi = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

mais bien à l'équation

$$\Delta \psi = c, \quad \dots \dots \dots (3)$$

On sait que c est égal au double de la vitesse angulaire de la roue. Pour résoudre expérimentalement la difficulté, nous remarquerons que l'équation (3) admet une solution de la forme

$$\psi = \psi_1 + \frac{c \rho^2}{4}$$

dans laquelle ρ désigne la distance d'un point quelconque au centre et où ψ_1 est une fonction qui satisfait à l'équation

$$\Delta \psi_1 = 0,$$

qui s'annule à l'infini et qui prend le long du contour C des valeurs données par la relation:

$$\psi_{1c} = \psi_c - \frac{c \rho^2}{4}.$$

Dans le problème hydrodynamique, ψ_c est une constante qui peut toujours être prise égale à zéro. Par suite, si dans l'analogie électrique, nous assimilons ψ_1 à Φ , nous sommes amenés à résoudre un quatrième problème, savoir: trouver la distribution du potentiel dans un champ indéfini contenant un système d'aubes le long desquelles le potentiel varie proportionnellement à ρ^2 . Il n'est évidemment pas possible de réaliser expérimentalement cette dernière condition de manière rigoureuse, mais on peut disposer le long des aubes un certain nombre d'électrodes, une dizaine par exemple, dont les potentiels satisfassent à la condition requise. Il suffit de tendre à cet effet, parallèlement au fil de pont dont les extrémités correspondent aux potentiels extrêmes, un second fil et de relier les électrodes aux points convenables de ce fil auxiliaire, points dont on détermine la position à l'aide du pont (fig. 1). Il reste à établir que cette série d'électrodes donne un champ assimilable avec une approximation suffisante au champ théorique, cela aussi malgré l'effet des parois de la cuve qui limitent le champ expérimental alors qu'il faudrait opérer dans un champ infini. A cet effet, j'ai étudié le cas d'une aube rectiligne unique pour lequel une solution analytique complète peut être déduite de résultats donnés par LAMB (Hydrodynamics, 3^e édit., p. 78 et 84) pour les cas d'un cylindre de section elliptique animé d'un mouvement de translation ou tournant autour du centre¹⁾.

La figure 7 montre le résultat obtenu; les courbes expérimentales sont tracées en trait plein, les courbes déduites de la solution analytique sont indiquées en trait pointillé ou en trait mixte lorsqu'elles coïncident avec les courbes expérimentales. L'examen de la figure montre que dans le voisinage de l'aube l'allure des courbes expérimentales est identique à celle des courbes théoriques. Vers l'extérieur, l'effet du bord se fait naturellement sentir, mais en opérant avec des aubes de dimensions convenablement choisies par rapport au diamètre de la cuve, il est toujours possible de maintenir l'erreur résultant de ce fait dans des limites convenables.

En présence de ces résultats favorables, j'ai poursuivi l'étude du même problème dans le cas d'un système d'aubes quelconques; la fig. 6 montre que la multiplicité des électrodes le long des aubes n'entraîne pas de complication exagérée²⁾. La figure (8) donne à gauche les

¹⁾ Une solution directe a été aussi indiquée par CALDONAZZO (voir *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik*, herausgeg. von v. KÁRMÁN & LEVI-CIVITA).

²⁾ On reconnaît, en arrière, le pantographe qui dans tout ce travail nous a permis de reporter très commodément sur le papier la position des points observés.

courbes expérimentales ainsi obtenues et correspondant à diverses valeurs de ψ_1 . On a tracé ici aussi les trajectoires orthogonales, de manière à pouvoir rectifier au besoin les points expérimentaux incertains. La partie droite de la même figure donne le réseau des courbes

$$\psi = \psi_1 + \frac{c\rho^2}{4} = \text{const.}$$

Enfin la figure 9 indique pour un cas concret le résultat de l'addition des réseaux 1 et 4, à gauche, et des réseaux 1, 3 et 4, à droite, lorsqu'on choisit l'intensité du mouvement 3 de manière à ramener au bout extérieur de l'aube, le point de vitesse zéro.

Bien que les figures de ce travail ne correspondent à aucune application déterminée — elles ont uniquement pour but d'établir l'utilité de la méthode proposée —, je signale en passant l'allure générale des courbes de la figure 9 (à droite) qui est intéressante. Malgré le mouvement de circulation autour de l'aube ramenant le point de vitesse zéro au bout de celle-ci, les lignes de courant la contournent en rentrant partiellement dans la roue et en créant derrière l'aube des conditions éminemment favorables à la formation de tourbillons.

Il est naturel de se demander si la méthode ne pourrait pas être étendue au problème à trois dimensions. La réponse est certainement affirmative en ce qui concerne le premier problème envisagé ici; pour les problèmes 2 et 3 les conditions expérimentales deviendront assez délicates; en ce qui concerne l'équivalent dans l'espace du problème 4, une étude complémentaire est nécessaire avant qu'on puisse se prononcer.

LISTE DER KONGRESSTEILNEHMER

Organisationskomitee:

1. Meissner, E., Dr., Prof. E.T.H., Präsident	Zürich
2. Andreae, C., Prof., Rektor E.T.H.	Zürich
3. Debye, P., Dr., Prof. E.T.H.	Zürich
4. Meyer-Peter, E., Prof. E.T.H.	Zürich
5. Prášil, F., Dr., Prof. E.T.H.	Zürich
6. Roš, M., Dr., Prof. E.T.H.	Zürich
7. Stodola, A., Dr., Prof. E.T.H.	Zürich
<hr/>	
8. Ackeret, Jak., dipl. Ing.	Göttingen
9. d'Adhémar, ancien Prof. à la faculté des Sciences	Lille
10. Adrian, W., Dr. Ing.	Berlin-Steglitz
11. Aebi, Max, dipl. Ing.	Zollikon
12. Albelda, J., Ing.	Huelva, (Spanien)
13. Alt, H., Dr., Prof. T.H.	Dresden
14. Baes, L., Prof. à l'Université	Bruxelles
15. Baeschlin, F., Prof. E.T.H.	Zürich
16. Barillon, E., Ing.	Paris
17. Bažant, Zd., Dr., Prof. à l'Ecole Polytechnique	Prague, (Tchécoslovaquie)
18. Beggs, George E., Prof. University	Princeton, (U.S.A.)
19. Bénard, H., Prof. à l'Université	Paris
20. Bergman, St., Dr. Ing.	Częstochowa (Pologne)
21. Bertschinger, D., Ing.	Zürich
22. Betz, A., Dr. Ing.	Göttingen
23. Beyer, K., Prof. T.H.	Dresden
24. Biezeno, C. B., Prof.	Delft (Holland)
25. Biezeno, Frau	Delft (Holland)
26. Blaess V., Prof. T.H.	Darmstadt
27. Blenk, H., Dr. phil.	Berlin-Adlershof
28. ten Bosch, M., Prof. E.T.H.	Zürich
29. Frau ten Bosch	Zürich
30. Bouligand, G., Prof.	Poitiers
31. Brandt, H., Prof. an der T.H.	Aachen
32. Braun, E., Dr., Prof. T.H.	Stuttgart
33. Bridgmann, P. W., Prof. Harvard University	Cambridge (Mass.)
34. Brodetsky, S., Dr., Prof.	Leeds (England)

LISTE DER KONGRESSTEILNEHMER

35. Van den Broek, J. A., Prof., University	Michigan (U.S.A.)
36. Broszko, M., Prof. T.H.	Warschau
37. Bruckner, V., Ing.	Bukarest (Rumanien)
38. Brunner, Ing., Mat. Prof. A.	Zurich
39. Buchler, J., Ing.	
40. Büchi, A., Obering.	Winterthur
41. Buhl, A., Prof.	Toulouse
42. Burgers, J. M., Dr., Prof.	Delft (Holland)
43. Busemann, A., Dr. Ing.	Göttingen
44. Bușila, C. D., Prof. à l'École Polytechnique	Bukarest (Roumanie)
45. Camichel, Ch., Correspondant de l'Institut	Toulouse
46. Carathéodory, C., Universitätsprof.	München
47. Cavalli, E., Prof. Generale	Torino
48. Critikos, Dr. Ing.	
49. Curti, P., Dr. Ing.	Thun (Schweiz)
50. Deutsch, dipl. Ing.	Berlin
51. Dinner, H., Ing.	Winterthur
52. Domke, O., Prof. T.H.	Aachen
53. Driessen, M. G., Dipl.-Ing.	Wettingen (Schweiz)
54. Droste, J., Dr., Lector of mathematics, University	Leiden
55. Dubois, F., Dr. Ing.	Schaffhausen
56. Dubs, R., Obering.	Zollikon (Schweiz)
57. Dumas, A., Ing., Prof.	Lausanne
58. van den Dungen, J. H. A., Ing., Prof.	Bruxelles
59. Eicher, F., Ing.	Winterthur
60. Egg, H., Direktor M.F.O.	Oerlikon
61. Eggenschwyler, A., Dr. Ing.	Zurich
62. Eichelberg, G., Dr. Ing.	Winterthur
63. Eichinger, A., Dipl.-Ing.	Zurich (Zagreb)
64. Eisner, F., Regierungsbaumeister	Berlin-Halensee
65. Ekmann, V. W., Prof.	Lund (Schweden)
66. Miss Elam, C.F., D. Sc. M.A.	London
67. v. Essen, W., dipl. Ing.	
68. Etienne, R., Ing.	Winterthur
69. Faber, P., Ober-Ing.	Baden (Aargau)
70. Federhofer, K., Dr., Prof.	Graz
71. Frau Federhofer	Graz
72. Fehr, H., Prof., Université	Genève
73. Feitknecht, W., Dr. phil., Assistent chem. Laboratorium	Bern
74. Fikri, Prof.	Konstantinopel
75. Fillunger, P., Dr., Prof.	Wien
76. Flügge, W., Assistent T.H.	Dresden
77. Föppl, O., Prof.	Braunschweig
78. Frau Föppl	Braunschweig
79. Föttinger, H., Dr., Ing., Prof.	Berlin-Wilmersdorf
80. Fokker, A. D., Dr., Prof.	Delft (Holland)
81. Forner, G., Dr. Ing., Privat-Dozent	Berlin
82. Frael, J., Prof. E.T.H.	Zurich

LISTE DER KONGRESSTEILNEHMER

83. v. Freudenreich, J., Dr. Ing.	Baden (Aargau)
84. Fuchs, S., Dr. Ing., Hon. Dozent	Lemberg (Polen)
85. Fueter, R., Dr., Prof.	Zürich
86. Fujiwhara, S.	Tokyo (Japan)
87. Gawne, J. O., Commander	London
88. Mrs. Gawne	London
89. Gehler, Dr. Ing., Prof.	Dresden
90. Geiger, J., Dr. Ing.	Augsburg
91. Gerdien, H., Dr. phil., Prof.	Berlin-Grunewald
92. Frau Gerdien	Berlin-Grunewald
93. Glauert, H., M.A. Fellow of Tr. Coll.	Cambridge (England)
94. Mrs. Glauert	Cambridge (England)
95. Glogg, A. W., tech. Redaktor	Zürich
96. Graemiger, Obering.	Zürich
97. Grammel, R., Dr., Prof.	Stuttgart
98. Frau Grammel	Stuttgart
99. Greinacher H., Dr., Prof. an der Universität	Bern
100. Griffith, A., Dr.	London
101. Gugler, H., Prof. E.T.H.	Zürich
102. Guhler, Ing.	Zürich
103. Gysen, E., Dr. Ing.	Bruxelles
104. Hahn, E., Prof.	Nancy
105. Hahn, Madame	Nancy
106. Haller, Ing.	Zürich
107. Hamel, G., Dr., Prof.	Berlin
108. Hampl, M., Dr., Assistent T.H.	Prag
109. Hawranek, A., Dr. Ing., Prof.	Brünn
110. Hencky, H., Dr. ing.	Delft (Holland)
111. Hirsch, A., Dr., Prof. E.T.H.	Zürich
112. Höhn, E., Obering.	Zürich
113. Hoffmann, G., Ing.	Baden
114. Honegger, E., Dr. Ing., Privat-Dozent E.T.H.	Zürich
115. Hopf, L., Prof.	Aachen
116. Hort, W., Prof.	Berlin
117. Huber, M. T., Dr. Ing., Prof.	Lwów
118. Huggenberger, Dr. Ing.	Zürich
119. Jaffé, G., Dr., Prof. an der Universität	Gießen
120. Janicki, W., dipl. Ing.	Zürich
121. Jaquet, E., Dr. Ing.	Zürich
122. Jeffreys, H., Dr.	Cambridge (England)
123. Jeheber, R., Ing.	Winterthur
124. Jenny, H., Assistent, E.T.H.	Zürich
125. Jenny, J., Ing.	Thun
126. Jöher, Ing.	Baden
127. Jouguet, E., Prof.	Paris
128. Juvet, G., Prof.	Neuchâtel
129. Kampé de Fériet, J., Prof.	Lille
130. v. Kármán, Dr., Prof.	Aachen

LISTE DER KONGRESSTEILNEHMER

131. Karrer, J., Ob.-Ing.	Zurich
132. Keller, A., Ing.	
133. Kempf, G., Dr. Ing.	Hamburg
134. Kérin, A., Dr. Prof.	Konstantinopel
135. Klein, R., Direktor	Winterthur
136. Kluge, J., Dr. Ing.	Dresden
137. Koch, J. J., Ing.	Delft (Holland)
138. Kögler, F., Dr. Ing., Prof.	Freiberg (Sachsen)
139. Frau Kögler	Freiberg (Sachsen)
140. Koenigs, G., Membre de l'Academie des Sciences	Paris
141. Kohler, C., Ing. bei Escher Wyß	Zurich
142. Kollros, L., Dr., Prof. E.T.H.	Zurich
143. König, M., Ing.	Rugby (England)
144. Körner, K., Prof., Dr.	Prag
145. Koning, C., Ing.	Amsterdam
146. Koning, Frau	Amsterdam
147. Krebitz, J., Privat-Dozent	Graz
148. Kummer, W., Dr., Prof. E.T.H.	Zurich
149. Lavanchy, Ing.	Winterthur
150. Leon, A., Dr., Prof. T.H.	Graz
151. Levi-Civita, T., Prof.	Roma
152. Levi-Civita, Madame	Roma
153. Lockspeiser, B.	Farnborough (England)
154. Löbell, F., Assistent T.H.	Stuttgart-Cannstadt
155. Lorenz, H., Prof., Dr.	Danzig
156. Frau Lorenz	Danzig
157. Lorenz, R., Dr.	Essen-Ruhr
158. Low, A. R., Mayor	London
159. Marchi, Prof.	Pisa
160. Masing, G., Dr. phil.	Berlin
161. Mayer, R., Dr. Ing., Privat-Dozent	Karlsruhe
162. Mayor, B., Prof.	Lausanne
163. Memmler, K., Prof.	Berlin-Dahlem
164. Frau Memmler	Berlin
165. Meyer, A., Ing., Direktor	Baden
166. Miche, R., Dr., Prof.	Cairo
167. v. Mises, R., Dr., Prof.	Berlin
168. Mousson, H., Dr., Reg.-Rat	Zurich
169. Nadai, Dr., Ing.	Göttingen
170. Frau Nadai	Göttingen
171. Nedoma, A., Prof.	Brno
172. Ogura, Ing.	z. Zt. Zurich
173. Ono, A., Prof.	Fukuoka (Japan)
174. Oseen, C. W., Prof.	Upsala
175. Paris, A., Prof.	Lausanne
176. Paschoud, C., Prof.	Lausanne
177. Pasternak, P., Dr. Ing., Privat-Dozent E.T.H.	Zürich
178. Perrier, A., Prof.	Lausanne

LISTE DER KONGRESSTEILNEHMER

179. Peter, H., Ziviling.	Zürich
180. Pfeiffer, F., Dr., Prof.	Stuttgart
181. Pfeiffer, Frau	Stuttgart
182. Pflieger-Härtel, Dr.	Heidenheim (Deutschland)
183. Pistol Kors, E., alt Prof.	Kowno (Litauen)
184. Plancherel, M., Dr., Prof. E.T.H.	Zürich
185. Platrier, Ch., Répét. de Méc.	Paris
186. Pöschl, T., Dr., Prof.	Prag
187. Pohlhausen, E., Prof.	Danzig
188. Poole, E. G. C., Dr. phil.	Oxford (England)
189. Prandtl, L., Dr., Prof.	Göttingen
190. Pröll, Prof., Dr.	Hannover
191. de Quervain, Dir., vertreten durch Gaßmann, Fr., Dr. math.	Zürich
192. Quiby, Obering.	Zürich
193. Ratzersdorfer, Dr., Privat-Dozent	Breslau
194. Rehbock, Dr., Prof. an der T.H.	Karlsruhe
195. Reißner, H., Dr. Ing., Prof. an der T.H.	Charlottenburg
196. Riabouchinsky, Dr.	Paris
197. Riabouchinsky, Madame	Paris
198. Risser, R., Répétiteur à l'Ecole Polytechnique	Paris
199. Rohn, A., Dr. Ing., Prof., Schulratspräsident	Zürich
200. Frau Roš	Zürich
201. v. Ryswyk	
202. Sachs, G., Dr. Ing.	Berlin-Dahlem
203. Saigo, T., Ing.	z. Zt. Zürich
204. v. Sanden, K., Prof.	Karlsruhe (Baden)
205. Schäfer, E., Dr.	Berlin-Schmargendorf
206. Scheitlin, E., Ober-Ing.	Winterthur
207. Schilhausl, M., Ing.	München
208. Schiller, L., Prof.	Leipzig
209. Schleicher, F., Dr. Ing., Privat-Dozent	Karlsruhe (Baden)
210. Schmid, E., Dr.	Frankfurt a. Main
211. Schmid, W.	
212. Schmidt, E., Prof., Dr. Ing.	Danzig
213. Schuler, M., Dr. Ing., Privat-Dozent	Göttingen
214. Schwegler, O., Ing.	Zürich
215. Schwerin, E., Dr. Ing., Privat-Dozent	Berlin-Halensee
216. Schwyzer, H., Dr. Ing.	Cairo
217. Seewald, Fr., Dr.-Ing.	Berlin-Adlershot
218. Seidl, E., Dr. Ing., Geheim-Rat	Berlin
219. Signorini, A., Prof., Dr. Ing.	Napoli
220. Sochaczewer, D.,	
221. Soderberg, C. R., Mechanical Engineer	Ulföhamn (Schweden)
222. Solberg, H.	Oslo
223. Sörensen, E., dipl. Ing.	Karlsruhe (Baden)
224. Spannhake, W., Prof.	Karlsruhe (Baden)
225. Spieß, P., Ober-Ing.	Zollikon
226. Stager, H., Dr. phil.	Ennetbaden (Aargau)

LISTE DER KONGRESSTEILNEHMER

227. Stoneley, R., Assistant-Lecturer	Leeds (England)
228. Streiff, C. F., Ing.	Vevey (Schweiz)
229. Streuli, A., Dr., Regierungsrat-Präsident	Zurich
230. Strohl, J., Prof. an der Universität	Zurich
231. Sulzberger, G., Kontroll-Ing.	Bern
232. Suter, E., Dr. Ing.	Baden (Aargau)
233. Swyngedauw, R., Prof., Directeur de l'Institut élect.-méc.	Lille
234. Täuber, K. P., Fabrikant	Zurich
235. Taylor, G. J., Prof.	Cambridge (England)
236. Tchalycheff, K., Dr., Prof. à l'Université	Zagreb (Jugoslavien)
237. Thalau, K., Dr. Ing.	Berlin-Adlershof
238. Théodoridès, Ph., Dr. Ing., Prof. T.H.	Athen
239. Mme. Théodoridès	Athen
240. Thomann, R., Prof.	Lausanne
241. Timoshenko, St., Research Ing.	Wilkesburg (Pa., U.S.A.)
242. Mrs. Timoshenko	Wilkesburg (Pa., U.S.A.)
243. Trefftz, E., Prof.	Dresden
244. Tzénoff, J., Prof.	Sofia (Bulgarien)
245. Ursiny, M., Ing., Prof.	Brunn
246. Vâlcovici, V., Prof.	Temesvar (Rumanien)
247. Valenta, J., Dr. Ing., Landesbaurat	Brunn (C.S.R.)
248. Wagner, Fr., Prof.	Bregenz
249. Weibull, W., Prof.	Stockholm
250. Weidmann, H., Ing.	Zurich
251. Weinstein, A., Dr. phil.	Roma
252. Weissenberg, K., Dr., Privat-Dozent	Berlin
253. Wilhelm, E., Dipl.-Ing.	Winterthur
254. Wimperis, H. E., Dir. of Sc. Research	London
255. Witoszynski, C., Prof.	Varsovie (Pologne)
256. Wolf, K., Dr., Prof.	Wien
257. Wolff, E. B., Dr., Prof.	Bussum
258. Wolff, Frau	Bussum
259. v. Wurstemberger, F., Ober-Ing.	Zurich
260. Wyß, Th., Dr. Ing., Privat-Dozent	Danzig-Langfuhr
261. Yamada	Kobe (Japan)
262. Yoshida, Dr. Ing.	z. Zt. Zurich
263. Yosimizo, Ing.	z. Zt. Zurich
264. Yoshida, H., Ing., Dozent T.H.	Fukui (Japan)
265. Zaremba, St., Prof.	Cracovic (Pologne)
266. Zeilon, N., Dozent	Upsala (Schweden)
267. Zerkowitz, G., Dr. Ing., Prof.	Munchen
268. Frau Zerkowitz	Munchen
269. Zingg, Ing., Rédacteur	Zurich
270. Zoelly, A., Direktor bei Escher Wyß	Zurich
271. Zoelly, R., Dr. Ing.	Zurich
272. Zollikofer-Gemperle, H., Dipl.-Ing.	Zurich

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Vorwort des Herausgebers	V
Kongreß-Bericht	VII
 Allgemeine Vorträge:	
Meissner, E.: Elastische Oberflächen-Querwellen	3
Jouguet, E.: La Théorie thermodynamique de la propagation des explosions	12
v. Kármán, Th.: Ueber elastische Grenzzustände	23
Debye, P.: Molekulare Kräfte und ihre Deutung	33
Taylor, G. J.: The Distortion of Single Crystals of Metals	46
Bridgman, P. W.: Some Mechanical Properties of Matter under High Pressure	53
Prandtl, L.: Ueber die ausgebildete Turbulenz	62
Camichel, C.: Sur la théorie des coups de bélier	75
Jones, B. M.: The Control of Stalled Aeroplanes	86
Levi-Civita, T.: Sur les chocs dans le problème des trois corps	96
 Sektionsvorträge:	
A. Sektion I: Allgemeine Mechanik.	
Roy, L.: Sur le potentiel thermodynamique interne des lignes élastiques	109
van den Dungen, F. H.: Les équations intégrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations	113
Hencky, H.: Ternäre orthogonale Transformationen und ihre Anwendungen in der Theorie der Elastika	119
Miche, R.: Le calcul pratique de problèmes élastiques à deux dimensions par la méthode des équations intégrales	126
Treffitz, E.: Ein Gegenstück zum Ritz'schen Verfahren	131
Schwerin, E.: Ueber die Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts	138
Wolf, K.: Schwingungen elastischer Seile	146
Seidl, E.: Geologische, durch Zerreißvorgang entstandene Störungszonen als Probleme der angewandten Mechanik	150
Swyngedauw, M.: Note sur le changement de vitesse d'une courroie au moment où elle aborde ou quitte la poulie	154
Kampé de Fériet, J. et Foëx, G.: L'enregistrement photographique des projectiles sur plaque mobile	158
Soderberg, C. R.: Solution of Mechanical Systems Encountered in Percussion Tools	162
König, M.: Ueber ein neues Verfahren zur Ermittlung von Schwingungsperioden von Turbinenscheiben	173
Bouligand, G.: Théorie du potentiel newtonien	178
Buhl, A.: Sur les origines «stokiennes» de la cinématique	182
Mayor, B.: Sur un dispositif permettant d'enregistrer le mouvement d'un système animé d'une translation quelconque	186
Kummer, W.: Die Anwendung der Theorie des Zufalls auf Probleme der Energiezufuhr in Zentralanlagen	187
Mayor, B.: Sur les relations entre la théorie des percussions et celle des systèmes arti- culés de la résistance des matériaux	192
Piccard, A. et Baes, L.: Mode expérimental nouveau relatif à l'application des surfaces à courbure constante à la solution du problème de la torsion des barres prismatiques	195

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Baes, L.: Résistance à l'écrasement et au flambement des piliers en béton fretté ...	200
Stodola, A.: Kritische Störungen elastischer Wellen infolge Nachgiebigkeit des Oelpolsters in den Lagern ...	201
Schwerin, E.: Ueber die Eigenfrequenzen der Schaufelgruppen von Dampfturbinen ...	207
Koch, J. J.: Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnell laufender Wellen ...	213
Schuler, M.: Resonanzerscheinungen beim Schlingertank ...	219
Beghin, H. et Monfraix, P.: Sur l'application de l'asservissement à la stabilisation des navires ...	225
Blenk, H.: Gekoppelte Torsions- und Biegungsschwingungen von Tragflügeln ...	231
B. Sektion II: Mechanik fester Körper.	
Weissenberg, K.: Die geometrische Strukturtheorie der Materie ...	243
Ono, A.: Zum Gleitwiderstand des Kristalls ...	247
Schmid, E.: Zur quantitativen Beschreibung der plastischen Einkristalldehnung ...	251
Elam, C. F.: Some properties of Gold, Silver and Copper Crystals ...	258
Perrier, A. et de Mandrot, R.: Elasticité et symétrie du quartz aux températures élevées ...	260
Sachs, G.: Beitrag zum Härteproblem ...	266
Pöschl, Th.: Ueber strenge Lösungen aus der Theorie der Bogenträger ...	272
Signorini, A.: Sur la statique du béton armé ...	278
Hawranek, A.: Allgemeine Theorie der Wirkung von Querriegeln bei zweippigen Bogenbrücken ...	284
Mayer, R.: Die seitliche Knicksicherheit halboffener Bogenbrücken bei Fehlen einer elastischen Querstützung ...	294
Beggs, G. E.: The Use of Models in the Solution of Indeterminate Structures ...	301
Kreibitz, J.: Die günstigste Form statisch unbestimmter Bogenträger ...	305
Probst, E.: Untersuchungen über den Einfluß häufig wiederholter Belastungen auf Beton und Eisenbeton ...	311
Roš, M. et Eichinger, A.: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr ...	315
Föppl, O.: Die Dämpfung, die bei der Schwingungsbeanspruchung von Metallen auftritt, in Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit ...	328
Masing, G.: Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing ...	332
Nádai, A.: Versuche über die Fließgrenze des Eisens ...	336
Kögler, F.: Ergebnisse neuer Versuche über die Druckverteilung im Baugrunde ...	342
Honegger, E.: Metallerosion durch Wasser und Dampf ...	347
Memmler, K.: Neuere experimentelle Beiträge zur Frage der Knickfestigkeit ...	357
Gehler, W.: Die Spannungs-Dehnungslinie im plastischen Druckbereich und die Knick- spannungslinie ...	364
Roš, M.: Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl ...	368
Fillunger, P.: Ueber die Knickung von Stäben mit Schneidenlagerung ...	379
Platrier, Ch.: Au sujet des pulsations critiques de torsion et de flexion ...	383
Federhofer, K.: Ueber die Berechnung der Einbeulung des gleichmäßig gedrückten Kreisringes ...	388
Wyß, Th.: Die singulären Punkte und ihre Bedeutung in den Kraftfeldern fester, elastischer Körper ...	393
Huber, M. T.: Biegeprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Platten- streifens ...	397
Eichelberg, G.: Ueber die Torsion von Schrumpfverbindungen ...	403

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Timoshenko, S.: Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail ...	407
Timoshenko, S.: Stress Concentration Produced by Fillets and Holes	419
Pasternak, P.: Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwandigen, kreisrunden Behältern	427
Eggenschwyler, Ad.: Ueber die Beanspruchungen unregelmässiger Trägerquerschnitte	434
C. Sektion III: Hydro- und Aeromechanik.	
Weinstein, A.: Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire	445
Risser, R.: Note au sujet des ondes d'émersion et d'impulsion	449
Barillon, E. G.: Rôle des vagues divergentes dans la résistance à la marche des flotteurs	457
Bouligand, G.: Sur le signe de la pression dans un liquide pesant, en mouvement irrotationnel	460
Ackeret, J.: Ueber Grenzschichtabsaugung	462
Broszko, M.: Ueber turbulente Strömung durch Röhren	465
Sörensen, E.: Potential-Strömungen durch rotierende Kreiselräder	470
Prášil, F.: Verschiedene Strömungserscheinungen	474
Föttinger, H.: Ueber die Labilität der Potentialströmungen	477
Zeilon, N.: Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem	481
Zeilon, N.: Zur Bestimmung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstands- theorie	484
Camichel, C.: Sur la méthode chronophotographique de détermination des vitesses dans les fluides liquides	488
Hamel, G.: Ein hydrodynamischer Unitätssatz	489
Bénard, H.: Sur les lois de fréquence des tourbillons alternés détachés à l'arrière d'un obstacle mobile	495
Bénard, H.: Sur l'inexactitude expérimentale, pour les liquides réels, des lois théoriques de Kármán relatives à la stabilité des tourbillons alternés dans un fluide parfait	502
Zaremba, St.: Sur une transformation du problème hydrodynamique	504
Fujiwhara, S.: An Experiment on the Behaviour of Two Vortices in Water	506
Hadamard, J.: La formation des discontinuités dans les fluides	507
Riabouchinsky, D.: Sur les singularités des mouvements fluides	512
Toussaint et Carafoli: Contribution à l'étude de l'écoulement plan des fluides ...	519
Brodetsky, S.: Discontinuous Fluid Motion Past Curved Barriers	527
Hahn, E.: Méthode expérimentale pour la résolution des équations du mouvement des fluides	532
Liste der Kongreßteilnehmer	537
Inhaltsverzeichnis	543
Autorenverzeichnis	546

AUTOREN-VERZEICHNIS

	Seite		Seite
Ackeret, J.	462	Masing, G.	332
Baes, L.	200	Mayer, R.	294
Barillon, E. G.	457	Mayor, B.	186, 192
Beggs, G. E.	301	Meißner, E.	3
Béghin, H. u. Monfraix, P.	225	Memmler, K.	357
Bénard, H.	495, 502	Miche, R.	126
Blenk, H.	231	Nádai, A.	336
Bouligand, G.	178, 460	Ono, A.	247
Bridgman, P. W.	53	Pasternak, P.	427
Brodetzky, S.	527	Perrier, A. et de Mandrot, R.	260
Broszko, M.	465	Piccard, A. et Baes, L.	195
Buhl, A.	182	Platrier, Ch.	383
Camichel, Ch.	75, 488	Pöschl, Th.	272
Debye, P.	33	Prandtl, L.	62
van den Dungen, F. H.	113	Prášil, F.	474
Eggenschwyler, Ad.	434	Probst, E.	311
Eichelberg, G.	403	Riabouchinsky, D.	512
Elam, C. F.	258	Risser, R.	449
Federhofer, K.	388	Roš, M.	368
Fillunger, P.	379	Roš, M. u. Eichinger, A.	315
Föppl, O.	328	Roy, L.	109
Föttinger, H.	477	Sachs, G.	266
Fujiwhara, S.	506	Schmid, E.	251
Gehler, W.	304	Schuler, M.	219
Hadamard, J.	507	Schwerin, E.	138, 207
Hahn, E.	532	Seidl, E.	150
Hamel, G.	480	Signorini, A.	278
Hawranek, A.	284	Soderberg, R.	162
Hencky, H.	119	Sörensen, E.	470
Honegger, E.	347	Stodola, A.	201
Huber, M. T.	397	Swyngedauw, R.	154
Jones, B. M.	86	Taylor, G. I.	46
Jouguet, E.	12	Timoshenko, S.	407, 419
Kampé de Ferriet et Foex	158	Toussaint et Carafoli	519
v. Kármán, Th.	23	Trefftz, E.	131
Koch, J. J.	213	Weinstein, A.	445
Koegler, F.	342	Weißenberg, K.	243
König, M.	173	Wolf, K.	146
Krebitz, J.	305	Wyß, Th.	393
Kummer, W.	187	Zaremba, St.	504
Levi-Civita, T.	96	Zeilon, N.	481, 484

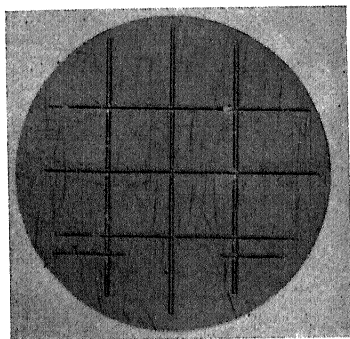


Fig. 1.

Disc cut from an Aluminium crystal marked in squares ready for compression.

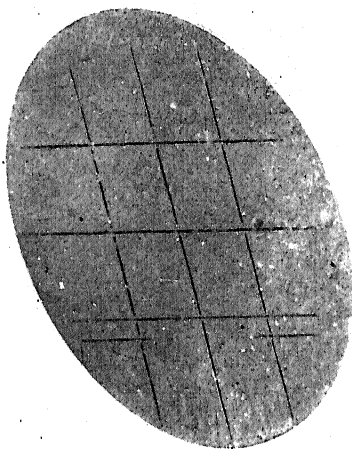


Fig. 2.

Similar disc similarly marked, photographed after compression.

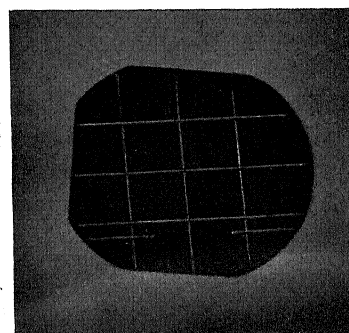


Fig. 3.

Disc cut from Iron crystal originally marked in squares, appearance after compression.

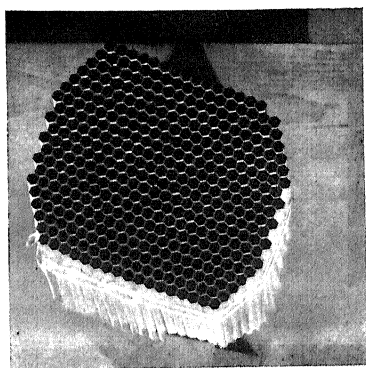


Fig. 9.

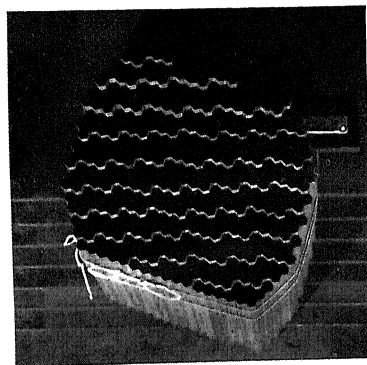


Fig. 10.

Photographs of model to represent slipping in iron crystals.

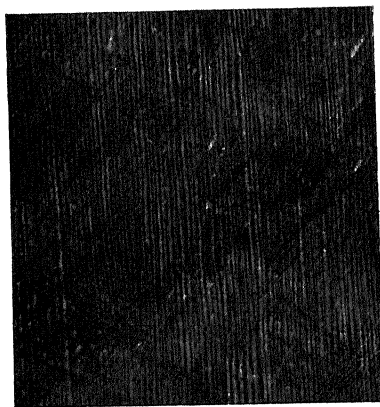


Fig. 11.

Slip lines on face of iron crystal cut parallel to direction of slip.

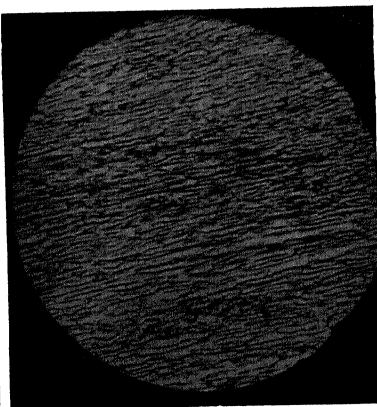


Fig. 12.

Slip lines on face of iron crystal cut at 53° to direction of slip.

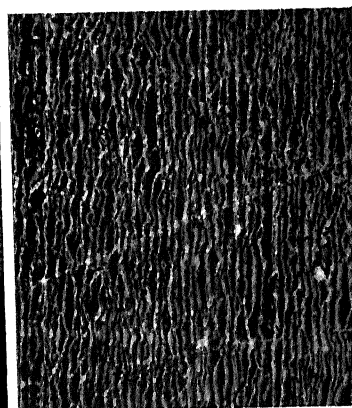
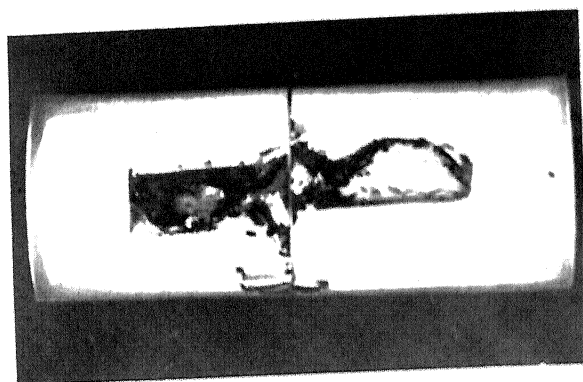


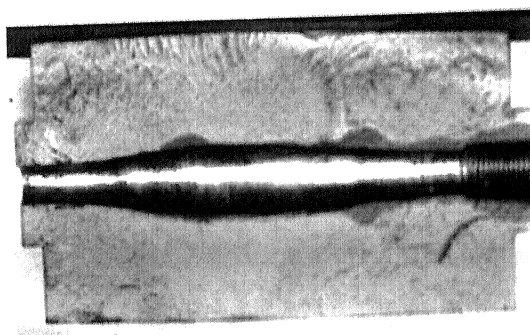
Fig. 13.

Slip lines on face of iron crystal cut at 37° to direction of slip.



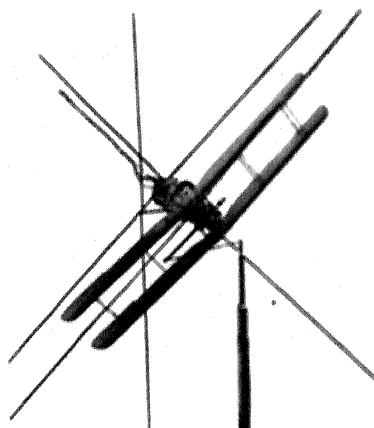
BRIDGMAN: Fig. 8.

Photograph of a hollow cylinder of quartz cut from a single crystal, showing how the internal cavity has been eroded by the application of a pressure of 12000 kg cm^{-2} to the external surface.

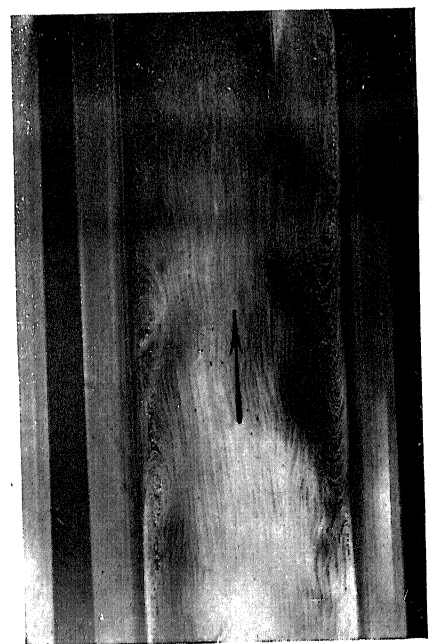


BRIDGMAN: Fig. 9.

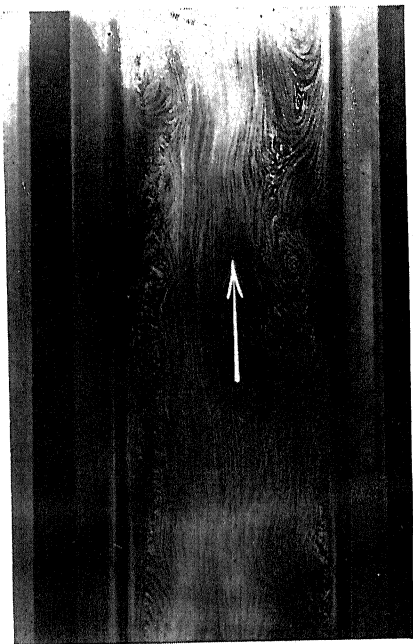
One of the halves of a cylinder of tool steel split by the application of 40000 kg cm^{-2} internal pressure



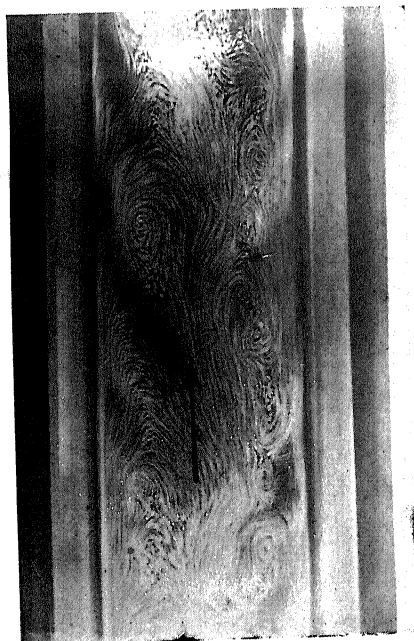
JONES: Fig. 26.



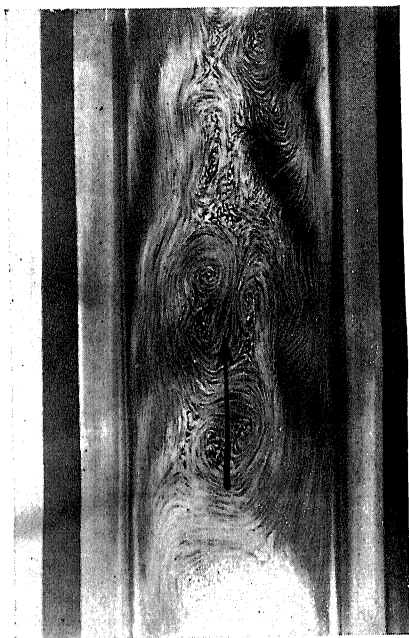
Wagengeschwindigkeit 6 cm/s



Wagengeschwindigkeit 7 cm/s



Wagengeschwindigkeit 8 cm/s



Wagengeschwindigkeit 9 cm/s

Abb. 1—4. Photographische Aufnahmen von einer turbulenten Wasserströmung.

L. PRANDTL, GÖTTINGEN

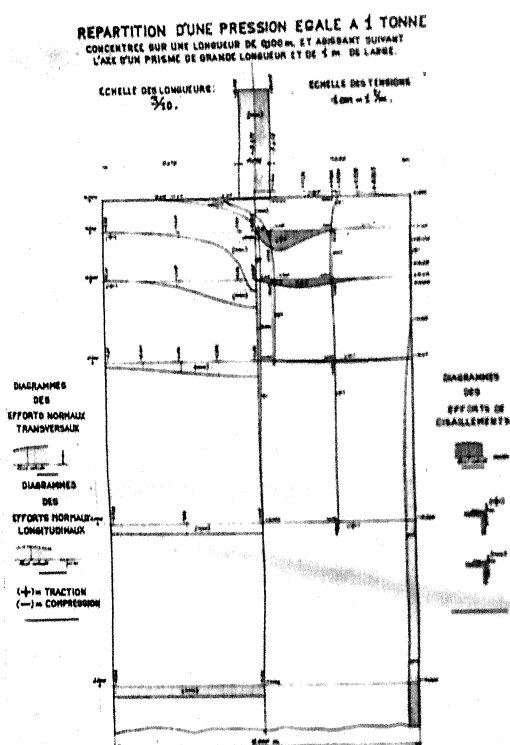


Fig. 8

ESSAI A L'ECRASEMENT D'UN PRISME QUADRATIQUE FRAGILE
ENTRE DES MACHOIRES INDEFORMABLES
(COEFFICIENT DE FROTTEMENT 0,15)

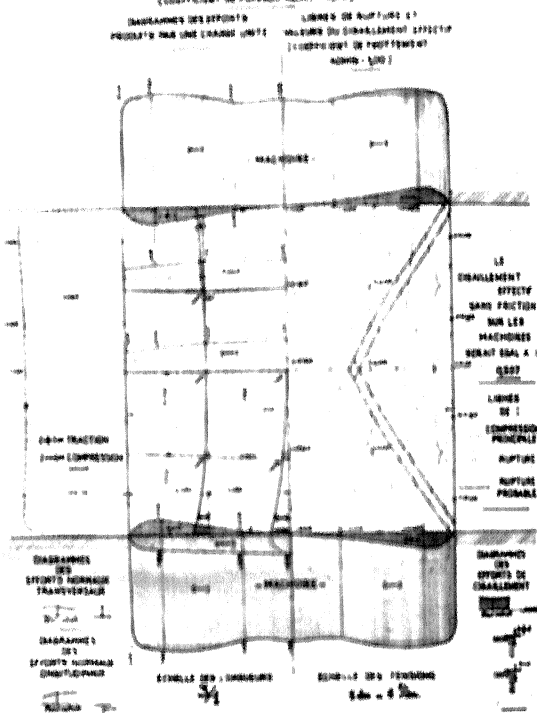
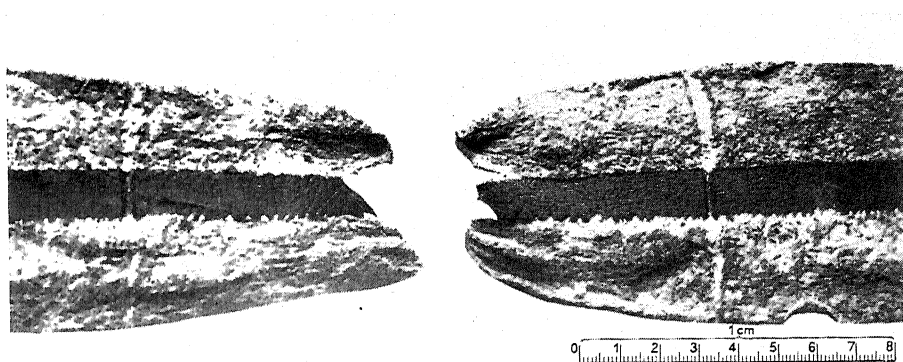
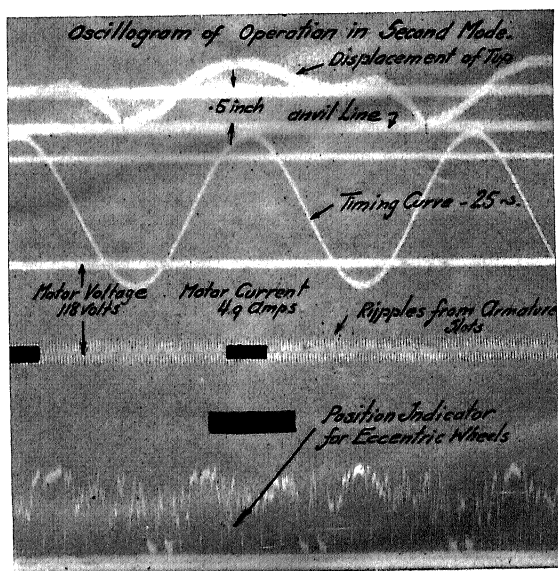


Fig. 9

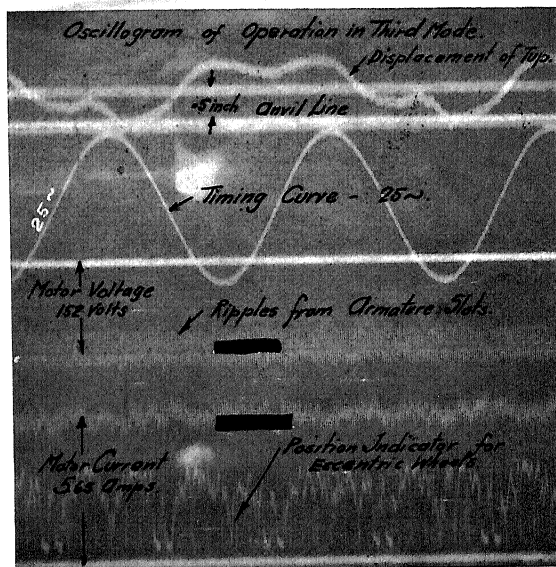


SEIDL: Abb. 3.

Querschnitt einer zerrissenen Platte von geschichtetem Metall.
Mitte Kupfer, oben und unten Blei.



C. R. SODERBERG:
Fig. 7.



C. R. SODERBERG:
Fig. 10.

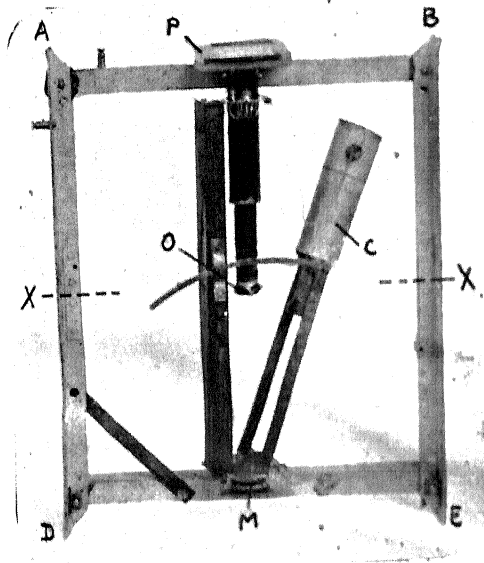


Fig. 7.

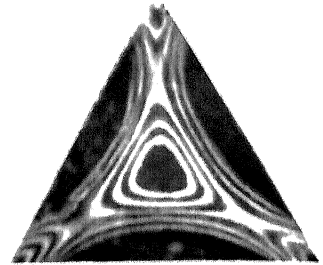


Fig. 11.



Fig. 8.

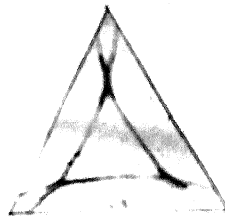


Fig. 9.



Fig. 10.

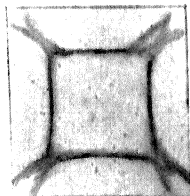


Fig. 12.

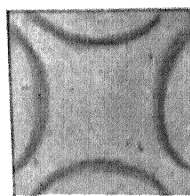


Fig. 13.

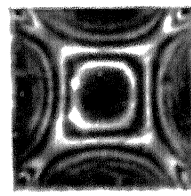
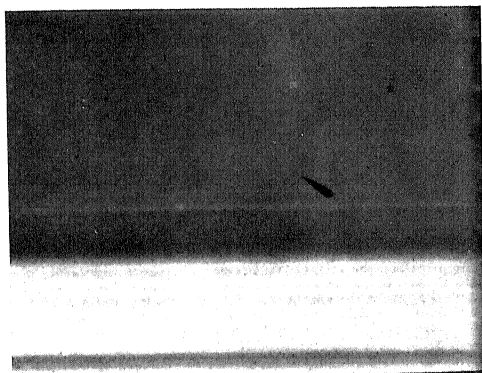
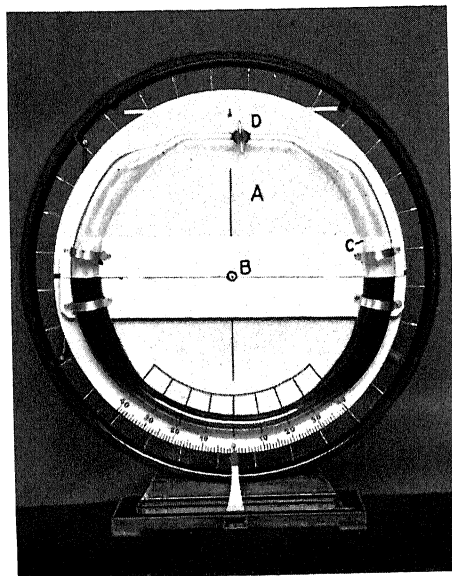


Fig. 14.

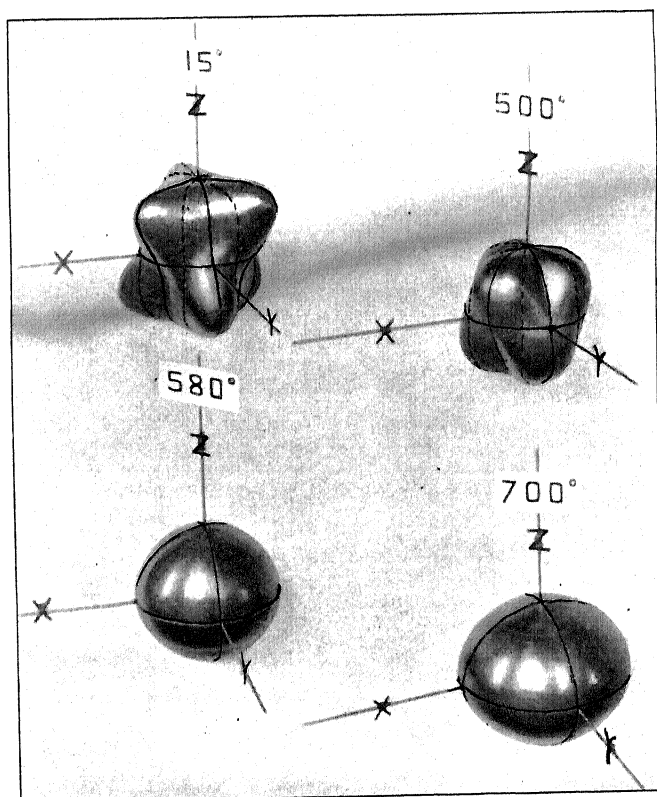


FOËX et KAMPÉ DE FÉRRIET: Fig. 2



SCHULER: Abb. 3

Vorführungsmodell zum Schlingertank
 A = schwingendes Rad; B = Schwingungsachse;
 C = Glasrohr, das zur Hälfte mit gefärbter Flüssigkeit gefüllt ist; D = Ventil zum Drosseln der Luft.



PERRIER et DE MANDROT: Fig. 3

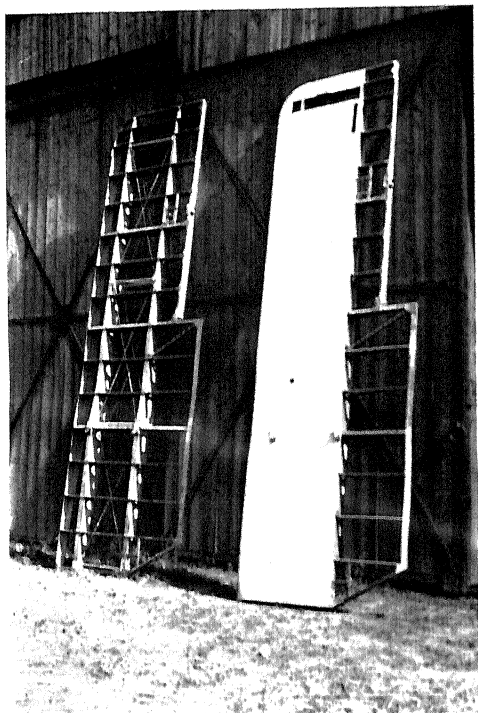


Abb. 2.

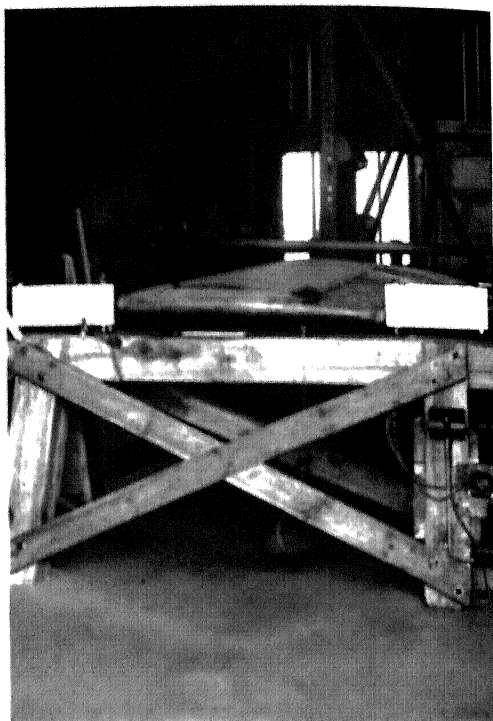


Abb. 6.



Abb. 3.

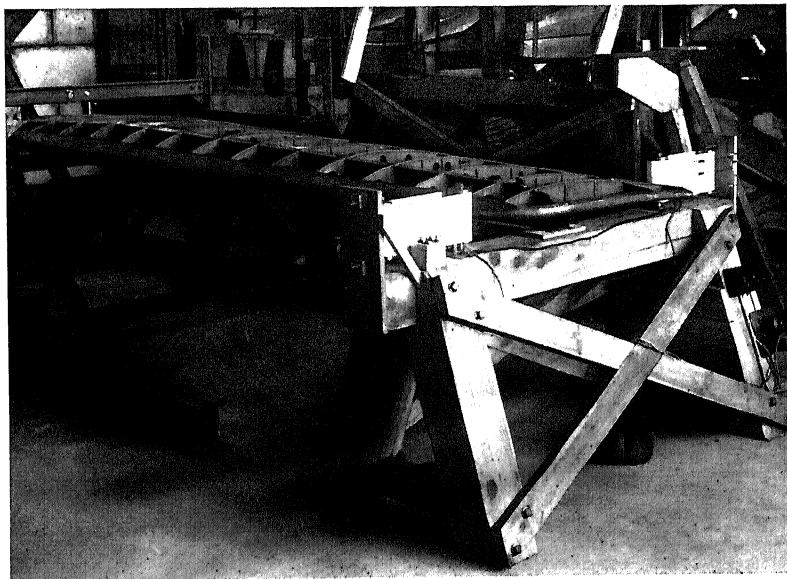


Abb. 4.

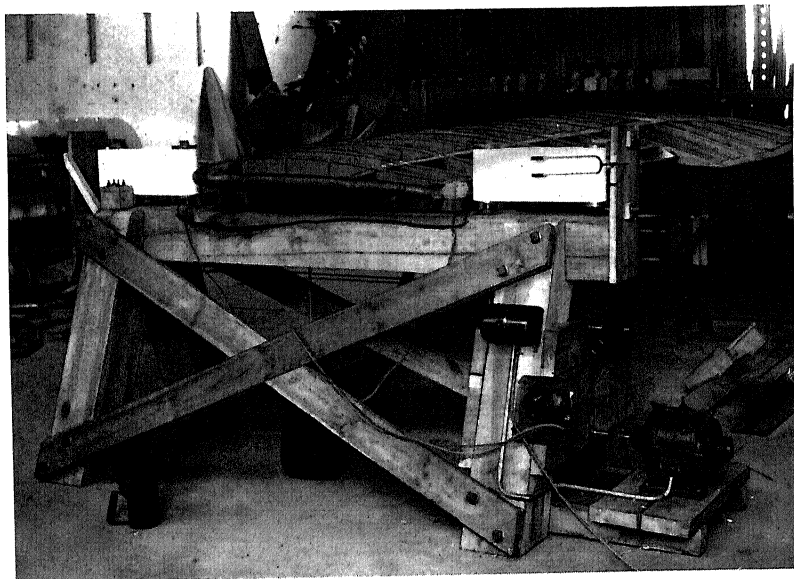


Abb. 5.

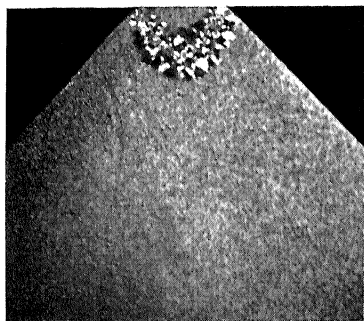


Abb. 3.
Rekristallisierter Stempелеindruck bei einem Eisenkörper.
Gegl. 800⁰, 1 st. Vergr. 25 \times .

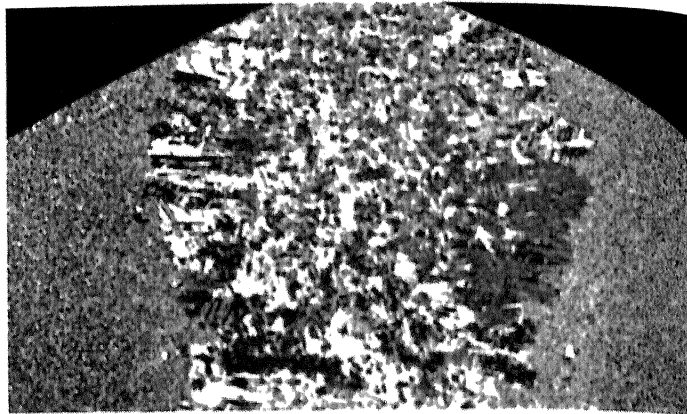


Abb. 6.
Rekristallisierter Stempелеindruck bei einem Kupferkörper.
Gegl. 900⁰, 1/2 st. Vergr. 44 \times .

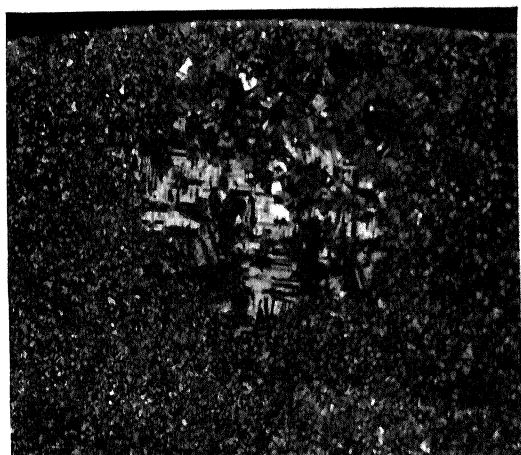


Abb. 4.
Rekristallisierter Stempелеindruck bei einem Kupferkörper.
Gegl. 850⁰, 1/2 st. Vergr. 31 \times .

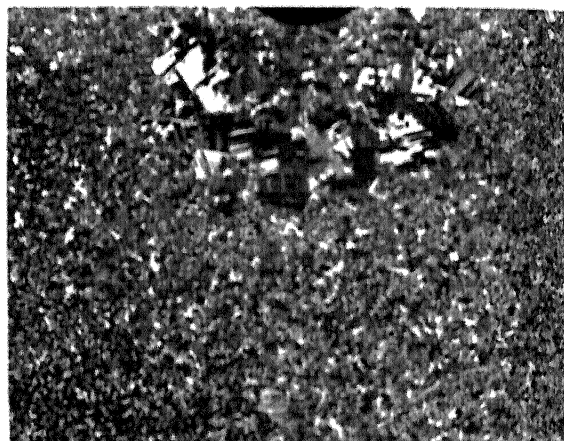


Abb. 5.
Rekristallisierter Kugeldruck bei einem Kupferkörper.
Gegl. 700⁰, 1/2 st. Vergr. 48 \times .

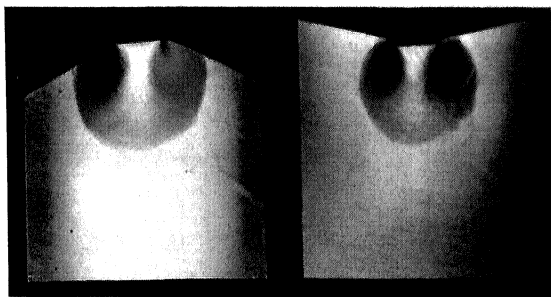


Abb. 9.
Fließfiguren auf der Aussenseite gedrückter Eisenkörper
Vergr. 1,1 \times .

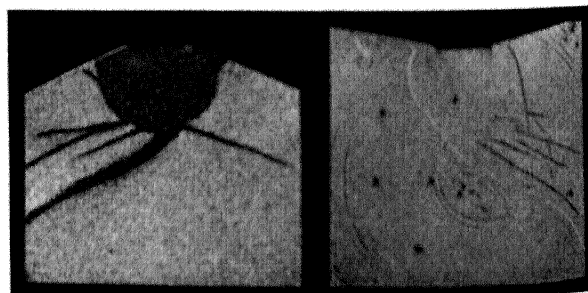
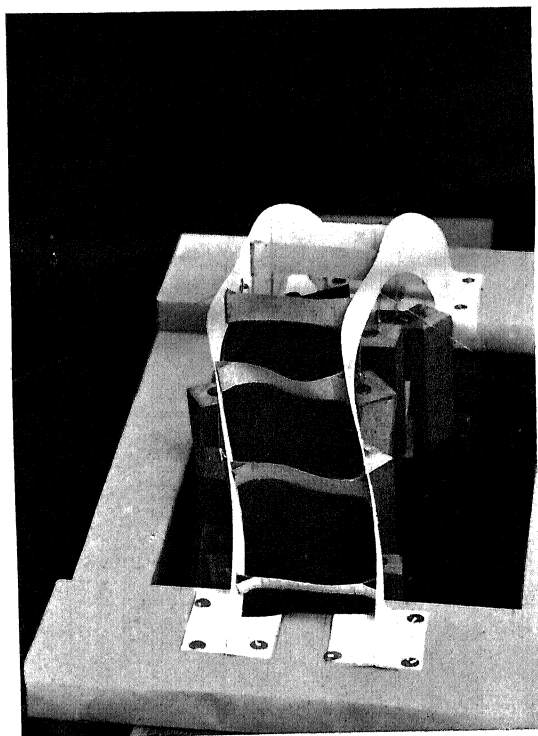
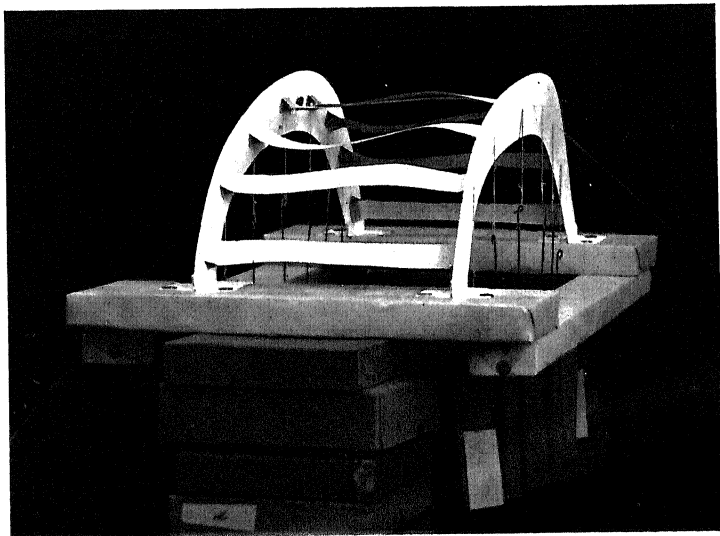


Abb. 10.
Deformierter Bereich im Innern von Eisenkörpern durch
Fry'sche Ätzung bzw. Triefätzung nachgewiesen.
Vergr. 1,2 \times .



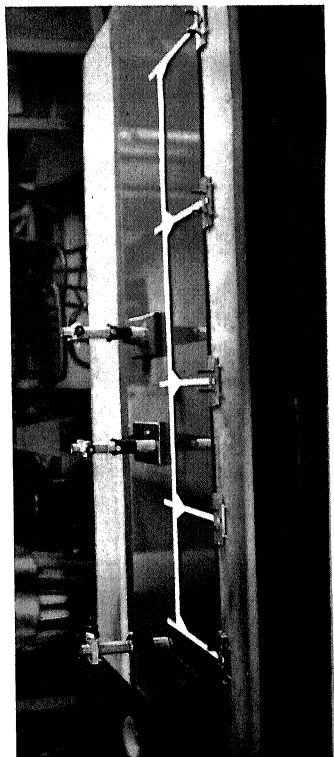


Fig. 2 and 3.

GEORGE E. BEGGS, PRINCETON, N. J. (U.S.A.)

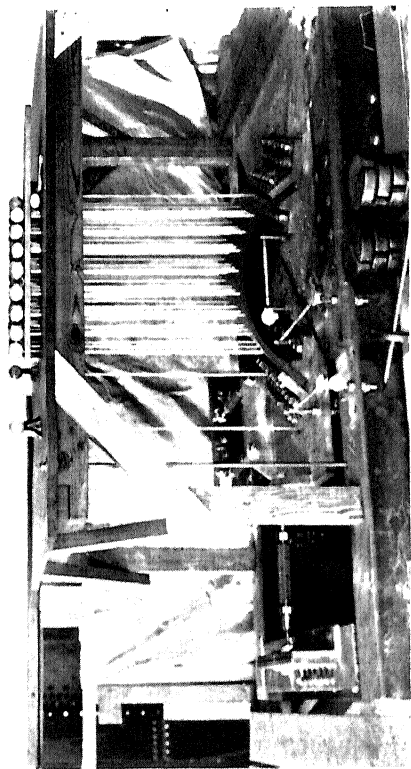


Fig. 5.

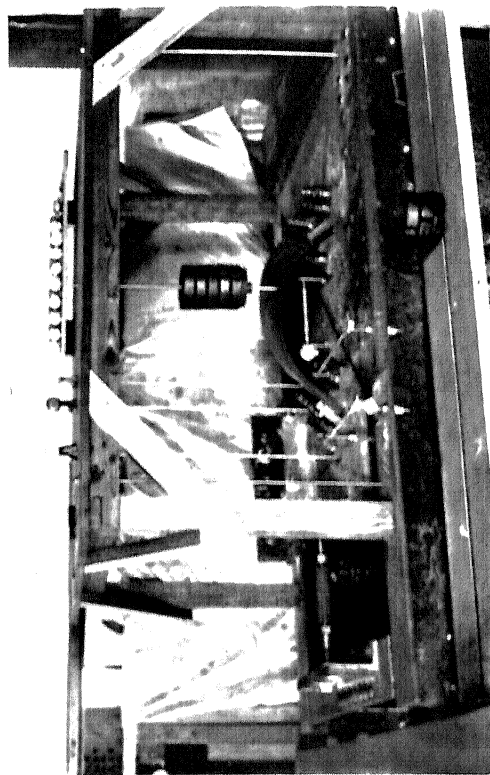
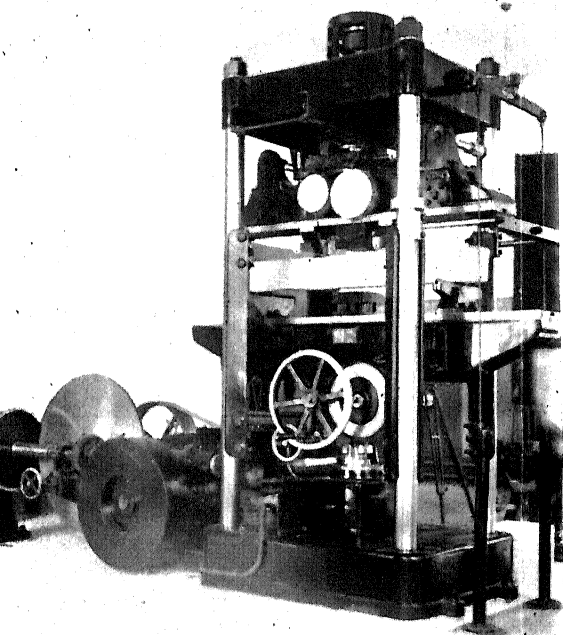
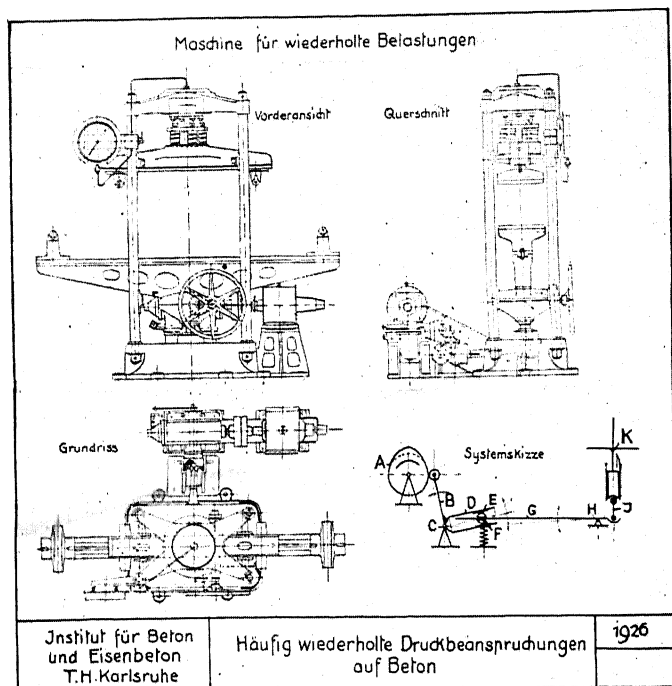


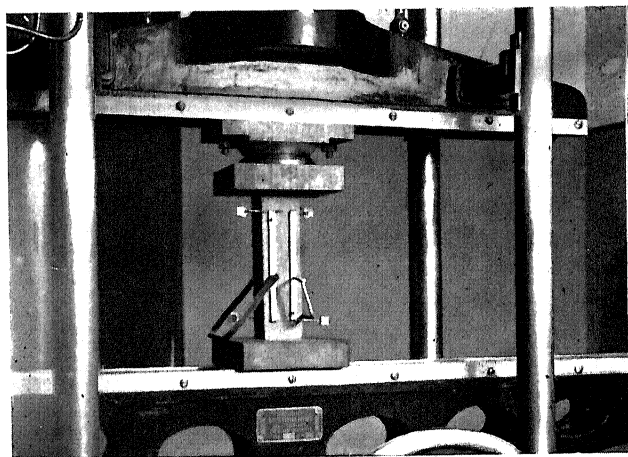
Fig. 6.



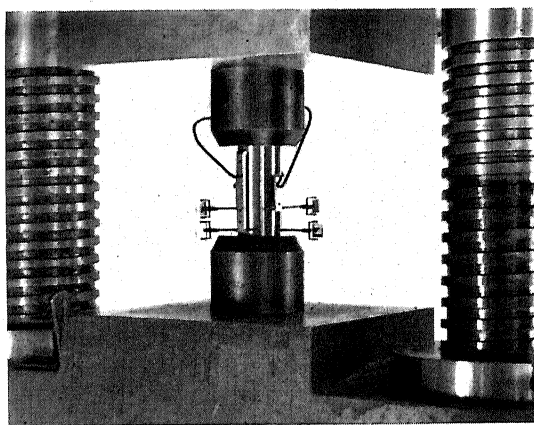
PROBST: Abb. 3. 50 t-Prüfmaschine.



PROBST: Abb. 1. 10 t-Prüfmaschine.



PROBST: Abb. 2. Elastizitätsuntersuchungen an Betonprismen.



GEHLER: Abb. 2. Dehnungsmessungen mit Spiegelapparaten.

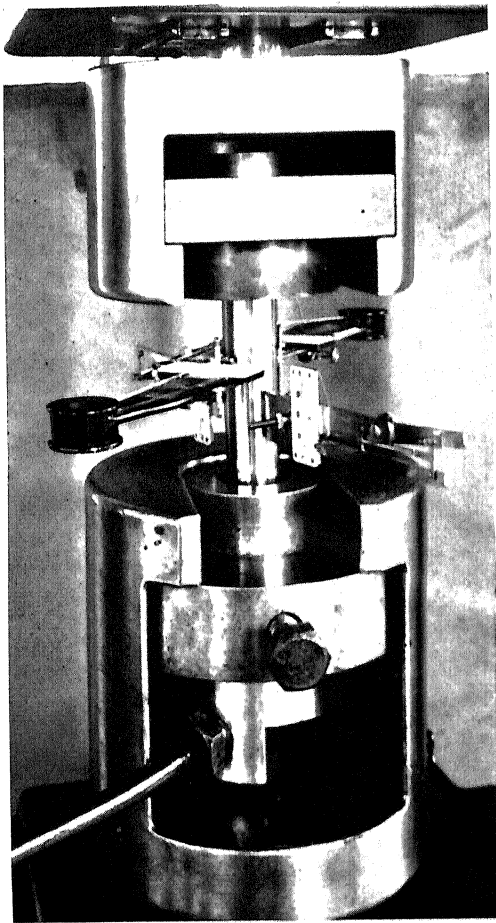


Abb. 1. Zugversuch.

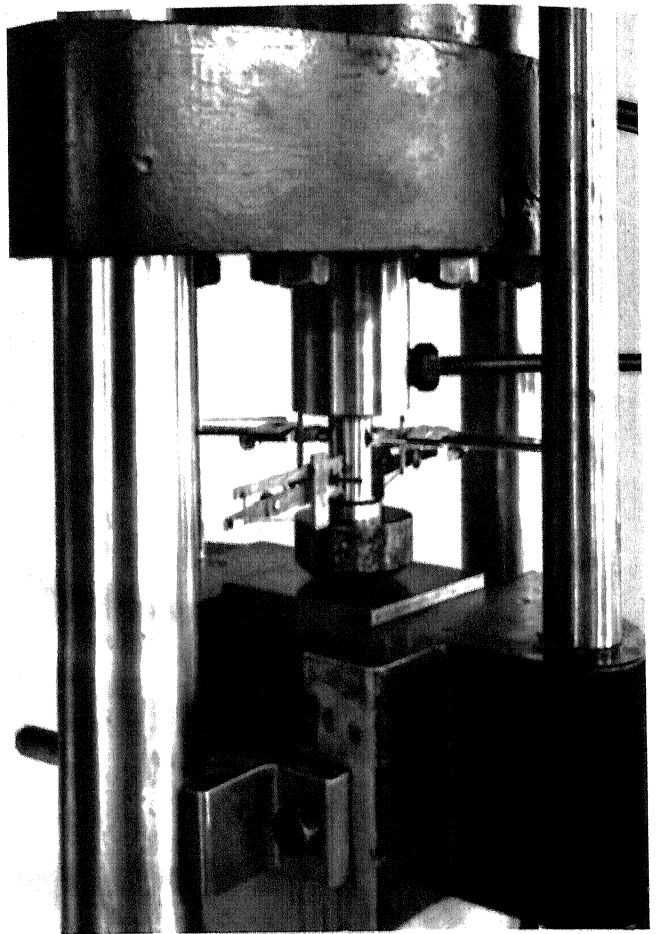


Abb. 2. Druckversuch.

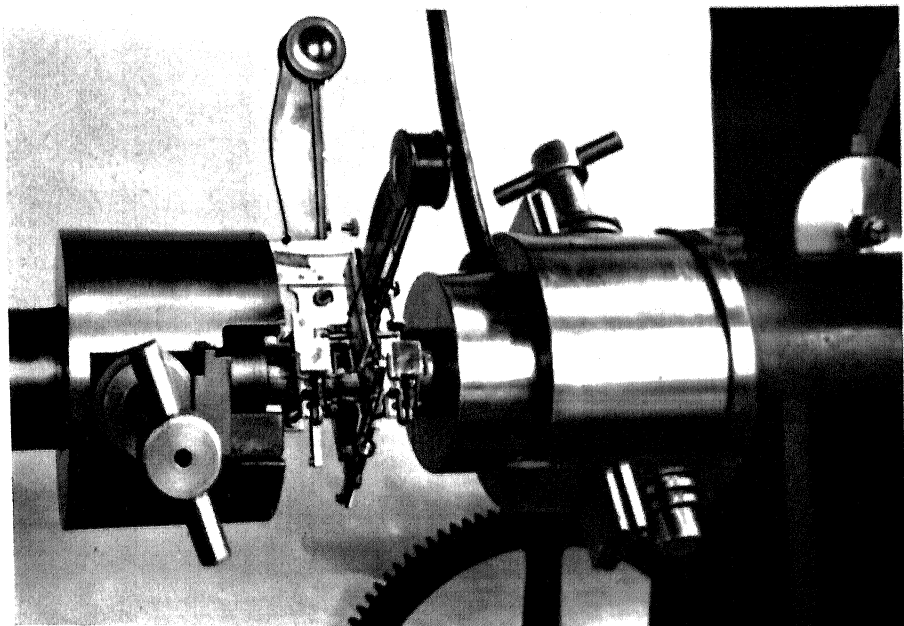


Abb. 3. Torsionsversuch.

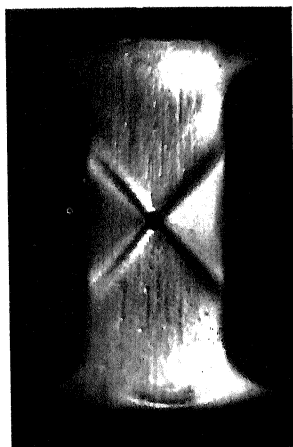


Abb. 4

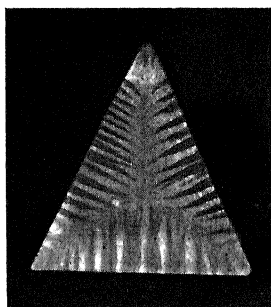


Abb. 5



Abb. 6

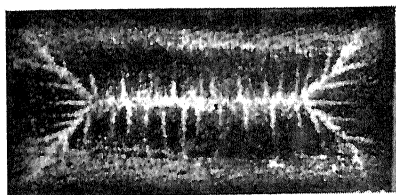


Abb. 7

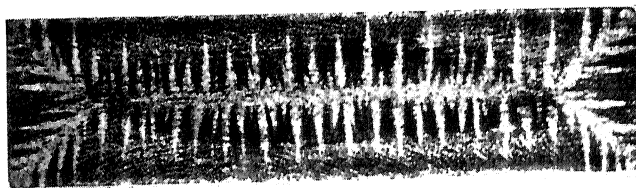


Abb. 8

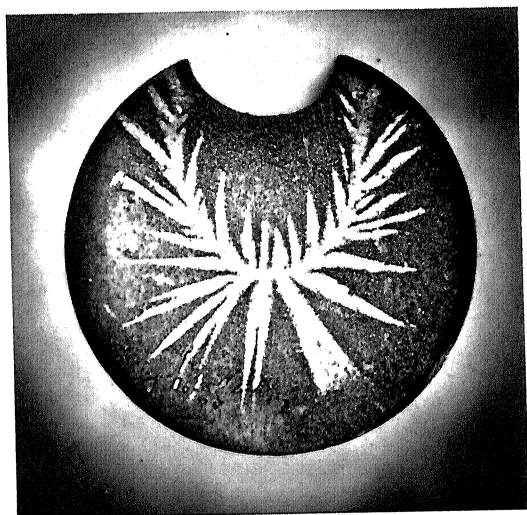


Abb. 9

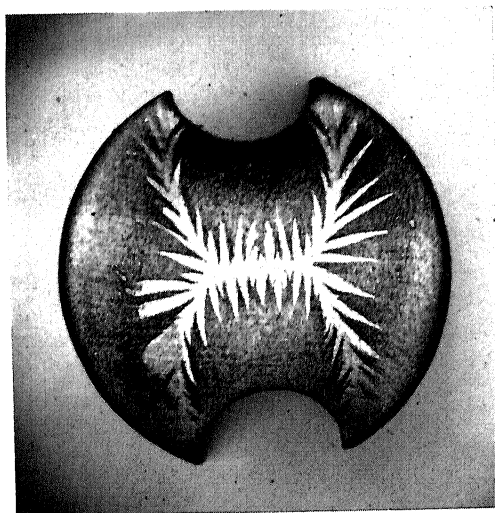


Abb. 10

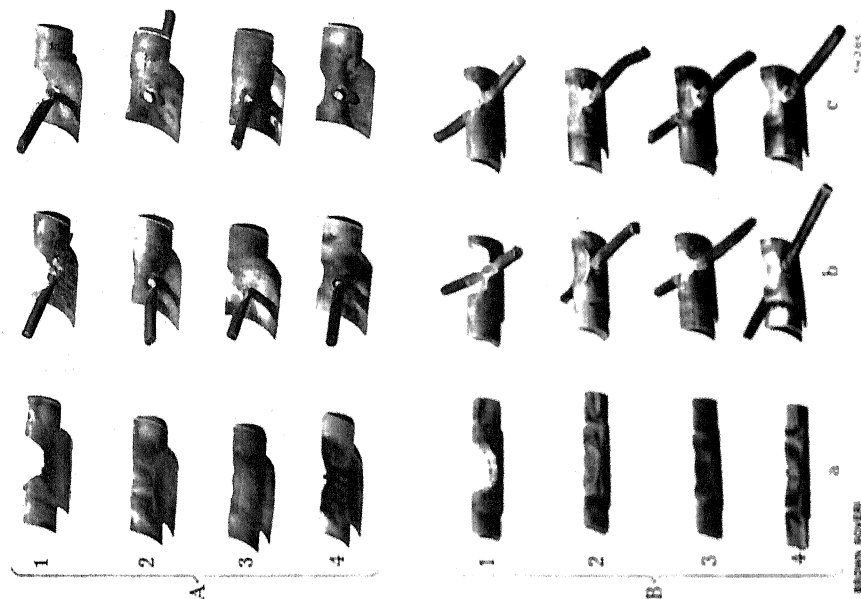


Abb. 4.

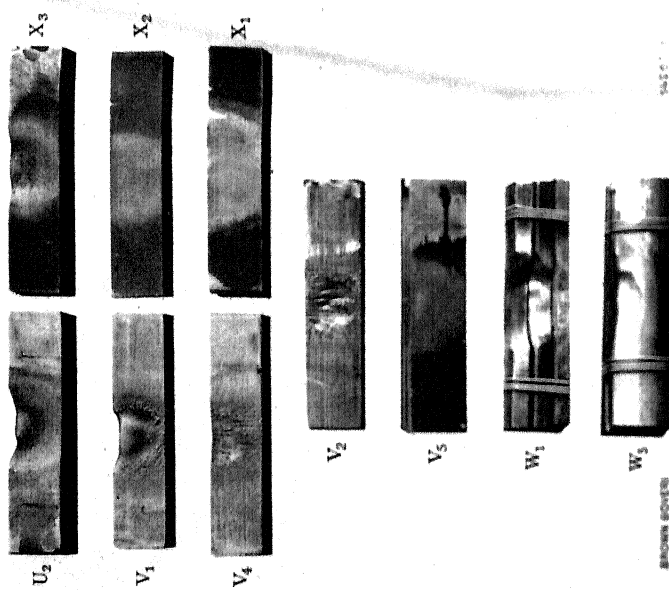


Abb. 3. — Proben nach 70-tündiger Versuchsdauer.

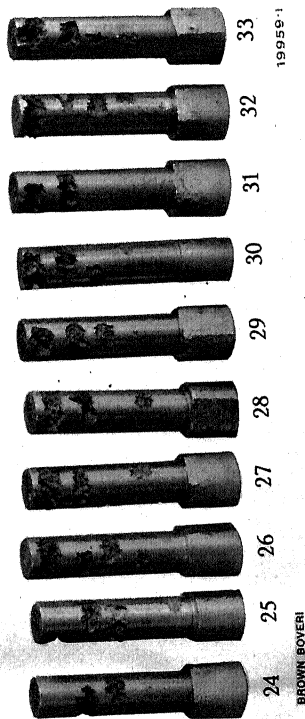


Abb. 7.
Erosionsanfressungen bei zunehmender Geschwindigkeit. (Tabelle 4.)

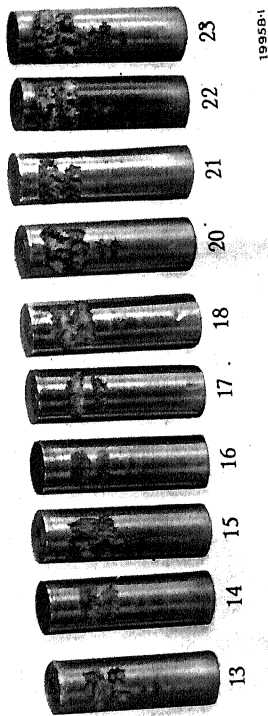


Abb. 6.
Erosionsproben nach Versuchen mit 175 m/sec. Geschwindigkeit. Anfressungen nach 1/2, 1 1/2 und 3 Stunden. (Vergl. Tabelle 3 und Abb. 6 a u. 6 b)

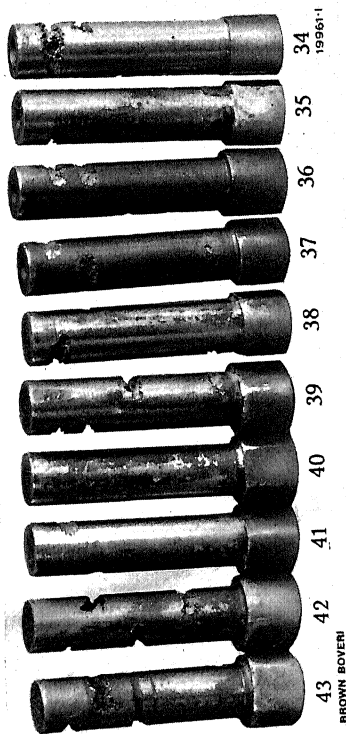


Abb. 8.
Erosionsproben nach verschieden langer Prüfung bei 200 m sec. Rückansicht. (Tabelle 5.)

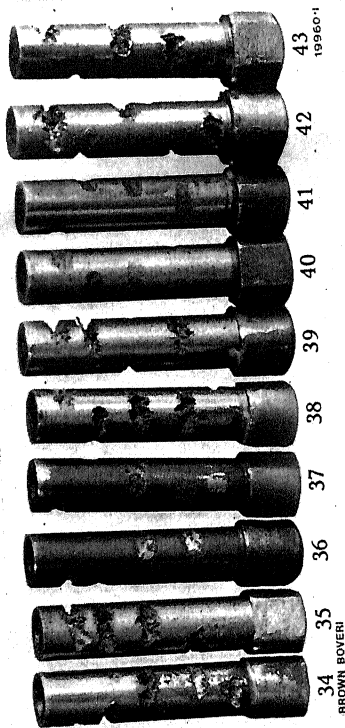
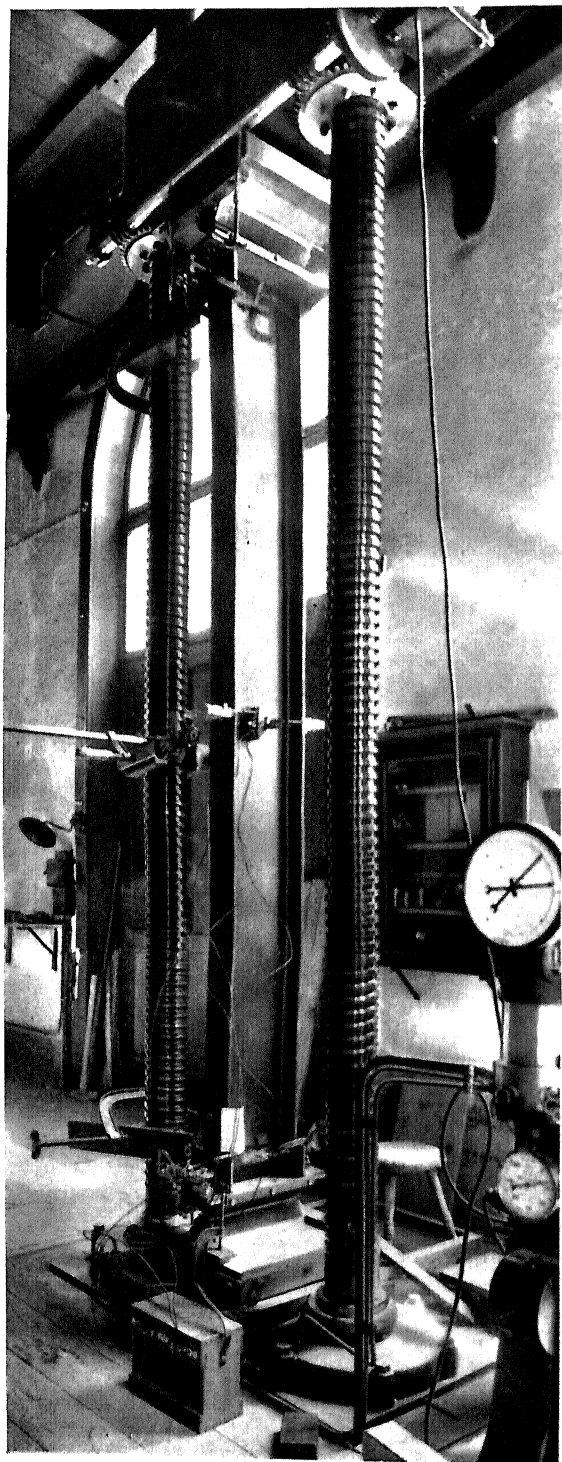
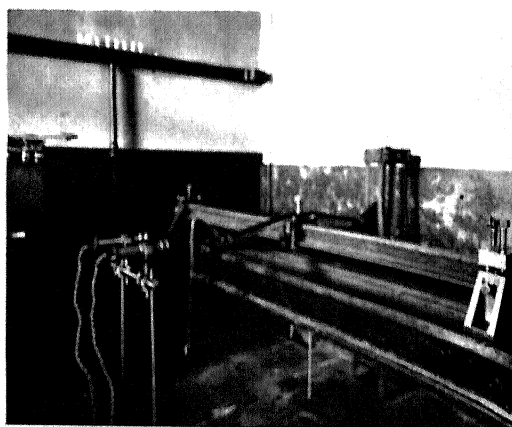


Abb. 8a.
Erosionsproben nach verschieden langer Prüfung bei 200 m/sec. Vorderansicht. (Tabelle 5.)

E. HONEGGER, ZÜRICH



ROŠ: Abb. 11. Knickversuch mit INP 32
 Schneidenentfernung 3.20 m
 Schlankheitsgrad $\frac{l}{i} = 120$; Exzentrizitätsmass m 0



TIMOSHENKO: Fig. 7. Method of Analysis
 of Straietal and Dynamical Stresses in Rail,

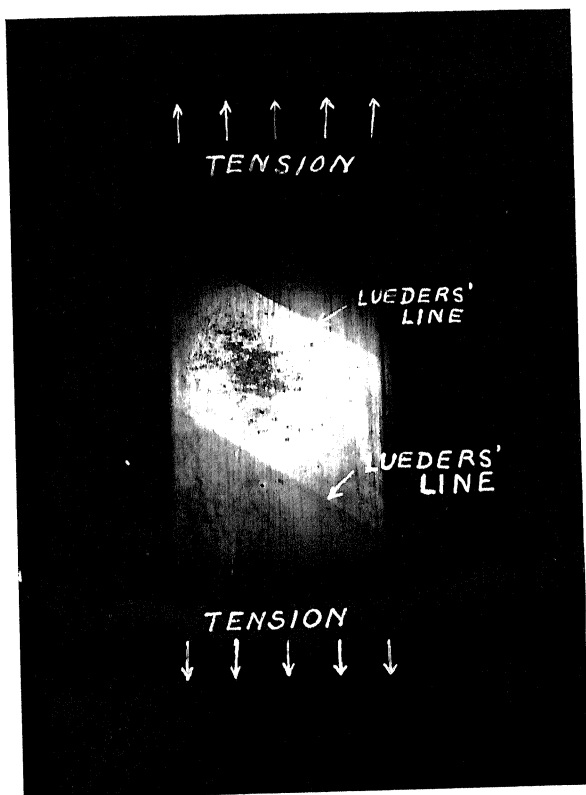


Fig. 8.

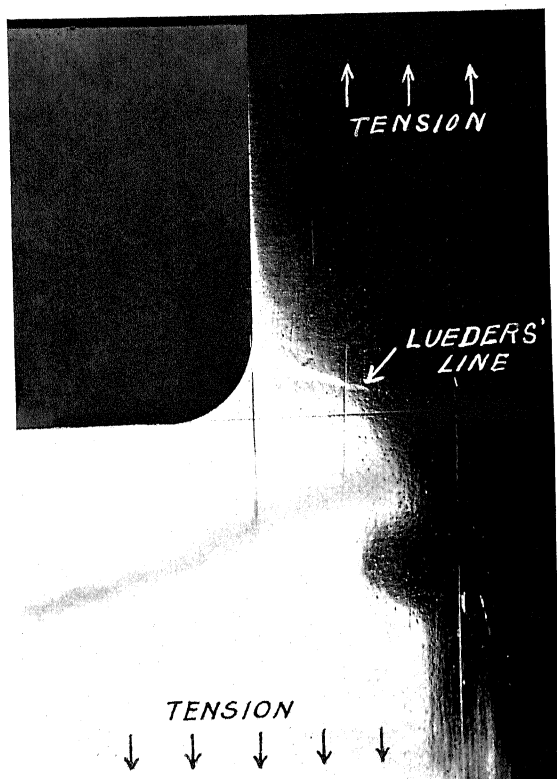


Fig. 9.

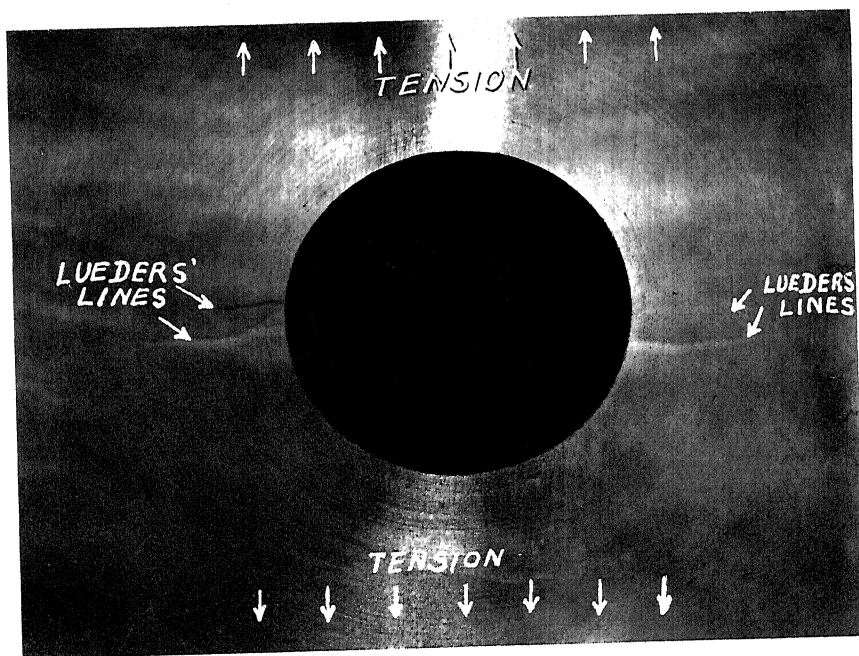
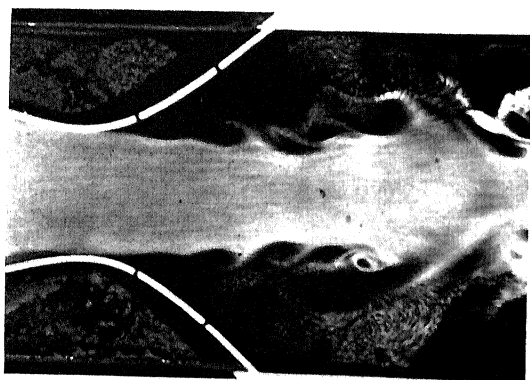
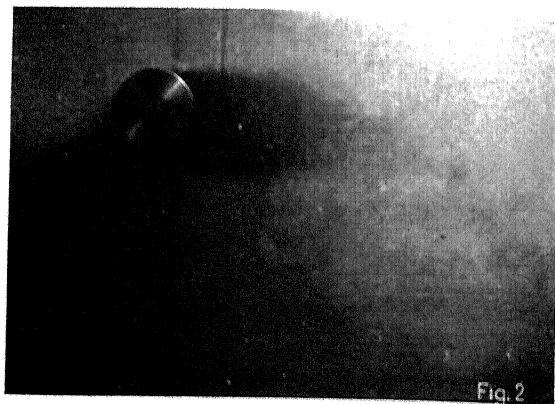


Fig. 10.

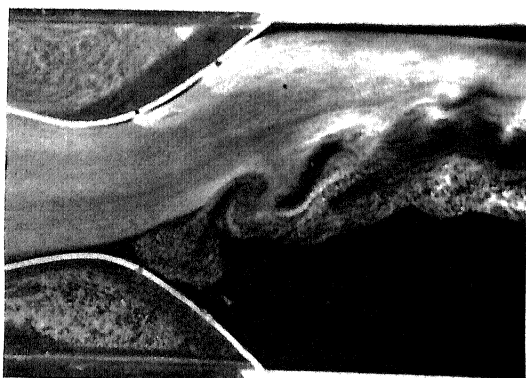


ACKERET: Abb. 2.

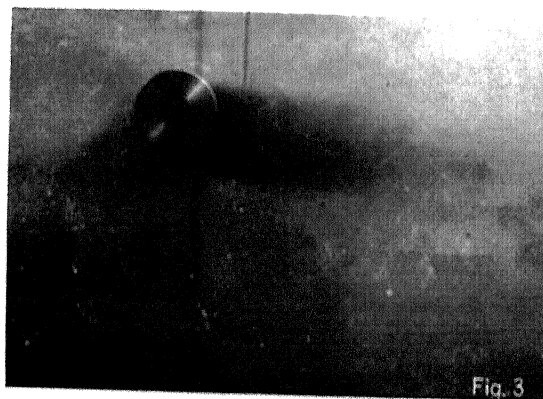


ZELON: Abb. 2

Fig. 2

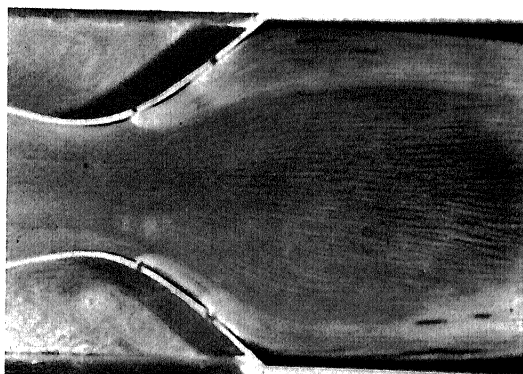


ACKERET: Abb. 3.



ZELON: Abb. 3

Fig. 3



ACKERET: Abb. 4.



ZELON: Abb. 4.

Fig. 4

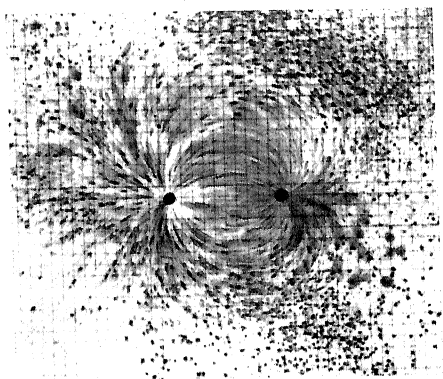


Abb. 1.

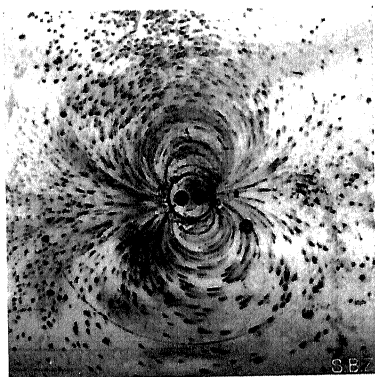


Abb. 2.



Abb. 3.

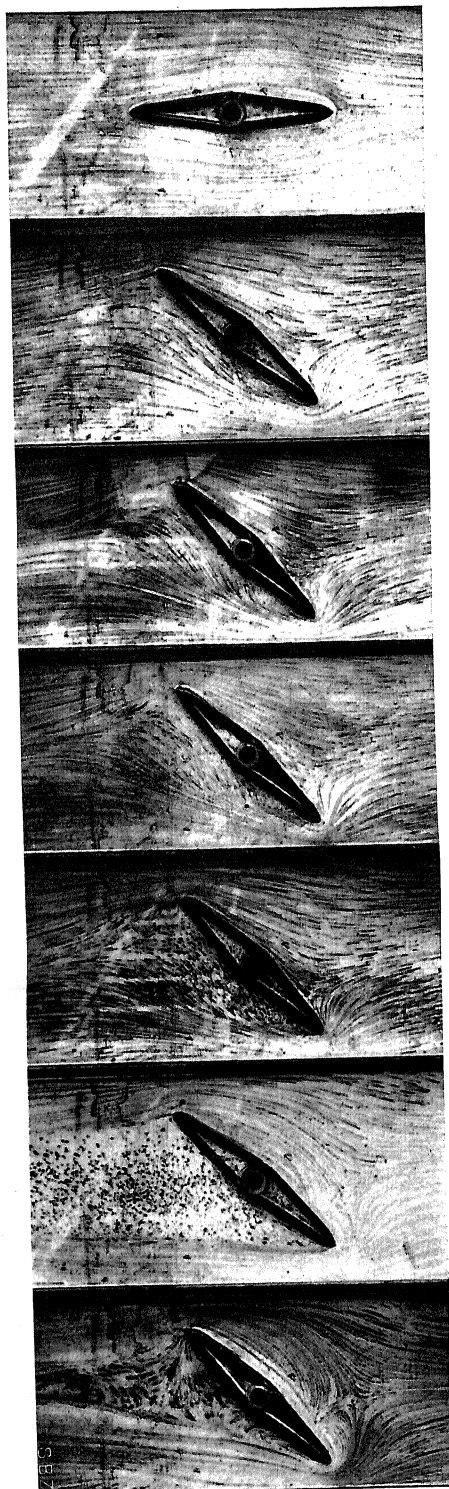


Abb. 4.

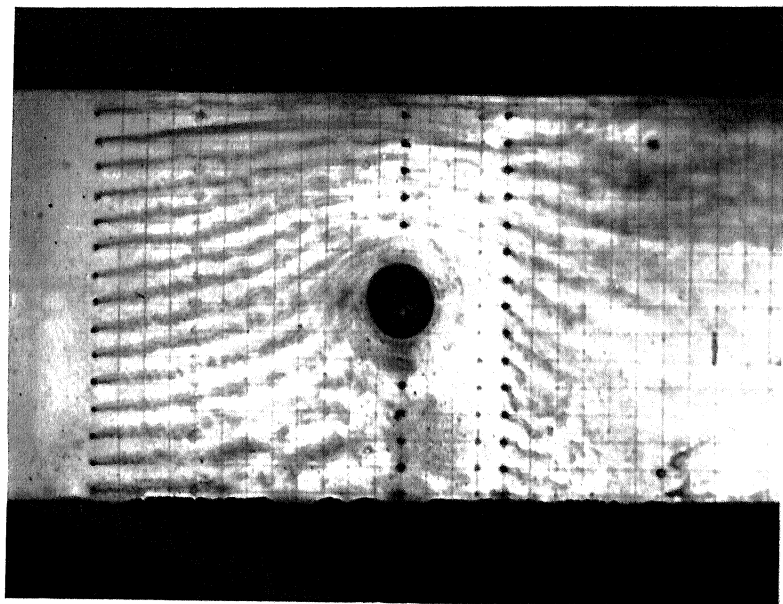


Abb. 6.

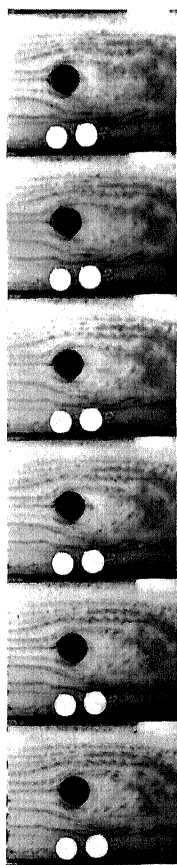


Abb. 5.

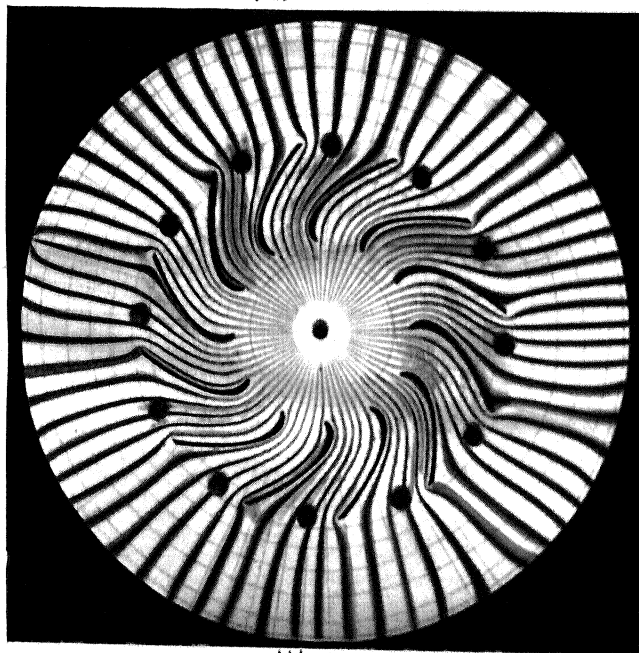


Abb. 7.

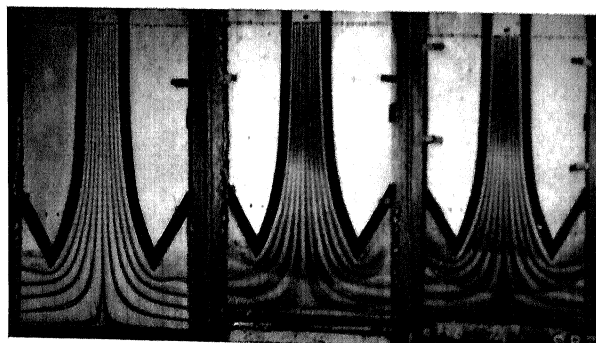


Abb. 9.

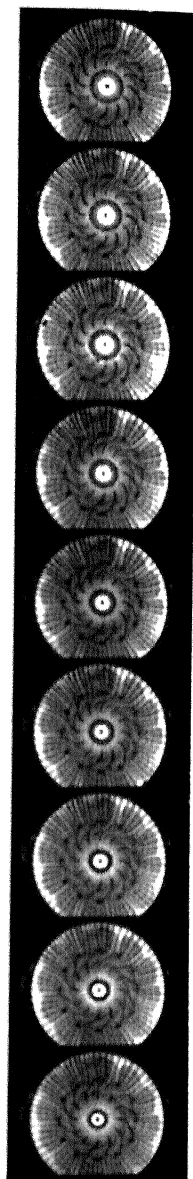


Abb. 8.



Abb. 13.

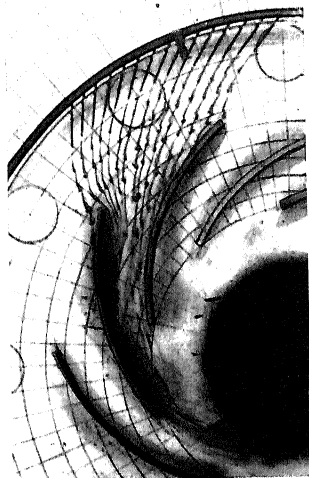


Abb. 16.

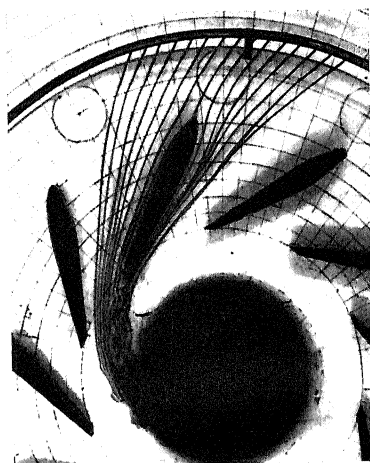


Abb. 20.

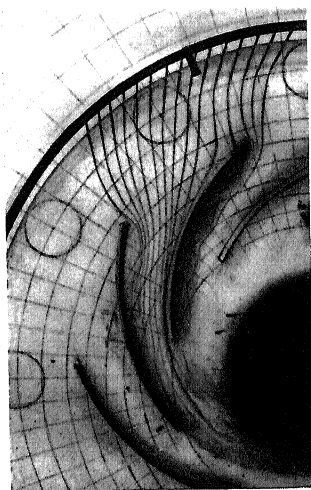


Abb. 12.

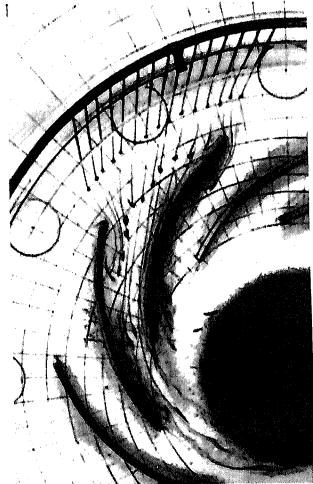


Abb. 15.



Abb. 19.

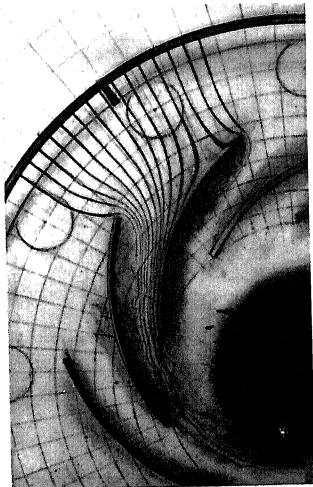


Abb. 11.

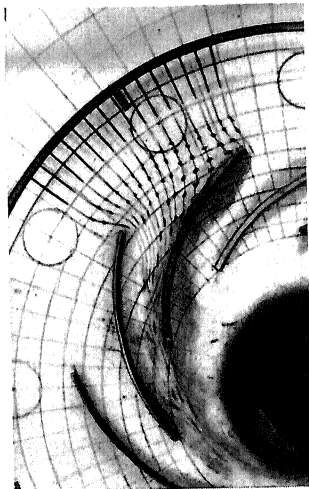


Abb. 14.

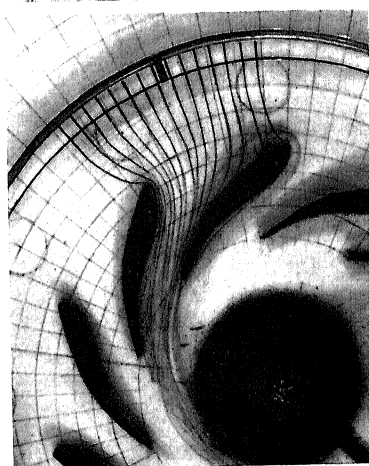


Abb. 18.

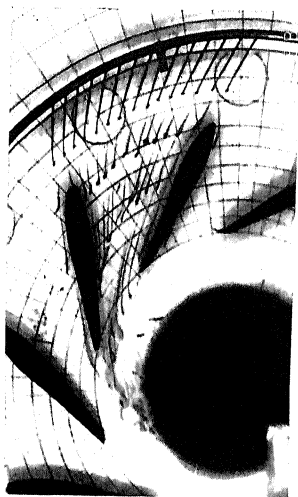


Abb. 23.

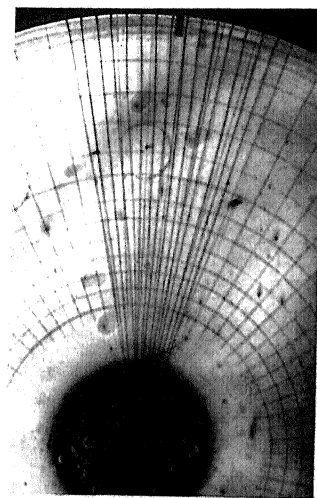


Abb. 26.

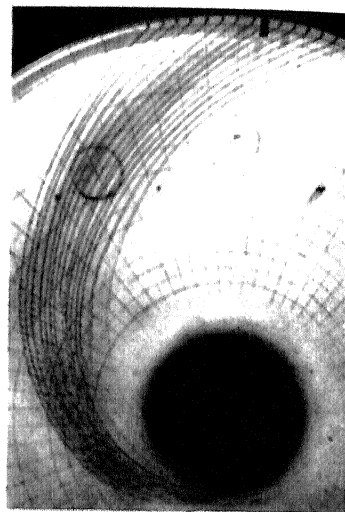


Abb. 29.

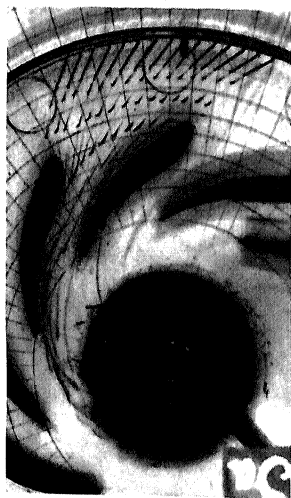


Abb. 22.

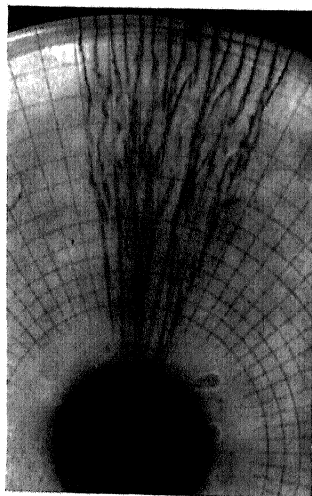


Abb. 25.

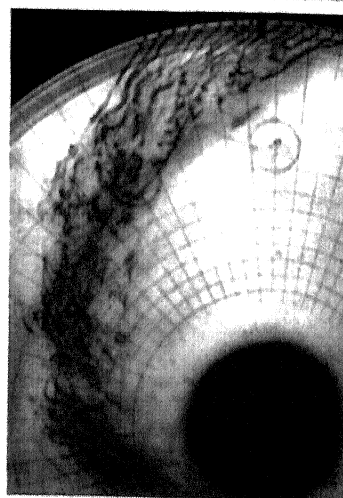


Abb. 28.

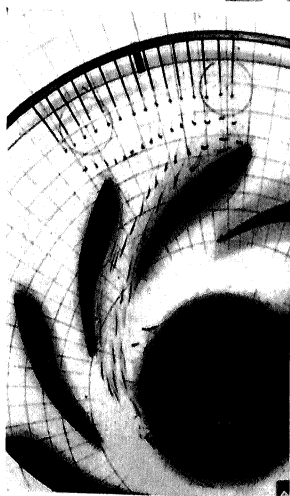


Abb. 21.

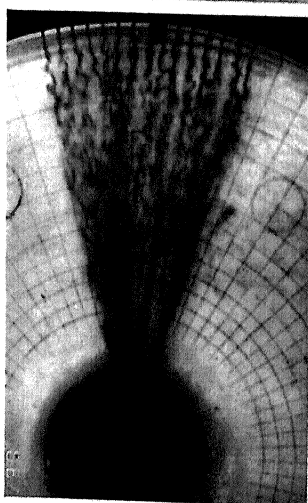


Abb. 24.



Abb. 27.

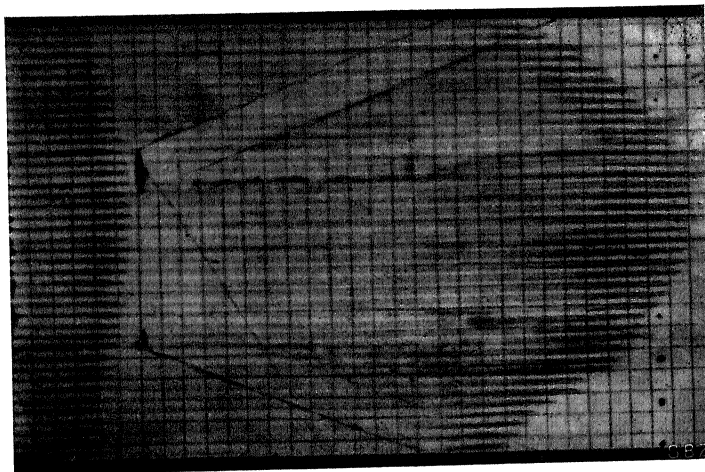


Abb. 10.

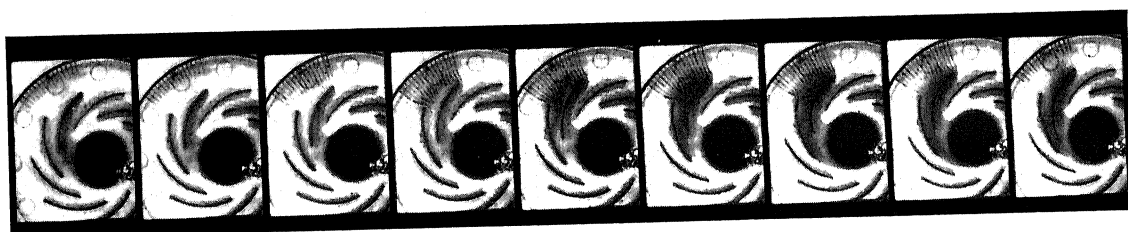


Abb. 17.

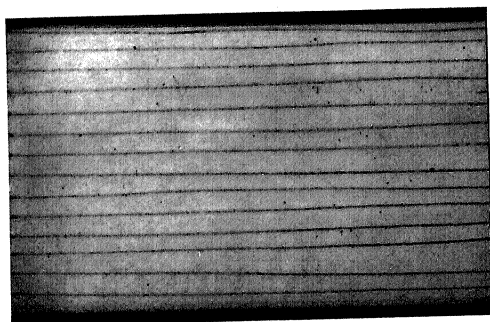


Abb. 30.

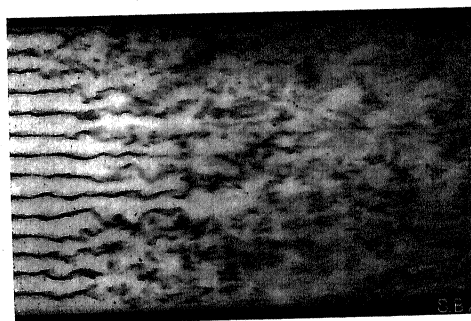


Abb. 31.

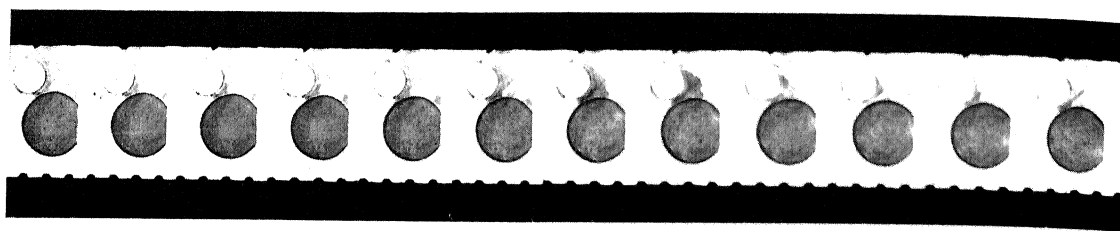


Abb. 32.

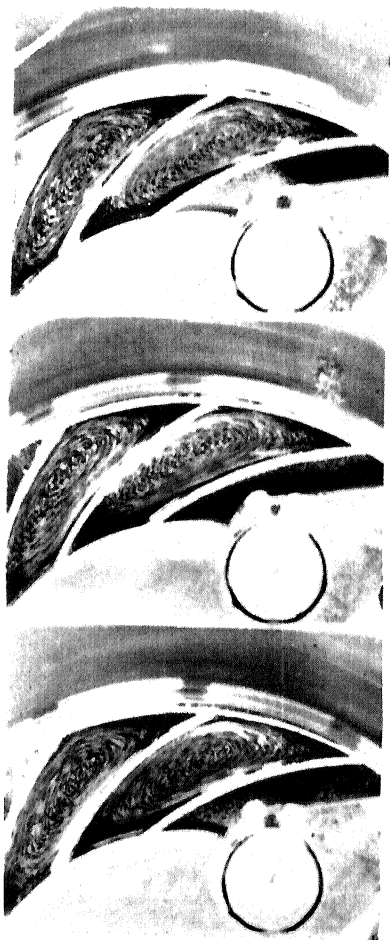


Abb. 33.

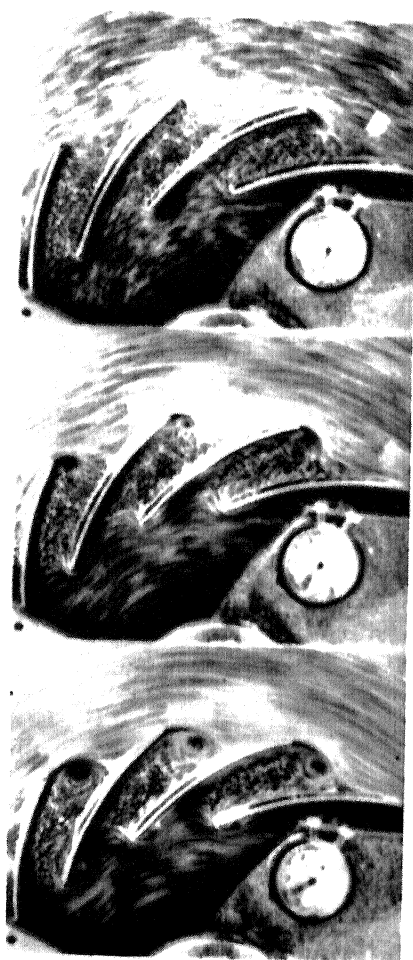
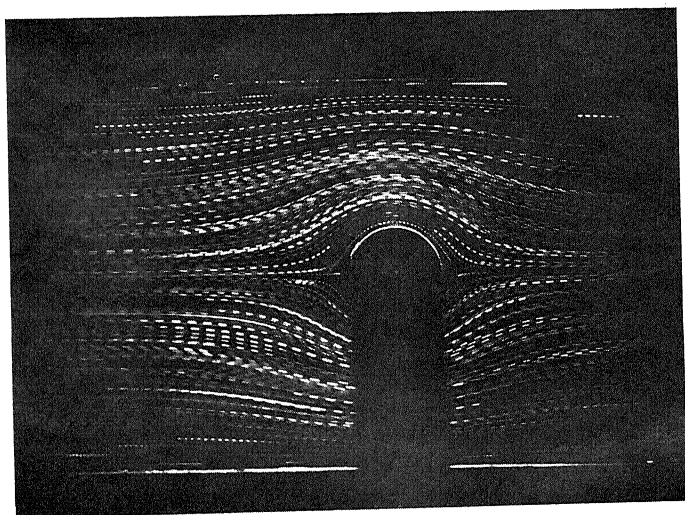


Abb. 34.



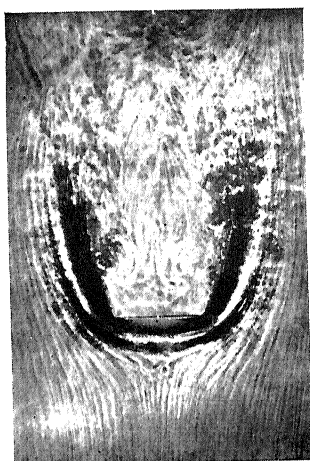
Abb. 35.



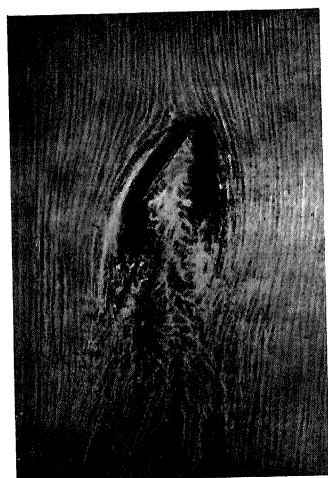
CAMICHEL: Méthode chronophotographique. Fig. 1.



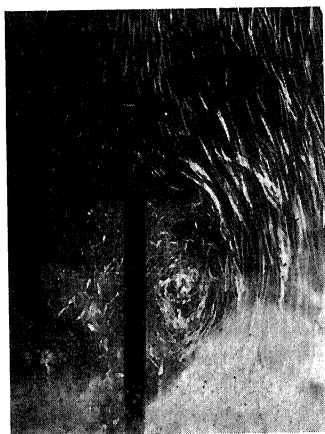
RIABOUCHINSKY: Fig. 5.



RIABOUCHINSKY: Fig. 7.



RIABOUCHINSKY: Fig. 6.



RIABOUCHINSKY: Fig. 9.

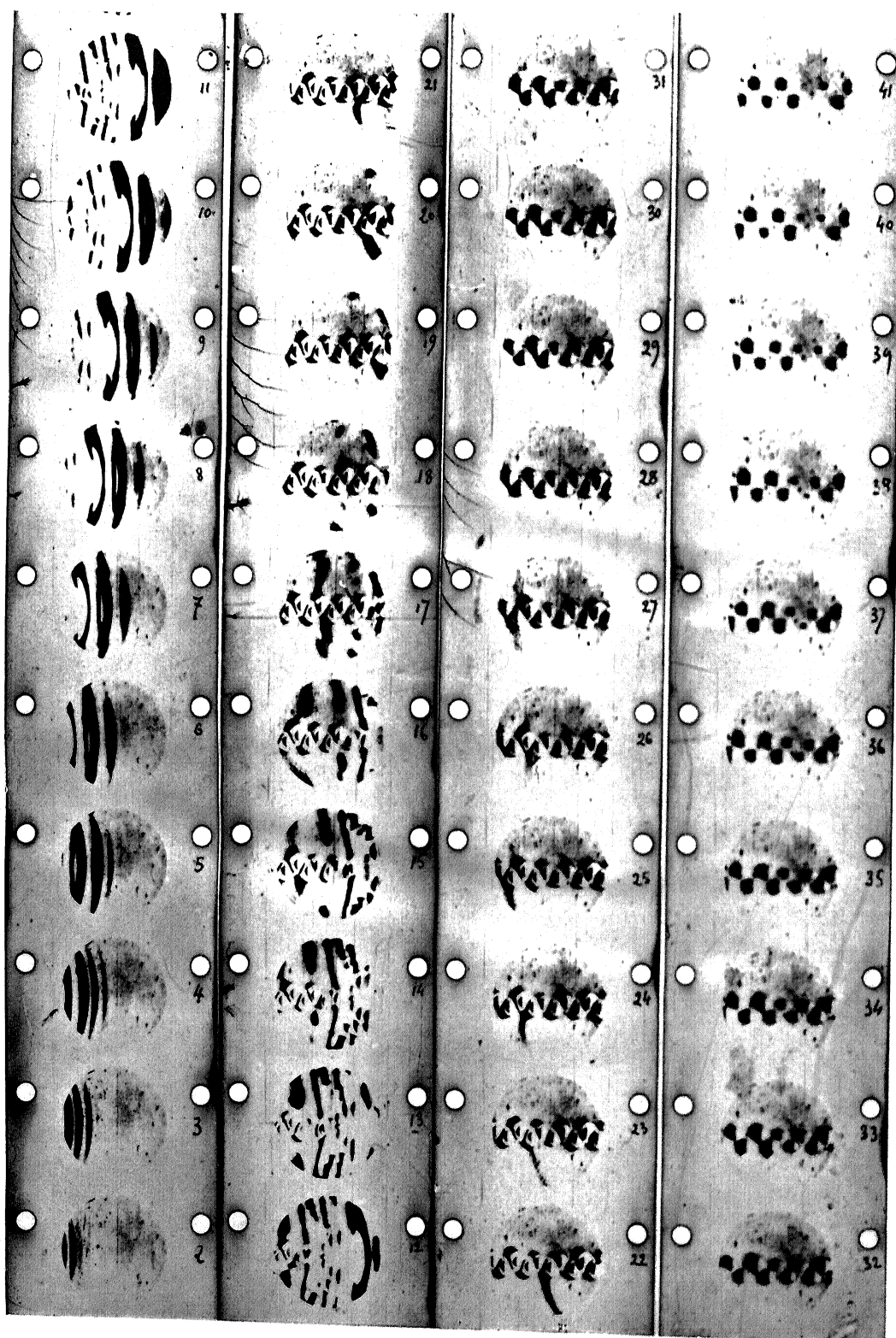
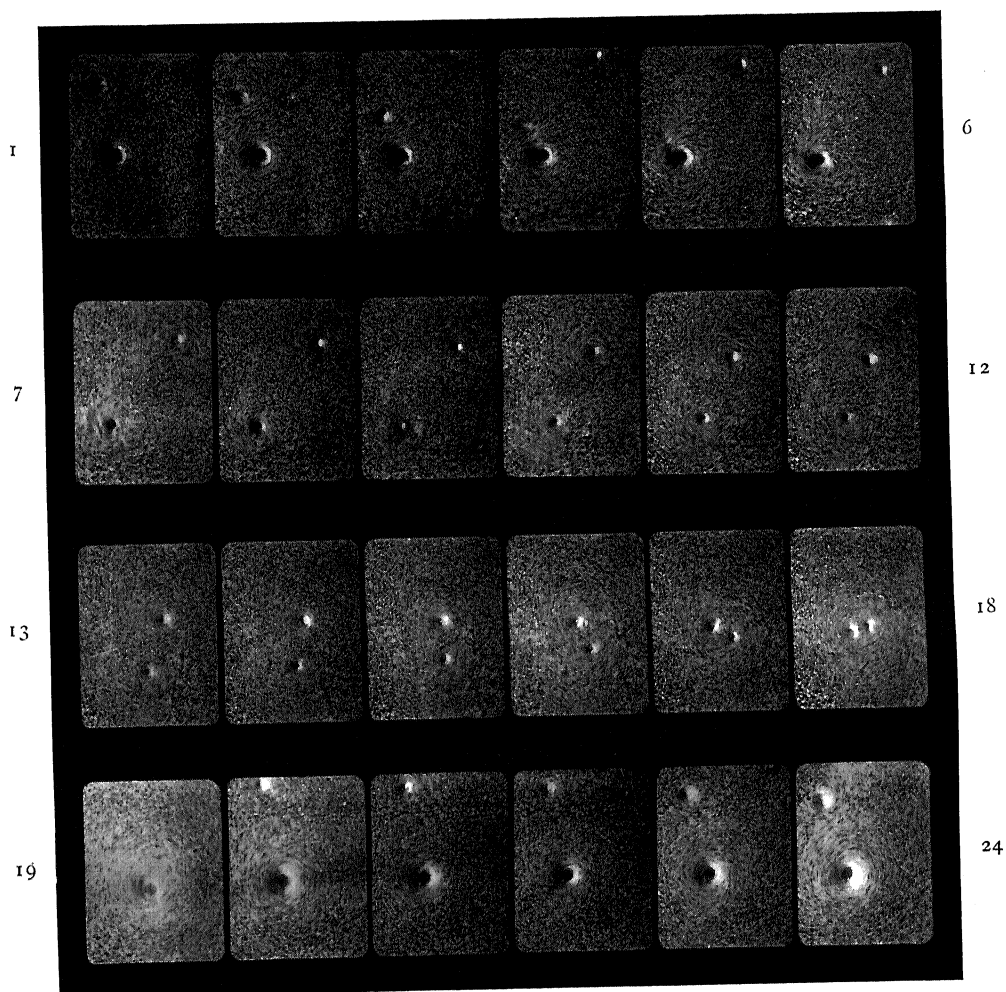
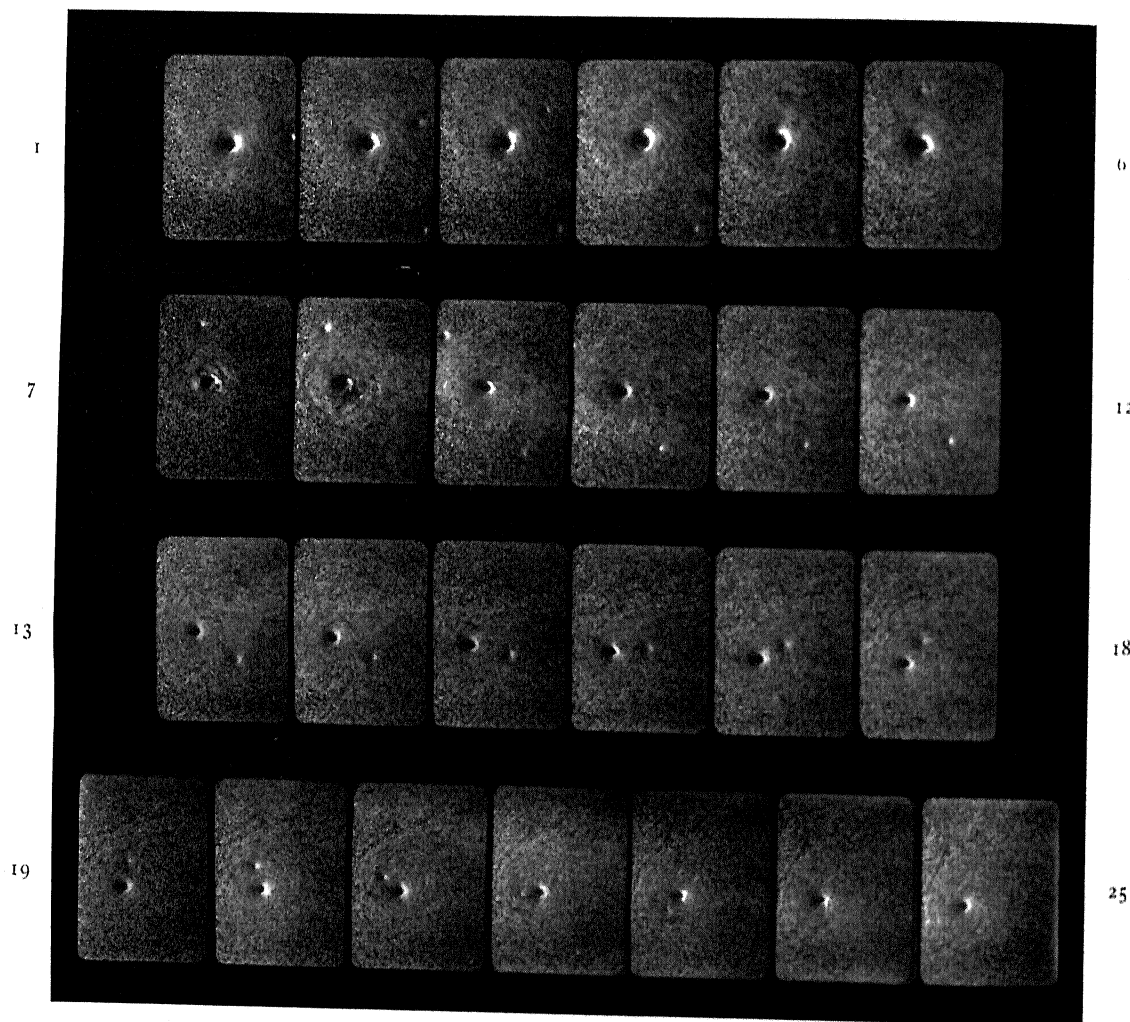


Fig. 3.

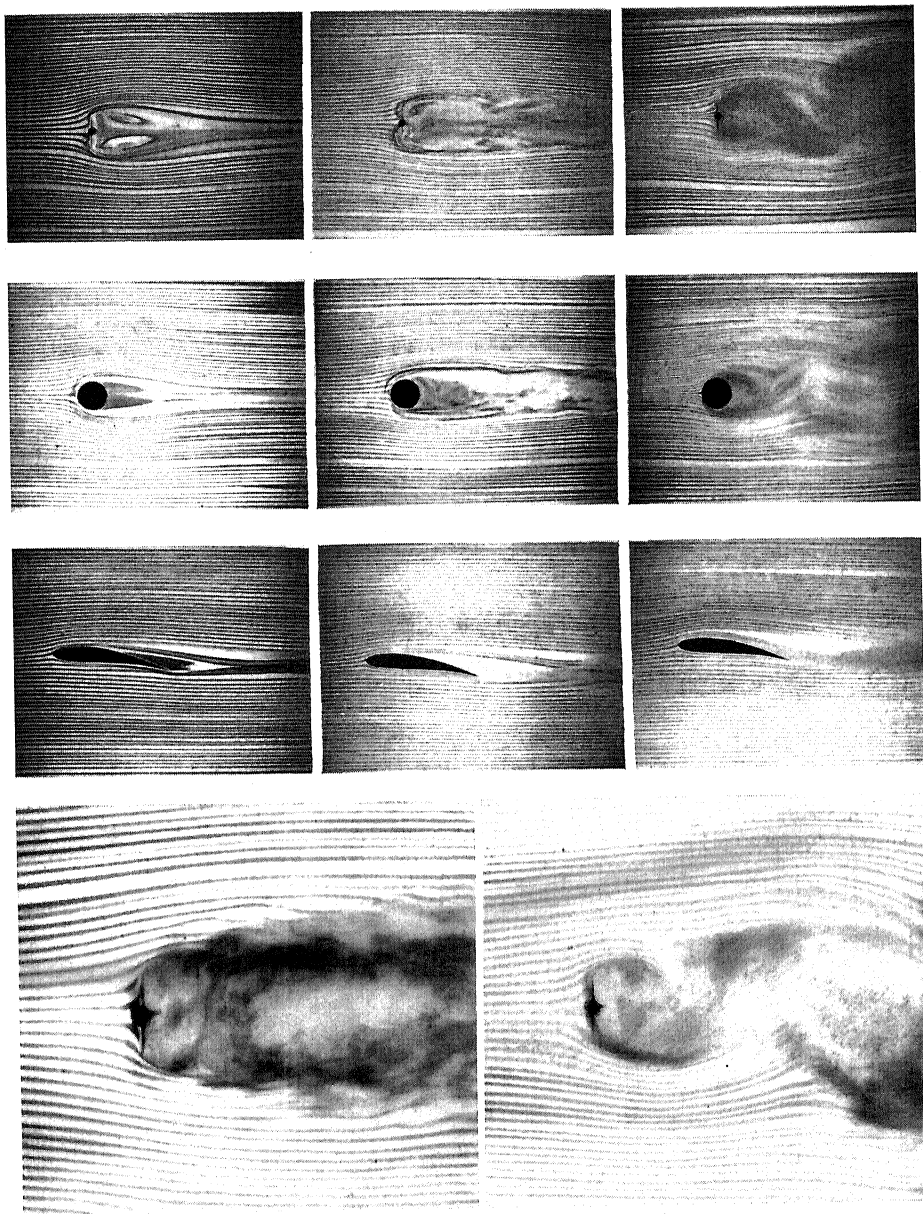
Reproduction en négatif de 40 images consécutives du film 260. En vraie grandeur, le cercle de chaque image aurait 6,53 cm de diamètre.



Separation of vortices with different senses of rotation 1--13.

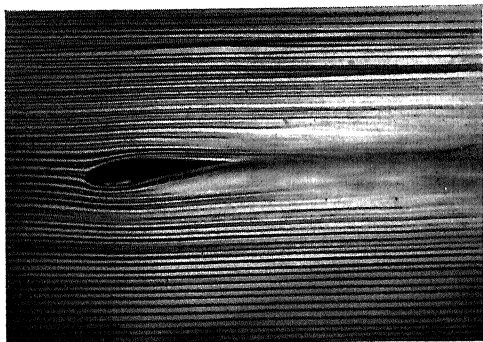


Amalgamation 2-25
Separation 1-10



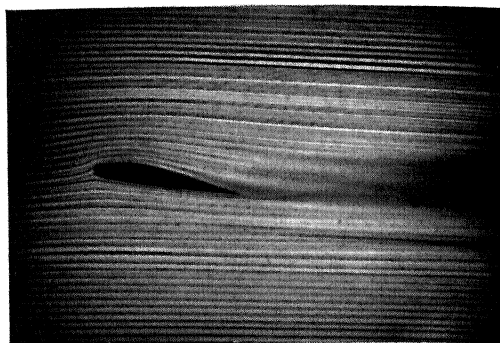
Les 9 photographies supérieures représentent de gauche à droite l'évolution des spectres avec la vitesse, pour un plan mince orthogonal au courant, pour un cylindre circulaire et pour un profil d'aile (430 Göttingen).

Les 2 photographies inférieures représentent le sillage tumultueux et le sillage à tourbillons alternés pour le plan mince normal au courant.



Profil Loire-Gourdou-Lesseurre (Tracé von Mises)

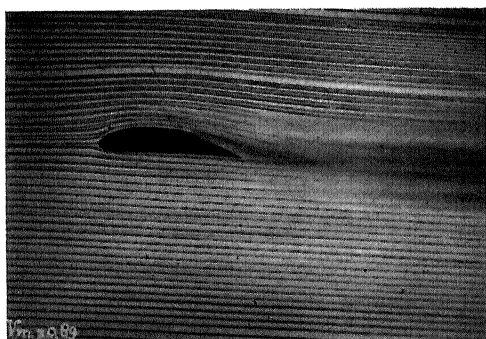
Longueur de corde: 80 mm
Incidence environ: $-8,3^{\circ}$
Vitesse moyenne: 0,30 m/sec.



Profil Loire-Gourdou-Lesseurre (Tracé von Mises)

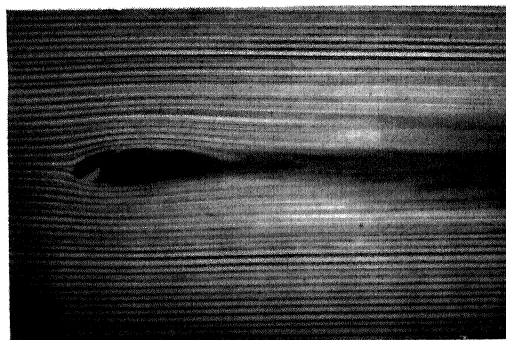
Longueur de corde: 80 mm
Incidence environ: $7,5^{\circ}$
Vitesse moyenne: 0,50 m/sec.

Cette incidence correspond d'après les essais de St-Cyr à un C_z de 0,7 pour laquelle le profil est encore bien contourné par le courant.



Profil Loire-Gourdou-Lesseurre (Tracé von Mises)

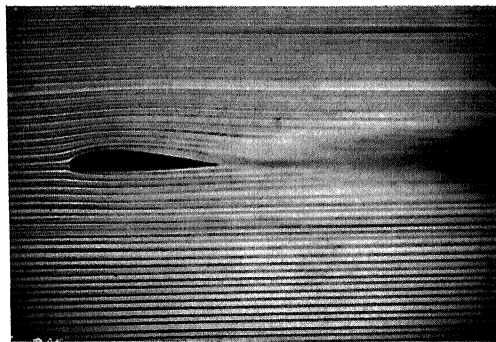
Longueur de corde: 80 mm
Incidence environ: -3°
Vitesse moyenne: 0,85 m/sec.



Profil à trois fentes (Lachmann-Handley-Page)

Longueur de corde: 78 mm
Incidence environ: 0°
Vitesse moyenne: 1 m/sec.

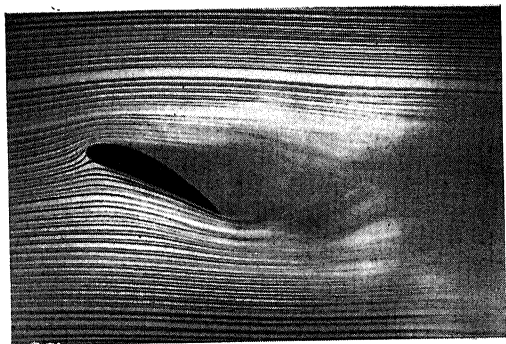
Cette incidence correspond à la portance nulle. Il semble n'exister aucun courant à travers les fentes.



Profil Göttingen 422 (Enveloppe du profil à trois fentes)

Longueur de corde: 80 mm
Incidence environ: $1,5^{\circ}$
Vitesse moyenne: 0,89 m/sec.

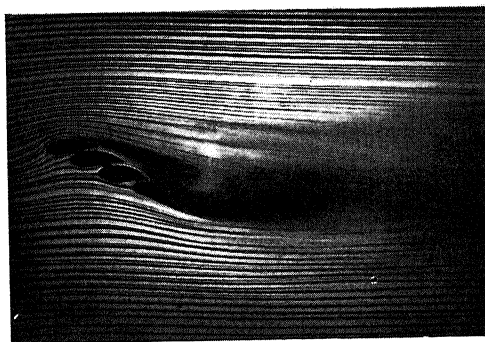
Cette incidence correspond à une portance moyenne $C_z = 0,7$ d'après Göttingen et la parabole induite est alors parallèle à la polaire expérimentale. Le spectre montre que le courant contourne bien le profil.



Profil Göttingen 422 (Enveloppe du profil à trois fentes)

Longueur de corde: 80 mm
Incidence environ: 25°
Vitesse moyenne: 0,74 m/sec.

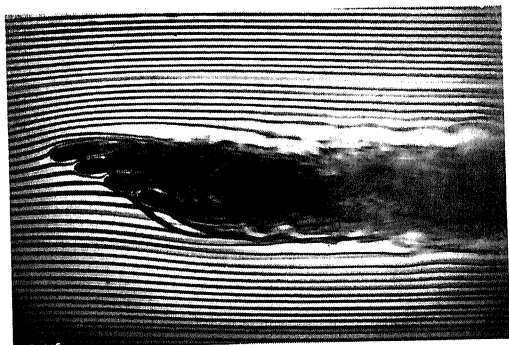
Cette incidence est bien au delà de portance maximum. Le spectre montre des décollements importants et il se produit aussi des tourbillons alternés.



Profil à trois fentes (Lochmann-Handley-Page)

Longueur de corde: 78 mm
Incidence environ: $23,5^{\circ}$
Vitesse moyenne: 0,98 m/sec.

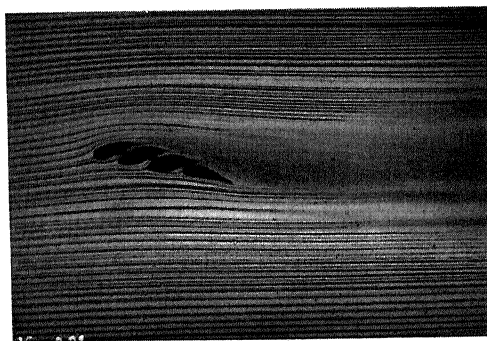
Cette incidence correspond sensiblement au maximum de sustentation soit $C_z = 2,10$ d'après Göttingen. Pour cette vitesse on observe bien le passage du courant à travers les trois fentes; le sillage en arrière est nettement infléchi et relativement modéré sans tourbillons alternés malgré la grande incidence du profil.



Profil à trois fentes (Lochmann-Handley-Page)

Longueur de corde: 78 mm
Incidence environ: $23,5^{\circ}$
Vitesse moyenne: 0,115 m/sec.

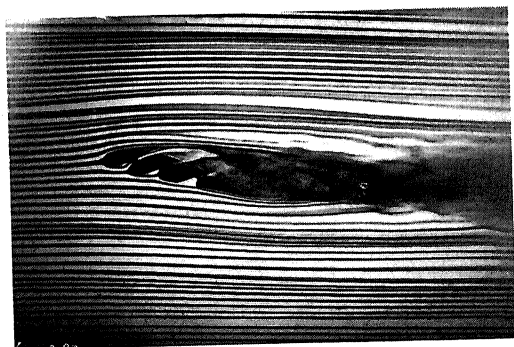
Cette incidence correspond sensiblement au maximum de sustentation: $C_z = 2,10$ d'après Göttingen. Pour cette vitesse on observe bien le passage du courant à travers les trois fentes, malgré le déferlement d'une ligne de courant en amont.



Profil à trois fentes (Lochmann-Handley-Page)

Longueur de corde: 78 mm
Incidence environ: 12°
Vitesse moyenne: 0,91 m/sec.

Cette incidence correspond à une portance déjà élevée: $C_z = 1,30$ d'après Göttingen. Pour cette vitesse on observe bien le passage du courant à travers les trois fentes. On observe aussi que les lignes de courant qui pénètrent dans les fentes suivent préférentiellement l'extrados de l'élément qui suit.



Profil à trois fentes (Lochmann-Handley-Page)

Longueur de corde: 78 mm
Incidence environ: 12°
Vitesse moyenne: 0,27 m/sec.

Cette incidence correspond à une portance déjà élevée. $C_z = 1,30$ d'après Göttingen. Pour cette vitesse on observe bien le passage du courant à travers les deux premières fentes et l'on devine qu'il passe modérément à travers la troisième. On observe aussi que les lignes de courant qui pénètrent dans les fentes suivent préférentiellement l'extrados de l'élément qui suit.

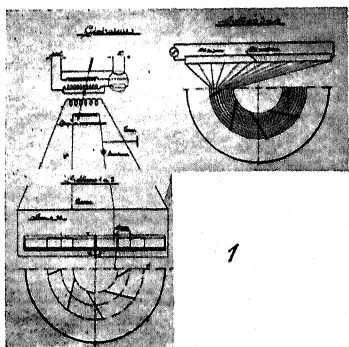


Fig. 1.

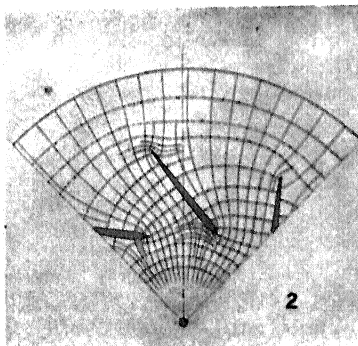


Fig. 2.

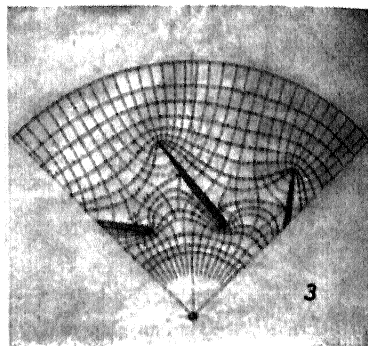


Fig. 3.

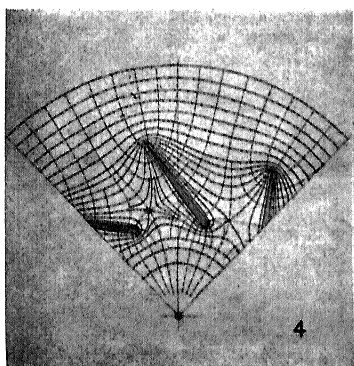


Fig. 4.

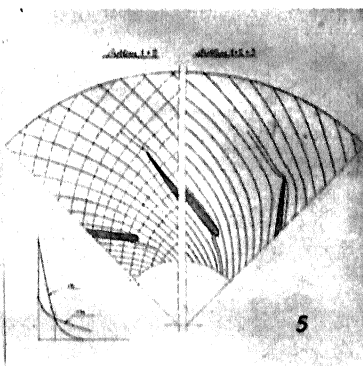


Fig. 5.

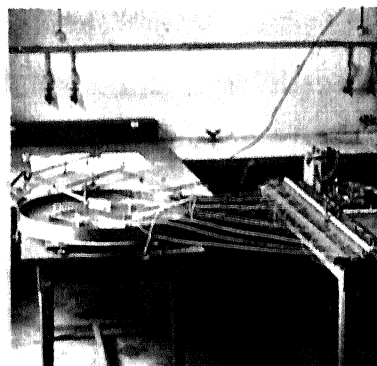


Fig. 6.

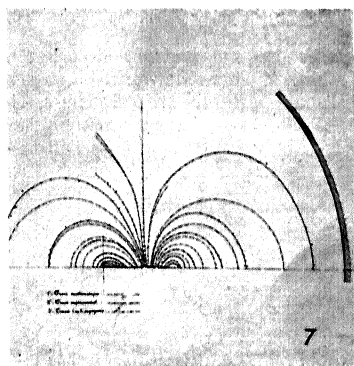


Fig. 7.

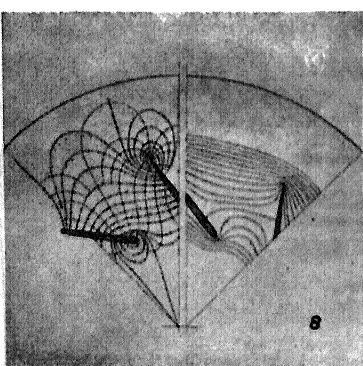


Fig. 8.

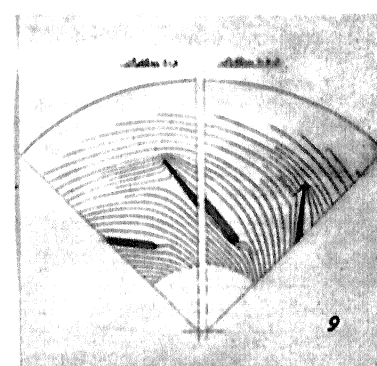


Fig. 9.



Veröffentlichungen der Schweizer. Mathematischen Gesellschaft

BAND II

ANDREAS SPEISER

Prof. an der Universität Zürich

KLASSISCHE STÜCKE DER MATHEMATIK

168 Seiten, gr. 8^o, 16 Figuren, eine Tafel

Geheftet Fr. 9.- Ganzleinen Fr. 12.-

Die Auswahl, die Herr Speiser getroffen hat, birgt bei mäßigem Umfange einen erstaunlich reichen Inhalt. Es ist eine Wanderung durch die ganze Geistesgeschichte von Archytas bis Einstein, bei der wir neben den großen Mathematikern so erlauchten Namen wie Platon und Aristoteles, Dante, Lionardo und Goethe begegnen.

(Jahresbericht d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung).

Daß sich der Mathematiker reich belohnt findet, wenn er sich unter dem Eindruck des Genießens dieser alten Stücke in die Anschauungen früherer Jahrhunderte versenken kann, ist selbstverständlich... Erhöht wird der Genuß der Lektüre dieses Buches durch die ausgezeichnete Ausstattung, die ihm der altbekannte Verlag gegeben hat. Darum verdient es wärmste Empfehlung.

(Zentralzeitung für Optik und Mechanik, Berlin.)

BAND III

RUDOLF FUETER

Prof. an der Universität Zürich

DAS MATHEMATISCHE WERKZEUG DES CHEMIKERS BIOLOGEN UND STATISTIKERS

Vorlesungen über die höheren mathematischen Grundbegriffe
in Verbindung mit ihren Anwendungen

268 Seiten, gr. 8^o, 144 Figuren

Geheftet Fr. 15.- Ganzleinen Fr. 18.-

Das Buch erreicht seinen Zweck vollkommen, ist infolge der klaren Darstellung leicht lesbar, und die zahlreichen eingefügten Beispiele sind so gewählt, daß ihnen der Leser größtes Interesse entgegenbringen wird.

(Lit. Wochenschrift, Berlin.)

... ouvrage qui ne manquera pas de rendre de grands services à tous ceux qui ont besoin de „l'outillage mathématique“, comme l'indique le titre du volume. *(L'Enseignement Mathématique, Paris.)*

ORELL FÜSSLI VERLAG / ZÜRICH UND LEIPZIG



Veröffentlichungen der Schweizer. Mathematischen Gesellschaft
Publications de la Société Mathématique Suisse

BAND VI

LEONARD EUGENE DICKSON
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT CHICAGO

ALGEBREN UND IHRE ZAHLENTHEORIE

MIT EINEM KAPITEL ÜBER

IDEALTHEORIE

von ANDREAS SPEISER

Professor an der Universität Zürich

Zweite umgearbeitete und wesentlich erweiterte Auflage der amerikanischen Ausgabe
300 Seiten, gr. 8°. Geheftet Fr. 18.—, M. 14.40, Ganzleinwand Fr. 22.—, M. 17.60

I N H A L T:

I. Körper, Polynome, Matrizen / II. Einführung in die Algebren / III. Divisionsalgebren / IV. Linearsysteme von Größen einer Algebra / V. Invariante Teilalgebren, Direkte Summe, Reduzibilität, Differenzenalgebra / VI. Nilpotente und halbeinfache Algebren; idempotente Größen / VII. Struktur der Algebren / VIII. Algebraische Zahlen / IX. Zahlentheorie der verallgemeinerten Quaternionenalgebren / X. Allgemeine Zahlentheorie der Algebren / XI. Körper, Quasi-Körper, Polynome in Unbestimmten / XII. Ergänzungen über Algebren / XIII. Idealtheorie in rationalen Algebren

ORELL FÜSSLI VERLAG, ZÜRICH UND LEIPZIG



U L I C K R. E V A N S

M. A., King's College, Cambridge

DIE KORROSION DER METALLE

Deutsche Bearbeitung von Dr. ing. Emil Honegger,
Privat-Dozent an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich

269 Seiten, gr. 8^o, 22 Figuren und eine Tafel

Geheftet Fr. 18.- Leinwandband Fr. 21.-

INHALT:

Geschichtlicher Überblick / Direkte chemische Verbindung von Metallen mit Metalloiden / Übergang vom metallischen in den ionisierten Zustand / Anodische Korrosion durch aufgeprägten, äußern Strom / Mit Wasserstoffentwicklung verbundene Korrosion / Die Anwesenheit gelösten Sauerstoffs voraussetzende Korrosion / Einfluß von oxydierenden Stoffen auf Metalle / Korrosion von Kupfer und Kupfer-Legierungen / Korrodieren und Anlaufen in feuchter, unreiner Atmosphäre / Die Korrosionsgeschwindigkeit beeinflussende Umstände / Korrosionsschutz / Korrosionsfeste Materialien / Anhang: Zusammenfassende Wiedergabe des Verhaltens der einzelnen Metalle gegenüber korrodierenden Stoffen / Autorenverzeichnis / Sachverzeichnis.

Mehr und angenehmer als in diesem Buch kann man über das Gesamtgebiet der Korrosion nirgends lernen. *(Die Naturwissenschaften.)*

Die abschließende Arbeit dieser Forschungen ist das vor anderthalb Jahren erschienene Buch von U. R. Evans, um dessen rasche Übersetzung sich Dr. Emil Honegger verdient gemacht hat. *(Technik und Industrie.)*

Ausstattung, Druck und Abbildungen des Buches sind gut. Das vorliegende Werk kann zur Anschaffung für alle in Frage kommenden Kreise empfohlen werden. *(Der Gesundheits-Ingenieur, München.)*

Im Ganzen aber ist das Buch eine ausgezeichnete und sehr vollständige Darstellung des Korrosionsproblems. Der Stil ist klar und flüssig, und das Werk liest sich mit Genuß. Es bietet eine Fülle einwandfreien Tatsachenmaterials und zahlreiche Anregungen und ist daher sehr zur Anschaffung zu empfehlen. *(Metall-Wirtschaft, Berlin.)*

ORELL FÜSSLI VERLAG / ZÜRICH UND LEIPZIG

Die Bildersprache, sei es in kunstvoller Zeichnung oder freudiger Farbigkeit, wirkt lockend auf das menschliche Gemüt und hält unsere Sinne wohligh umfassen.

Das gedruckte Wort, in sinnvoller, weiser Fügung, prägt sich dauernd fest in unser Gedächtnis und mehrt unbewußt das Kapital unseres Wissens.

Daher ist es Pflicht, jede Drucksache dem Dauerwert ihrer Bedeutung entsprechend mit der exakten Elle bester Fachkenntnis zu messen und zu werten.

Dieser Erkenntnis folgend tragen alle Arbeiten, die aus unserer Offizin hervorgehen, das Signum der Qualität. Graphik ist Kunstgewerbe!

Die Künstler, die Reklamefachleute, die Werbe-Schriftsteller, die Reproduktionstechniker, die Reisevertreter unseres Hauses lösen jede Aufgabe vollkommen.

Darum wendet sich der Kaufmann, der Reklame- und Drucksachenverbraucher an die Großdruckerei. Sie ist die Börse des graphischen Wissens und Könnens.

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI ZÜRICH

GROSSDRUCKEREI
ZUM FROSCHAUER
FRIEDHEIMSTRASSE

LADEN UND
BUCHVERLAG
BARENGASSE

